Calculus

Een dictaat voor het vak Continue Wiskunde

Ale Jan Homburg

Versie 20100901

Inhoudsopgave

1 Voorwoord

Wiskunde is een groot vakgebied dat zich zowel los als in samenhang met andere disciplines heeft ontwikkeld. Zo hebben in het bijzonder de wiskunde en de natuurkunde elkaar bei nvloed, zoals bij meetkunde en relativiteitstheorie, of bij oneindig-dimensionale analyse en quantummechanica. Ook nu zijn er volop dergelijke interacties, zoals tussen meetkunde en algebra in de wiskunde en theoretische natuurkunde. Ook bij informatica, kunstmatige intelligentie en wiskunde zijn er wel gezamenlijke ontwikke- lingen. Voor een aantal theoretische grondslagen in theoretische informatica kom je terecht bij wiskundigen als Von Neumann, Turing en Kolmogorov. En onderzoek naar neurale netwerken strekt zich uit over de disciplines informatica, kunstmatige intelligentie en wiskunde. De grote kracht van de moderne wiskunde ligt in de abstractie en daarmee algemene toepas- baarheid. Dit dictaat beschrijft concreet een aantal methoden uit het deelgebied van de wiskunde wat bekend staat als analyse. In het algemeen houdt de analyse zich bezig met de studie van af- beeldingen, en bewerkingen daarmee zoals differentiëren en integreren. Een grote verscheidenheid aan wiskundige problemen laat zich reduceren tot berekeningen met differentiëren en integreren. Newton en Leibniz realizeerden zich dit aan het eind van de zeventiende eeuw. Ze zagen in dat differenti eren en integreren elkaars inversen zijn. Ook benaderingen met Taylor reeksen zijn eerst bestudeerd door Newton.

Dit is een beknopt dictaat over calculus (methoden uit de analyse), voor een eerste kennismaking met dit klassieke maar krachtige gedeelte van de wiskunde. Aan de orde komen de begrippen limiet, afgeleide en integraal. De toepassingen van deze begrippen op het bepalen van maximale waarden, het berekenen van oppervlakten en volumen en het benaderen van functies en afbeeldingen worden behandeld. Na de ontwikkeling van de theorie voor functies van één variabele, wordt gekeken naar functies van meer variabelen. Ieder hoofdstuk sluit af met een collectie opgaven.

Calculus wordt op verschillende manieren binnen de kunstmatige intelligentie gebruikt. Zo is het volgende type berekening de basis van de *gradient descent method*, die in de kunstmatige intelligentie wordt toegepast in leeralgoritmes. Stel we proberen het doel $y = 5$ te bereiken met de functie $W_1 + 3W_2$, en we zitten in $W_1 = W_2 = 1$; de waarde van de functie is dus 4. De fout $E = \frac{1}{2}(5 - (W_1 + 3W_2))^2$ is dan gelijk aan $E = \frac{1}{2}(5(W_1 + 3W_2)^2 = \frac{1}{2}(54)^2 = \frac{1}{2}$. De waarde van de fout E verandert het sterkst in de richting van de gradiënt (in deze cursus uitgelegd). Dat is hier de richting $(-1 \;\; -3)$. De waarde van E wordt kleiner als we een stapje tegen de richting van de gradiënt in nemen; dus voor een kleine $\alpha > 0$ veranderen we W_1 in $W_1 + \alpha$ en W_2 in $W_2 + 3\alpha$. Zo wordt met een leersnelheid (hier de parameter α) naar een doel (hier $y = 5$) gewerkt.

Ook methoden die gebruikt worden in beeldverwerking en patroonherkenning baseren zich op wiskunde als lineaire algebra en calculus. Calculus is ook nodig om berekeningen in de kansrekening en statistiek uit te kunnen voeren, wat nodig is daar waar met onzekerheden wordt gewerkt.

2 Limieten

Een centrale vraag bij functieonderzoek is hoe functiewaarden variëren als het punt in het bereik variëert. De begrippen limiet en continuïteit staan toe dit te bestuderen. Ook bij afgeleiden en integralen speelt de limiet een belangrijke rol.

2.1 Definities en eigenschappen

Laat f een functie zijn, gedefinieerd op een interval of een vereniging van intervallen. We zeggen dat

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

als voor ieder klein interval I rond L, er een klein interval rond a bestaat waarvan ieder punt door f binnen I wordt afgebeeld. Dus punten in de buurt van a worden door f op punten in de buurt van L afgebeeld. De functie f hoeft niet gedefinieerd te zijn in a zelf.

De functie f heet continu in a als f wel gedefinieerd is in a en $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Als een functie f in elk punt continu is, dan heet f continu. Elementaire functies zoals $x^n, \sin(x), \cos(x), e^x$ zijn continu. Bekende functies zoals $\ln(x), \tan(x)$ zijn niet voor elke waarde van x gedefinieerd, maar zijn continu waar ze gedefinieerd zijn. Functies die zijn opgebouwd uit elementaire functies door middel van optellen, delen, vermenigvuldigen en ook samenstellen (in elkaar invullen, bijvoorbeeld $f(g(x)) = \sin(\tan(x))$ voor $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \tan(x)$), zijn continu waar ze gedefinieerd zijn.

Voorbeeld 2.1 *De functie* $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ *is overal gedefinieerd: de noemer* $1 + x^2$ *is overal positief en in het bijzonder nooit nul. De functie is continu.*

Voorbeeld 2.2 $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.

Voorbeeld 2.3

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} \frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3} = \frac{1}{6}.$$

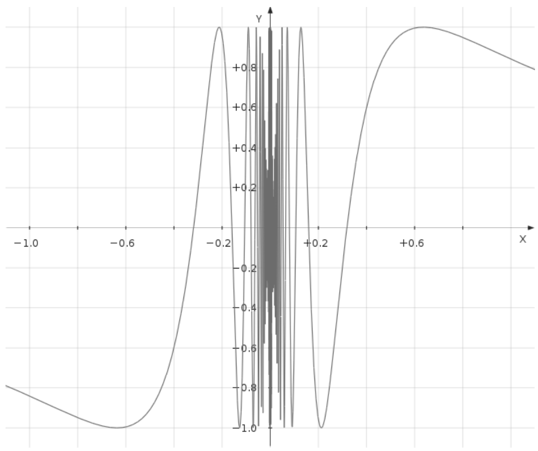
Voorbeeld 2.4 *De limiet* $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ *bestaat niet, want*

$$\sin(1/x_n) = 0 \text{ voor } x_n = 1/(n\pi)$$

en

$$\sin(1/y_n) = 1 \text{ voor } y_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$$

(x_n en y_n zijn punten in de buurt van 0 als n een groot getal is). Zie Figuur 1 voor een afbeelding van de grafiek van $x \mapsto \sin(1/x)$ *en Sectie 3 voor een overzicht van goniometrische functies.*



Figuur 1: Grafiek van $x \mapsto \sin(1/x)$.

Als $\lim_{x\to a} f(x)$ en $\lim_{x\to a} g(x)$ bestaan, dan gelden

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x), \tag{1}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x), \tag{2}$$

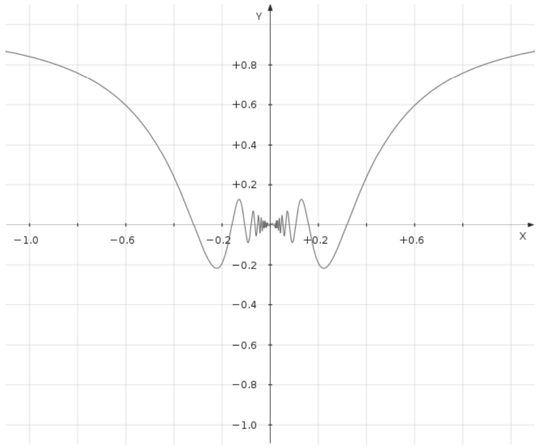
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x). \tag{3}$$

Verder, als $\lim_{x\to a} g(x) = b$ en f is continu in b, dan geldt $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$.

Voorbeeld 2.5 $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^4-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y^2-1} = \frac{1}{2}$, *waar we* x^2 *door* y *vervangen hebben. Vergelijk Voorbeeld 2.2.*

Voorbeeld 2.6 $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$, *want* $-x \leq x\sin(1/x) \leq x$ *en* $\lim_{x\to 0} \pm x = 0$. *Hier wordt de functie ingeklemd tussen twee andere functies waarvan we de limiet eenvoudig kunnen bepalen. Merk op dat de volgende functie continu is:*

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



Figuur 2: Grafiek van $x \mapsto x\sin(1/x)$.

Dit voorbeeld maakt het volgende principe duidelijk: als

$$h^-(x) \leq f(x) \leq h^+(x)$$

en

$$\lim_{x\to a} h^-(x) = \lim_{x\to a} h^+(x),$$

dan is ook

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h^-(x) = \lim_{x\to a} h^+(x).$$

Als bij een limiet alleen punten $x > a$ in beschouwing genomen worden, wordt geschreven $\lim_{x\downarrow a} f(x)$. Analoog schrijven we $\lim_{x\uparrow a} f(x)$ in het geval alleen waarden $x < a$ bekeken worden. Een limiet heet oneindig te zijn, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, als $f(x)$ willekeurig groot wordt voor x in de buurt van a. Dat wil zeggen, voor elk groot getal N is er een klein interval rond a, zodat $f(x) > N$ voor elke x uit dat kleine interval.

Voorbeeld 2.7 *Welke limieten heeft* $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ *bij* $x = -1$ *en* $x = 1$? *Het domein van* g *is* $[-1, 1]$. *We hebben* $\lim_{x\downarrow -1} g(x) = 0$ *en* $\lim_{x\uparrow 1} g(x) = 0$.

Voorbeeld 2.8 $\lim_{x\downarrow 2} \frac{1}{x-2} = \infty$ *en* $\lim_{x\uparrow 2} \frac{1}{x-2} = -\infty$.

Verder kunnen we ook het gedrag van een functie bij het oneindige bekijken. Een uitdrukking $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ betekent dat $f(x)$ ongeveer gelijk is aan L voor grote waarden van x. Ofwel, voor elk klein interval I rond L is er een groot getal M te vinden zodat $f(x)$ in I ligt voor elke $x > M$.

Voorbeeld 2.9 *Er geldt*

$$\lim_{x\to\infty} x/(1+x^2) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+x} = 0,$$

omdat de noemer naar oneindig gaat als $x \to \infty$*. Evenzo geldt dat* $\lim_{x\to-\infty} x/(1+x^2) = 0$*. De noemer is kwadratisch, de teller is lineair. De noemer, van een hogere macht, is daarmee veel groter dan de teller voor grote waarden van* x*.*

Het principe uit dit voorbeeld komt terug in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 2.10

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3-x^2}{x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x^2}-1}{1+\frac{1}{x}} = -1.$$

Hier zijn teller en noemer van de breuk door de hoogst voorkomende macht x^2 *gedeeld. De berekening maakt duidelijk dat alleen de hoogst voorkomende machten bij een limiet naar oneindig van belang zijn voor de waarde van de limiet.*

Er volgen nog enige vergelijkbare voorbeelden.

Voorbeeld 2.11 *Bereken* $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\sin(x)}{2x^3+1}$*. Deel teller en noemer door* x^2*:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\sin(x)}{2x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{2x+\frac{1}{x}} = 0,$$

want de teller blijft tussen -1 en 1 en de noemer gaat naar oneindig.

Voorbeeld 2.12 *Bereken* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *en* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *voor* $f(x) = x/\sqrt{x^2+1}$*. Schrijf*

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{sign(x)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

We hebben gebruikt dat $\sqrt{x^2} = |x|$*, met sign*(x) *wordt het teken van* x *bedoelt. Omdat* $\frac{1}{x^2}$ *naar nul gaat voor* $x \to -\infty$ *en* $x \to \infty$*, geldt*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

en

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1.$$

Voorbeeld 2.13 *Bereken* $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1}$. *Beide termen gaan naar oneindig voor* $x \to \infty$. *Bijvoorbeeld*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-1/x} = \infty.$$

Daarmee is onduidelijk wat het verschil tussen beide termen ongeveer is voor grote waarden van x. *Hiertoe schrijven we de breuken als één breuk door gelijke noemers te maken.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{x^2(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x+1) - x^2(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-1/x^2} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

2.2 Regel van De L'Hôpital

In deze sectie wordt gebruik gemaakt van afgeleide functies, behandeld in Sectie 5.

Als $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ en $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, dan geldt

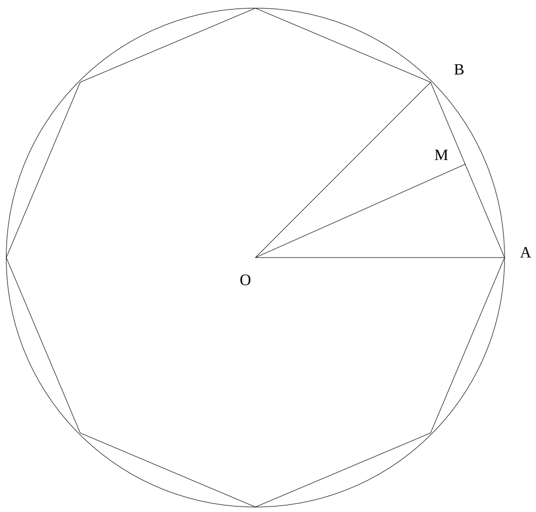
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Hier zijn $f'(x), g'(x)$ de afgeleiden van f respectievelijk g. Bovenstaande formule is de regel van De L'Hôpital. Zij geldt ook als $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ en $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

Voorbeeld 2.14 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$. *Dit is een standaard limiet die betekent dat voor kleine* x *(*x *in de buurt van 0), de sinus goed te benaderen is met de identiteitsfunctie* $x \mapsto x$. *De benadering van* $\sin(x)$ *met* x *wordt heel vaak gebruikt als er sprake is van trillingen met kleine uitwijking. Zie Sectie 3 voor een overzicht van goniometrische functies.*

Voorbeeld 2.15 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)^2} = 1$. *Dus ook* $\tan(x)$ *is voor kleine* x *goed te benaderen met* x.

Voorbeeld 2.16 *Beschouw een cirkel van straal 1. We weten dat de oppervlakte van de ingesloten schijf* π *is. De omtrek van de cirkel is* 2π. *Als we een regelmatig* n*-vlak in de schijf plaatsen met hoekpunten op de cirkel die de rand van de schijf vormt, zie Figuur 3, verwachten we dat de omtrek hiervan naar* 2π *en de oppervlakte hiervan naar* π *convergeert als* n *naar oneindig gaat. De hoek* AOB *is* $2\pi/n$ *radialen. Het punt* M *ligt halverwege het lijnstuk* AB. *De hoeken* AOM *en* MOB *zijn dus* π/n *radialen. We schrijven* $|AB|$ *voor de lengte van het lijnstuk* AB. *Er geldt* $|AB| = 2|AM| = 2\sin(\pi/n)$ *en de oppervlakte van de driehoek* OAB *is* $\frac{1}{2}|AB||OM| = \frac{1}{2}(2\sin(\pi/n))\cos(\pi/n) = \sin(\pi/n)\cos(\pi/n)$. *De omtrek van het regelmatige* n*-vlak is* n *maal* $|AB|$, *dus* $2n\sin(\pi/n)$. *De oppervlakte van het regelmatige* n*-vlak is* n *maal de oppervlakte van de driehoek* OAB, *dus* $n\sin(\pi/n)\cos(\pi/n)$. *In opgave 29 wordt gevraagd limietwaarden te bepalen voor* $n \to \infty$.



Figuur 3: Een regelmatig n-vlak (hier met $n = 8$) in een schijf.

2.3 Oefeningen

1. Waar is $h(x) = \sin(\tan(x))$ gedefinieerd? Schets de grafiek van deze functie.
2. Bereken $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$.
3. Bereken $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2+2x-3}$.
4. Bereken $\lim_{x\to -\infty} \frac{5x^3-x^2+2}{2x^3+x-3}$.
5. Bereken $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.
6. Bereken $\lim_{x\to \infty} \frac{2-x}{1-x}$.
7. Bereken $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{3x^2-1}}{x-1}$.
8. Bereken $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(x)}{x^2-\pi^2}$.
9. Bereken $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\tan(x)}$.
10. Bereken $\lim_{x\to \infty} \frac{x^7-1}{x^6+1}$.
11. Bereken $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x+1} + x$.
12. Bereken $\lim_{x\downarrow 0} |x|/x$ en $\lim_{x\uparrow 0} |x|/x$.
13. Bereken $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+1}{x} - \frac{x^2-1}{x-1}$.
14. Bereken $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x^2-x+3}{3x^2+5}$.
15. Bereken $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{5x+2}{2x^3-1}$.

16. Bereken $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^2+1}$.
17. Bereken $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$.
18. Geef een functie $y = f(x)$ met verticale asymptoten bij $x = 1$ en $x = 3$ en een horizontale asymptoot bij $y = 1$.
19. Geef een functie $y = f(x)$ met een verticale asymptoot bij $x = 1$ en een schuine asymptoot $y = x+1$ voor $x \to \pm\infty$. Dit laatste betekent dat $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (x+1) = 0$.
20. Bereken $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$ door te substitueren $1 + x = t^3$.
21. Bereken $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} - x$.
22. Bereken $\lim_{x\downarrow 5} \ln(x-5)$.
23. Bereken $\lim_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$.
24. Bereken $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)}$. Wat is het verband met de vorige opgave?
25. Bereken $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$.
26. Schets de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x^2}{x-1} - x$.
27. Schets de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x^3}{x(x-1)}$ door horizontale en verticale asymptoten te bepalen.
28. Schets de grafiek van de functie $f(x) = \frac{x^2+1}{x} - \frac{x^2-1}{x-1}$.
29. Werk Voorbeeld 2.16 uit: bepaal de limieten van omtrek en oppervlakte van het regelmatige n-vlak als n naar oneindig gaat.

3 Goniometrische functies

We geven een kort overzicht van goniometrische functies.

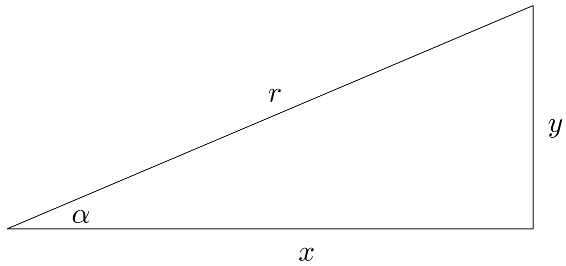
3.1 Definities en eigenschappen

Gegeven is een driehoek als in Figuur 4. De sinus van een hoek α, voor α tussen 0 en $\pi/2$, is gedefinieerd als de lengte y van de overstaande zijde gedeeld door de lengte van de schuine zijde r: $\sin(\alpha) = y/r$. De cosinus van α is gedefinieerd als de lengte van de liggende zijde gedeeld door de schuine zijde: $\cos(\alpha) = x/r$. Dezelfde formules worden gebruikt voor andere waarden van α, waar de schuine zijde van de driehoek de vector (x, y) is en waar de waarden x en y dus negatief kunnen zijn. De sinus functie en de cosinus functie zijn functies gedefinieerd op $\mathbb{R}$ en hebben periode 2π, omdat hoeken modulo 2π gedefinieerd zijn. Er gelden rekenregels

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha), \\ \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha), \\ \cos(\alpha) &= \sin(\pi/2-\alpha). \end{aligned}$$

Met de gegeven definities luidt de stelling van Pythagoras

$$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1.$$



Figuur 4: Goniometrische functies geven een verband tussen een hoek en de lengten van zijden van een driehoek als getekend.

	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Tabel 1: Veel gebruikte waarden van goniometrische functies.

Tenslotte is de tangens van α gelijk aan $\sin(\alpha)/(\cos\alpha)$. Dus $\tan(\alpha) = y/x$.

Tabel 1 somt enige veel gebruikte waarden van goniometrische functies op.

3.2 Inverse functies

Beshouw de cosinus functie op het interval $[0, \pi]$, waar de functie monotoon dalend is. Beperkt tot dit interval bestaat er daarom een inverse, de arccosinus. We noteren deze functie als $x \mapsto \arccos(x)$. Domein en bereik zijn als volgt:

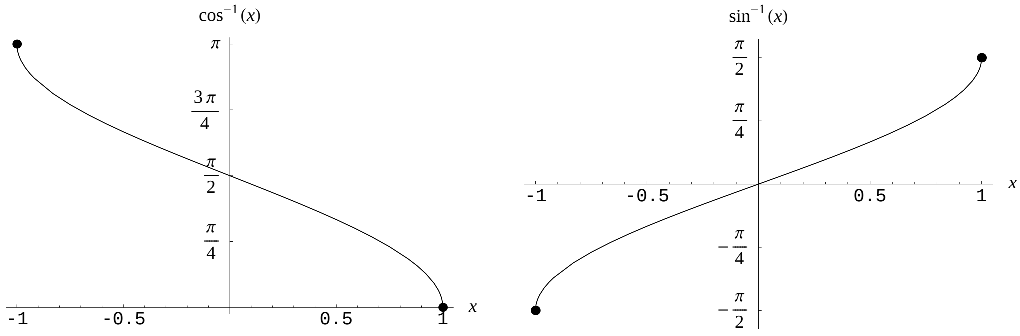
$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

In Figuur 5 is de grafiek getekend. De sinus functie is monotoon stijgend wanneer beschouwd op een interval $[-\pi/2, \pi/2]$. De inverse functie hiervan heet de arcsinus, genoteerd als $x \mapsto \arcsin(x)$. Er geldt

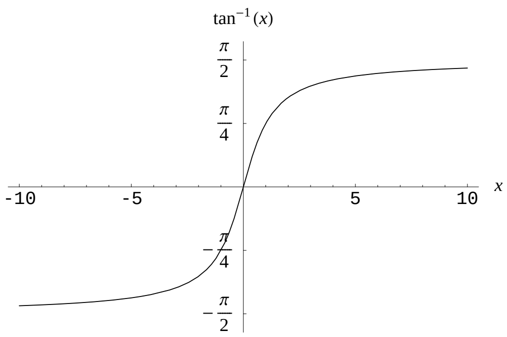
$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2],$$

zie de grafiek in Figuur 4.

Tenslotte is de tangens monotoon op het interval $(-\pi/2, \pi/2)$. Dit interval wordt afgebeeld op $\mathbb{R}$. De inverse functie, die dus de hele lijn $\mathbb{R}$ afbeeldt op het begrensde open interval $(-\pi/2, \pi/2)$, heet de arctangens. We noteren deze functie als $x \mapsto \arctan(x)$. De grafiek is te zien in Figuur 6.



Figuur 5: Grafiek van de arccosinus, links, en de arcsinus, rechts.



Figuur 6: Grafiek van de arctan.

3.3 Oefeningen

1. Schets de grafiek van de functie $f(x) = x^2 \sin(x)$.
2. Schets in één figuur de grafieken van de functies $f(x) = \arctan(x)$ en $g(x) = \arctan(x)\sin(x)$.
3. Schets in één figuur de grafieken van de functies $f(x) = x\arctan(x)$ en $g(x) = x\arctan(x)\sin(x)$.
4. Schets de grafiek van de functie $f(x) = \cos(x)/\sin(x)$. Laat zien dat $f(x) = -\tan(x - \pi/2)$.

4 Exponentiële functies en logaritmen

De exponentiële functie e^x is de enige functie (op vermenigvuldiging met een constante na) die gelijk is aan zijn afgeleide. De (natuurlijke) logaritme is de inverse van de exponentiële functie. In deze sectie worden deze functies preciezer geïntroduceerd. We behandelen ook functies a^x en de inverse daarvan voor $a > 0$. Voor berekeningen is het eigenlijk altijd het handigst om te werken met het getal e als basis (ga na waarom); een macht met een ander basisgetal kan omgeschreven worden tot een e-macht.

4.1 Definities en eigenschappen

We laten zien hoe a^x gedefinieerd wordt, voor positieve getallen a. Als n een positief geheel getal is, wordt a^n verkregen door n kopieën van a met elkaar te vermenigvuldigen. Verder laten we $a^0 = 1$ en $a^{-n} = 1/a^n$. Voor een positief geheel getal q, is $b \mapsto b^q$ stijgend in b. Voor gegeven a bestaat er dus een getal b waarvoor $b^q = a$. We schrijven $a^{1/q} = b$. Voor gehele getallen p en $q > 0$, is nu $a^{p/q} = (a^{1/q})^p$ ook gedefinieerd. Dus voor elke breuk $x = p/q$ is a^x nu gedefinieerd. Voor algemene reële getallen x wordt a^x gedefinieerd door continuïteit; als p/q in de buurt van x ligt, dan ligt a^x in de buurt van $a^{p/q}$. Neem bijvoorbeeld $2^{\sqrt{3}}$. Er geldt $1,73205 < \sqrt{3} < 1,73206$. We zien

$$2^{\frac{17}{10}} < 2^{\frac{173}{100}} < 2^{\frac{1732}{1000}} < 2^{\frac{17320}{10000}} < 2^{\frac{173205}{100000}} < 2^{\sqrt{3}}$$

en ook

$$2^{\sqrt{3}} < 2^{\frac{173206}{100000}} < 2^{\frac{17321}{10000}} < 2^{\frac{1733}{1000}} < 2^{\frac{174}{100}} < 2^{\frac{18}{10}}.$$

Zo wordt $2^{\sqrt{3}}$ ingesloten door al gedefinieerde getallen van de vorm $2^{p/q}$ die $2^{\sqrt{3}}$ steeds beter benaderen.

De definitie van het getal e, die nu volgt, gebruikt afgeleide functies behandeld in Sectie 5. Schrijf $f(x) = a^x$. Dan geldt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x f'(0).$$

Het getal e wordt gedefinieerd als dat getal waarvoor, met $f(x) = e^x$, $f'(0) = 1$.

Voorbeeld 4.1 *Bij de oefeningen wordt gevraagd na te gaan dat de volgende limiet het getal e oplevert:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{4}$$

4.2 Logaritmen

Laat g de inverse afbeelding van f zijn, dat wil zeggen $f(g(x)) = x$ en $g(f(x)) = x$. Omdat $f(x) = a^x$ altijd positief is, is $g(x)$ alleen gedefinieerd voor $x > 0$. We noteren $g(x) = \log^a(x)$. Bovendien schrijven we $\log^e(x) = \ln x$. Er geldt

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a},$$

we kunnen dus een exponentiële functie altijd als een macht van het getal e schrijven.

Hier volgen nog enige nuttige eigenschappen van exponentiële functies en hun inversen, de logaritmen. De eigenschappen zijn allemaal uit de definities af te leiden.

- $a^x a^y = a^{x+y}$

- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\log^a(x^y) = y \log^a(x)$
- $\log^a(xy) = \log^a(x) + \log^a(y)$

Ietwat overvloedig volgt hetzelfde rijtje voor de e-macht en de natuurlijke logaritme.

- $e^x e^y = e^{x+y}$
- $(e^x)^y = e^{xy}$
- $\ln(x^y) = y \ln(x)$
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

4.3 Oefeningen

1. Ga na dat (4) geldt. Hint: schrijf de functie als e-macht.
2. Bereken $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$.
3. Bereken $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$.

5 Afgeleiden

Een afgeleide geeft de mate van verandering van een functie op kleine schaal. Met behulp van een afgeleide kan een functie worden benaderd met een lineaire functie.

5.1 Definities en eigenschappen

Laat f een functie zijn, als in het vorige hoofdstuk. Als de limiet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

bestaat, dan noemen we dit de afgeleide $f'(x)$ in het punt x. We schrijven ook wel $\frac{d}{dx}f(x)$ voor $f'(x)$. De afgeleide geeft de verandering $f(x+h) - f(x)$ van de functiewaarden in verhouding tot $h = (x+h) - x$, in een limiet voor kleine waarden van h.

Als $f'(x)$ bestaat, dan heet f differentieerbaar in x. Als $x \mapsto f'(x)$ een continue functie is, dan heet f continu differentieerbaar.

Uit de definitie vallen de volgende identiteiten te bewijzen,

- Productregel: $\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- Quotiëntregel: $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.
- Kettingregel: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$.

Voorbeeld 5.1 *We laten zien hoe de afgeleide van de functie $f(x) = x^2$ uit de definitie valt af te leiden. Er geldt*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x+h \\ &= 2x \end{aligned}$$

We geven een lijstje van afgeleiden van functies.

- $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ (niet alleen voor gehele getallen n, maar voor alle reële getallen, waar dan $x > 0$ wordt verondersteld)
- $\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2}$ (dit is een speciaal geval van de regel hierboven, met $n = -1$)
- $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (ook dit is een speciaal geval met $n = \frac{1}{2}$)
- $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$
- $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$
- $\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$
- $\frac{d}{dx}\arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (zie Voorbeeld 5.4 voor de afleiding)
- $\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (zie Voorbeeld 5.5 voor de afleiding)

Sectie 5.4 behandelt afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies. Als referentie nemen we hier de lijst op.

- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx}a^x = a^x\ln(a)$
- $\frac{d}{dx}\ln(x) = 1/x$
- $\frac{d}{dx}\log^a(x) = 1/(\ln(a)x)$

5.2 Lineaire benaderingen

Als de functie $f(x)$ continu is in a, dan kunnen we $f(x)$ benaderen met $f(a)$ voor x in de buurt van a. Een betere benadering geeft de definitie van de afgeleide. Schrijf hiervoor

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

en vervang $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ door $f'(a)$. Hierbij maken we slechts een kleine fout als x in de buurt van a is, omdat $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

Hoe goed is de benadering van $f(x)$ door $P(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$? Stel dat we f op een interval $[a - r, a + r]$ willen benaderen met P. Dan geldt dat

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{2}C(x - a)^2,$$

voor $C = \max_{a-r\leq x\leq a+r} |f''(x)|$ (het maximum van de absolute waarde van de 2-de afgeleide f'' op het interval waarop we f benaderen met P). De grafiek van P (een lijn) heet de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$.

Voorbeeld 5.2 *Geef de vergelijking $y = ax + b$ van de lijn die raakt aan de kromme $y = \frac{x}{x^2-2}$ in het punt waar $x = -2$. De functie $f(x) = \frac{x}{x^2-2}$ heeft als afgeleide $f'(x) = \frac{(x^2-2)-x(2x)}{(x^2-2)^2} = \frac{-x^2-2}{(x^2-2)^2}$. In $x = -2$ geldt $f'(-2) = \frac{-6}{4}$. Dus $a = -6/4 = -3/2$. De lijn moet door het punt $(-2, \frac{-2}{2}) = (-2, -1)$ gaan. In de vergelijking $y = ax + b$ met $a = -3/2$ geeft dit $-1 = -\frac{3}{2}(-2) + b$. Dus $b = -4$ en de lijn is $y = \frac{-3}{2}x - 4$.*

Betere, hogere orde benaderingen, worden behandeld in Sectie 5.5.

5.3 Impliciet differentiëren

Met een reeks van voorbeelden wordt duidelijk gemaakt hoe het differentiëren van een vergelijking, waarmee een functie impliciet gedefinieerd wordt, helpt om de afgeleide te berekenen.

Voorbeeld 5.3 *Een ladder staat tegen een muur en begint naar beneden te schuiven. Op de grond staat de ladder op $x(t)$ meter van de muur, op tijdstip t. Het steunpunt tegen de muur bevindt zich op hoogte $y(t)$ op tijdstip t. De ladder is 5 meter lang, en op tijdstip $t = 0$ geldt $x(0) = 3$ en $y(0) = 4$. Merk op dat $x(t)^2 + y(t)^2 = 25$ en daarom $y(t) = \sqrt{25 - x(t)^2}$. Nu schuift $x(t)$ met een snelheid van, zeg, 1 meter per tijdseenheid van de muur weg:*

$$x'(t) = 1.$$

Differentiëren we de vergelijking $x(t)^2+y(t)^2 = 25$ naar t, dan krijgen we $2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t) = 0$. Voor $t = 0$ staat hier $2x(0)x'(0) + 2y(0)y'(0) = 6 + 8y'(0) = 0$, zodat $y'(0) = -3/4$. We kunnen ook oplossen

$$y'(t) = -x(t)x'(t)/y(t) = -x(t)x'(t)/\sqrt{25 - x(t)^2} = -(3 + t)/\sqrt{25 - (3 + t)^2}.$$

Met opnieuw, op tijdstip $t = 0$, $y'(0) = -3/4$ meter per tijdseenheid.

Voorbeeld 5.4 *Laat θ en u gerelateerd zijn door*

$$\cos(\theta) = u,$$

ofwel $\theta = \arccos(u)$ (we nemen θ in het interval $[0, \pi]$, zie Figuur 5). Dit definieert θ als functie van u; we schrijven $\theta(u)$. We willen de afgeleide $\theta'(u)$ van $\theta(u)$ (dus de afgeleide van de inverse van de cos functie) bepalen. Differentieer linker en rechterkant van de gelijkheid $\cos(\theta(u)) = u$ naar u. Dit geeft $-\sin(\theta(u))\theta'(u) = 1$. Dus

$$\theta'(u) = \frac{-1}{\sin(\theta(u))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos(\theta(u))^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Bij het tweede gelijkheidsteken is gebruikt dat $\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 = 1$, zodat $\sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos(\theta)^2}$ als $\sin(\theta) \geq 0$.

Voorbeeld 5.5 *Op dezelfde manier als in Voorbeeld 5.4 berekenen we de afgeleide van $x \mapsto \arctan(x)$ (de inverse van de tangens) met de kettingregel uit de definitie als inverse. We hebben $\theta = \arctan(u)$ en dus $\tan(\theta) = u$. We nemen hier $\theta \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, zie Figuur 6. Door $\tan(\theta) = u$ met $\theta = \theta(u)$ naar u te differentiëren, krijgen we $\frac{1}{\cos(\theta)^2}\theta'(u) = 1$, zodat*

$$\theta'(u) = \cos(\theta)^2.$$

We moeten nu $\cos(\theta)^2$ in termen van u zien te schrijven, om $\theta'(u)$ als functie van u te krijgen. Merk hiervoor op dat

$$\tan(\theta)^2 = \frac{\sin(\theta)^2}{\cos(\theta)^2} = \frac{1 - \cos(\theta)^2}{\cos(\theta)^2} = \frac{1}{\cos(\theta)^2} - 1,$$

zodat $\cos(\theta)^2 = \frac{1}{1+\tan(\theta)^2}$. Omdat $\tan(\theta) = u$, volgt hieruit dat

$$\theta'(u) = \frac{1}{1 + u^2}.$$

5.4 Afgeleiden van exponentiële functies en logaritmen

We hebben al gezien dat $\frac{d}{dx}e^x = e^x$. Merk op dat

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

De afgeleide van de logaritme $g(x) = \log^a(x)$ kan bepaald worden uit de definitie $x = a^{g(x)}$ (impliciet differentiëren). Door linker en rechterkant van de gelijkheid te differentiëren naar x, zien we (gebruik makend van de kettingregel) dat $1 = a^{g(x)}g'(x) \ln a = xg'(x) \ln a$ en dus dat

$$g'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

In het bijzonder geldt $\frac{d}{dx} \ln x = 1/x$.

Voorbeeld 5.6 *Bereken de afgeleide van* $f(x) = x^{\sqrt{x}}$*. Schrijf* $f(x) = e^{\sqrt{x}\ln x}$*. De kettingregel geeft* $f'(x) = e^{\sqrt{x}\ln x}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}\ln x) = x^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}\ln x)$*. De productregel geeft* $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}/x$*. Dus*

$$f'(x) = x^{\sqrt{x}}\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}.$$

5.5 Taylor reeksen

Een functie is lokaal (in de buurt van een punt a) te benaderen met polynomen. Uiteraard is een continue functie f ongeveer gelijk aan $f(a)$ als x in de buurt van a ligt. Een lineaire benadering wordt verkregen door $f(x)$ te benaderen met $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$. Dit valt uit te breiden naar benaderingen met polynomen.

Schrijf $\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)$ voor de n-de afgeleide van f in het punt x (we gaan ervanuit dat die bestaat). Definieer het polynoom

$$P_n(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\left(\frac{d}{dx}\right)^i f(a)(x-a)^i$$

Hier is $i!$ (i faculteit) gelijk aan het product van de gehele getallen $1, 2, \ldots, i$. We zien dat $P_n(a) = f(a)$. Een directe berekening laat zien dat

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^i P_n(a) = \left(\frac{d}{dx}\right)^i f(a)$$

voor $1 \leq i \leq n$. Dus de afgeleiden van f in a en van P_n in a, tot en met de n-de afgeleide, zijn aan elkaar gelijk. Het polynoom P_n geeft de n-de orde Taylor benadering van f, rond het punt a.

Voorbeeld 5.7 *Bereken de Taylor ontwikkeling van* $f(x) = \sin(x)$ *tot en met orde drie rond* $x = 0$*. Er geldt* $f'(x) = \cos(x)$*,* $f''(x) = \sin(x)$ *en* $f'''(x) = -\cos(x)$*. In het punt* $x = 0$ *geldt* $f(0) = 0$*,* $f'(0) = 1$*,* $f''(0) = 0$*,* $f'''(0) = -1$*. Ingevuld in de formule voor de Taylor benadering tot en met orde drie levert dit*

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 = x - \frac{1}{6}x^3.$$

Voorbeeld 5.8 *Bereken de Taylor ontwikkeling van* $f(x) = \sin(x)/x$ *tot en met orde twee rond* $x = 0$*. Dit is eenvoudig: neem de Taylorreeks van orde drie (waarom?) voor de sinus en deel de termen door* x*:*

$$\frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right) = 1 - \frac{1}{6}x^2.$$

Hoe goed is deze benadering? Stel dat we f op een interval $[a-r, a+r]$ willen benaderen met P_n. Dan geldt dat

$$|f(x) - P_n(x)| \leq C_{n+1}\frac{1}{(n+1)!}|x-a|^{n+1},$$

voor $C_{n+1} = \max_{a-r\leq x\leq a+r}\left|\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} f(x)\right|$ (het maximum van de absolute waarde van de $n+1$-ste afgeleide van f op het interval waarop we f benaderen met P_n).

Dus voor $x \in [a-r, a+r]$ geldt $|f(x) - f(a)| \leq C_1|x-a|$ met $C_1 = \max_{a-r \leq x \leq a+r} |f'(x)|$. En, zoals we al gezien hebben, de lineaire benadering $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ verschilt hooguit $\frac{1}{2}C_2(x-a)^2$ van de functie f zelf, op het interval $[a-r, a+r]$.

Voorbeeld 5.9 *Een directe berekening laat zien dat de zesde orde Taylor benadering van* $f(x) = \sin(x)$ *rond het punt 0, gegeven wordt door* $P(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$. *De absolute waarde van de zevende afgeleide* $\left(\frac{d}{dx}\right)^7 \sin(x) = -\cos(x)$ *is maximaal 1. Dus*

$$|\sin(x) - x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5| \leq \frac{1}{7!}|x|^7.$$

Er geldt dat $\frac{1}{7!}|x|^7 < 1/10000$ *voor* $|x| < \sqrt[7]{7!/10000} \approx 0.821$. *Dus op het interval* $[-0.8, 0.8]$ *wordt de sinus functie tot op een fout van* $1/10000$ *benaderd door het polynoom* $P(x)$.

Voorbeeld 5.10 *Omdat de afgeleide van* $f(x) = e^x$ *de functie* f *zelf is, geldt dat* $\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(0) = 1$ *voor elk positief geheel getal* n. *De Taylor reeks ontwikkeling van de e-macht tot en met orde* n *is daarom*

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Men kan laten zien dat, voor elk getal x, *de limiet van bovenstaande formule voor* $n \to \infty$ *bestaat. Deze limiet wordt wel gebruikt als definitie van* e^x.

5.6 Extreme waarden

Het vorige hoofdstuk liet al zien dat het vinden van maximale en minimale waarden van functies van belang is voor het bepalen van foutafschattingen. In deze sectie worden meer toepassingen beschreven, en wordt uitgelegd hoe deze extreme waarden te bepalen.

Een functie f heeft een absoluut maximum in c als $f(c) \geq f(x)$ voor elk punt x. Een functie f heeft een lokaal maximum in c als er een interval rond c is zodat $f(c) \geq f(x)$ voor elk punt x uit dat interval. Analoge definities gelden voor een absoluut en lokaal minimum. Een extremum is een maximum of een minimum.

De volgende stelling maakt het mogelijk een maximum of een minimum te vinden. Laat f een continu differentieerbare functie zijn. Als een f een lokaal extremum heeft in c, dan geldt $f'(c) = 0$. Dit is een nodige voorwaarde voor een extremum, maar niet voldoende. Dat wil zeggen, $f'(c)$ kan 0 zijn, terwijl f in c geen extremum heeft.

Als $f'(c) = 0$ en $f''(c) > 0$, dan is c een lokaal minimum.

Als $f'(c) = 0$ en $f''(c) < 0$, dan is c een lokaal maximum.

Voorbeelden om bovenstaande mee te vergelijken zijn

$f(x) = x^2$. Hier geldt $f'(0) = 0$ en $f''(0) = 2$ is positief. De functie f bezit een (lokaal en globaal) minimum in 0 met waarde 0.

$f(x) = -x^2$. Hier geldt $f'(0) = 0$ en $f''(0) = -2$ is negatief. De functie f bezit een (lokaal en globaal) maximum in 0 met waarde 0.

$f(x) = x^3$. Hier geldt $f'(0) = 0$ en $f''(0) = 0$. Het punt 0 is minimum noch maximum.

$f(x) = x^4$. Hier geldt $f'(0) = 0$ en $f''(0) = 0$. Hier is 0 wel een (lokaal en globaal) minimum, hoewel dit niet volgt uit de waarde van de tweede afgeleide.

Voorbeeld 5.11 *In het volgende rekenvoorbeeld vinden we de afmetingen van een blikje met een inhoud van 1 liter, zodat de oppervlakte van het blikje (dat wil zeggen, de hoeveelheid materiaal om het blikje te maken) minimaal is. De afmetingen van een blikje worden gegeven door een straal* r *centimeter en een hoogte* h *centimeter. Voor de inhoud* I *geldt* $I = \pi r^2 h = 1000$ *kubieke centimeter. De oppervlakte* A *van bodem, deksel en wand samen is gelijk aan* $2\pi r^2 + 2\pi rh$ *vierkante centimeter. De formule voor* I *laat toe om* h *als functie van* r *te bepalen, namelijk* $h = 1000/(\pi r^2)$*. Dit invullend in de formule voor* A *geeft*

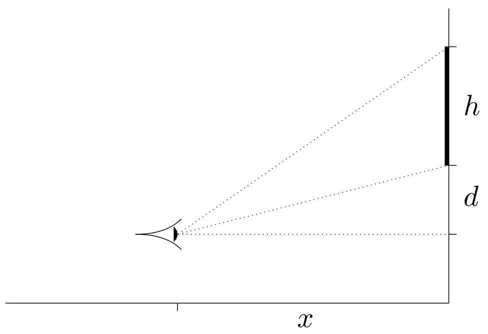
$$A = 2\pi r^2 + 2000/r,$$

alleen nog van r *afhangend. We kunnen dus* $A(r)$ *voor de oppervlakte schrijven. Om hiervan een minimum te vinden, berekenen we*

$$A'(r) = 4\pi r - 2000/r^2.$$

Een simpele berekening laat zien dat $A'(r) = 0$ *als* $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ *centimeter. Een functieonderzoek laat zien dat* A *grotere waarden aanneemt in andere punten, zodat* A *een minimum heeft in* $r = \sqrt[3]{500/\pi}$*.*

Voorbeeld 5.12 *Een schilderij met een hoogte van* h *meter hangt aan een muur. De onderkant van het schilderij hangt op* d *meter boven het oog van de waarnemer. Op welke afstand van het schilderij moet een waarnemer staan om het schilderij onder een zo groot mogelijke hoek waar te nemen?*



Figuur 7: Een waarnemer wil een schilderij, waar hij van onder tegenaan kijkt, onder een zo groot mogelijke hoek zien.

Noem x *de afstand van de waarnemer tot de muur. Trek lijnen van de waarnemer naar boven- en onderkant van het schilderij. Deze lijnen maken hoeken,* θ_b *en* θ_o *respectievelijk met een horizontaal. Er geldt*

$$\begin{aligned} \tan(\theta_o) &= d/x, \\ \tan(\theta_b) &= (h+d)/x. \end{aligned}$$

Dus de hoek θ waarmee het schilderij wordt waargenomen, $\theta = \theta_b - \theta_o$, is gegeven door

$$\theta(x) = \arctan\left(\frac{h+d}{x}\right) - \arctan\left(\frac{d}{x}\right).$$

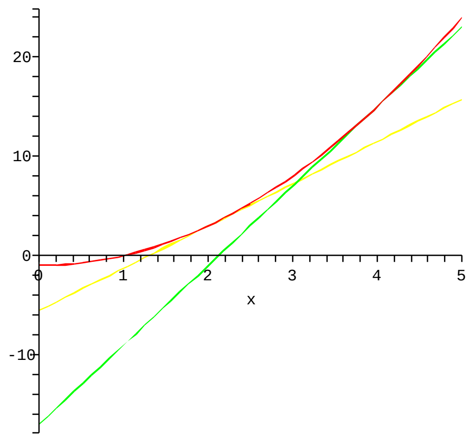
Differentiëren geeft

$$\begin{aligned}
\theta'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{h+d}{x}\right)^2}\frac{-(h+d)}{x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{d}{x}\right)^2}\frac{-d}{x^2} \\
&= \frac{-(h+d)}{x^2+(h+d)^2} + \frac{d}{x^2+d^2} \\
&= \frac{-(h+d)(x^2+d^2)+d(x^2+(h+d)^2)}{(x^2+(h+d)^2)(x^2+d^2)},
\end{aligned}$$

zodat $\theta'(x) = 0$ als $-(h+d)(x^2+d^2)+d(x^2+(h+d)^2) = 0$. Dit levert $x^2 = d(h+d)$, zodat $x = \sqrt{d(h+d)}$. Een tekenschema laat zien dat dit een maximum is voor θ.

5.7 Newton's methode

De methode van Newton is een veel gebruikte methode om numeriek benaderingen te krijgen voor oplossingen van vergelijkingen. Beschouw een vergelijking $f(x) = 0$, waar f een gegeven functie is en x moet worden opgelost. Neem aan dat $\bar{x}$ een nulpunt van f is; $f(\bar{x}) = 0$. Het Newton algoritme, dat we hieronder beschrijven, werkt onder de voorwaarde dat $f'(\bar{x}) \neq 0$.



Figuur 8: Bij Newton's methode worden lineaire benaderingen toegepast om telkens betere benaderingen van een nulpunt te krijgen.

Laat x_1 een punt zijn en beschouw de functie $h(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$. De grafiek van h is een rechte lijn, namelijk de raaklijn aan de grafiek van f in het punt x_1. De functie h heeft een nulpunt $h(x_2) = 0$ in het punt

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Dit procedé herhalend laten we

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

voor elk positief geheel getal i. Dit levert een rij punten x_i. Als $f'(\bar{x}) \neq 0$ en x_1 is in de buurt van $\bar{x}$, dan geldt

$$\lim_{i \to \infty} x_i = \bar{x}.$$

Dat wil zeggen, de punten x_i convergeren naar het nulpunt $\bar{x}$.

Voorbeeld 5.13 *De koopprijs van een auto is 18000 euro. De auto wordt afbetaald in 60 maandelijkse termijnen van 375 euro. In totaal wordt dus 22500 euro betaald. Wat is de berekende rente? Als* $100x$ *de rente is in procenten, dan geldt*

$$(\cdots((18000(1+x) - 375)(1+x) - 375)(1+x) - \cdots - 375) - 375 = 0,$$

waar in totaal 60 maal 375 euro wordt afgetrokken. Enige manipulatie geeft dat

$$\begin{aligned} 18000 &= 375\left(\frac{1}{1+x} + \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{1+x}\right)^{60}\right) \\ &= 375\frac{\frac{1}{1+x} - \left(\frac{1}{1+x}\right)^{61}}{1 - \frac{1}{1+x}} \\ &= 375\frac{1}{x}\left(1 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^{60}\right). \end{aligned}$$

Hier is gebruik gemaakt van de identiteit $a + a^2 + \cdots + a^n = (a - a^{n+1})/(1-a)$ *met* $n = 60$ *en* $a = 1/(1+x)$. *Nog enige manipulatie geeft de volgende vergelijking voor* x*:*

$$\frac{18000}{375}x(1+x)^{60} - (1+x)^{60} + 1 = 0.$$

We zoeken het nulpunt van de functie gegeven door de linkerkant van bovenstaande vergelijking. Deze vergelijking is niet expliciet op te lossen. Maar Newton's methode kan een benadering van het nulpunt geven. Er blijkt dat $x \approx 0.0076$ *(de berekende rente is dus ongeveer* 0.76%*).*

5.8 Oefeningen

1. Bereken de afgeleide van $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ met de quotiënt regel.
2. Bereken de afgeleide van $\frac{x^2-2\sqrt{x}}{x}$.
3. Bereken de afgeleide van $f(x) = x\arctan(4x)$.
4. Bereken de afgeleide van $f(x) = \arctan(\arcsin(\sqrt{x}))$.
5. Bereken de afgeleide van $f(x) = \sqrt{x} + 1/\sqrt[3]{x^4}$.
6. Bereken de afgeleide van $f(x) = \sin(\tan(\sqrt{1+x^3}))$.
7. Bereken de afgeleide van $f(x) = 4x^{1/2} - 5/x$.
8. Bereken de afgeleide van $f(x) = x^{45} - x^{-45}$.
9. Bereken de afgeleide van $f(x) = (1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)$.
10. Bereken de afgeleide van $f(x) = (x^2+4)(\sqrt{x}+1)(5x^{2/3}-2)$.
11. Bereken de afgeleide van $f(x) = \sin(\cos(\tan(x)))$.
12. Bereken de afgeleide van de arcsinus (de inverse van de sinus op $[-\pi/2, \pi/2]$) op de manier van Voorbeeld 5.4. Zie Figuur 5 voor de grafiek van $x \mapsto \arcsin(x)$.
13. Waar is de functie $h(x) = |x^2 + 3x + 2|$ niet differentieerbaar?
14. Bereken de tweede afgeleide $f''(x)$ van $f(x) = x\cos(x)$.
15. Bereken de tweede afgeleide $f''(x)$ van $f(x) = \sin(x^2)$.
16. Geef de vergelijking $y = ax + b$ van de lijn die raakt aan de kromme $y = 5 + 4x - x^2$ in het punt waar $x = 2$.
17. Geef de vergelijking $y = ax + b$ van de lijn die raakt aan de kromme $y = \sqrt{x+6}$ in het punt $(3, 3)$.
18. Geef de vergelijking $y = ax + b$ van de lijn die raakt aan de kromme $y = \frac{2}{x^2+x}$ in het punt waar $x = p$.
19. Geef de vergelijking $y = ax + b$ van de lijn die raakt aan de grafiek van $x \mapsto 1 - x^2$ in het punt $(-1, 0)$.
20. Voor welke waarden van x heeft de grafiek van $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 87$ een horizontale raaklijn?
21. Er zijn twee lijnen die door het punt $(1, -3)$ gaan en die raken aan de kromme $y = x^2$. Vind de vergelijkigen van deze lijnen.
22. Laat zien dat er twee lijnen bestaan die zowel raken aan de kromme $y = x^2$ als door het punt (a, b) gaan, met $b < a^2$. Ga na wat er gebeurt als $b = a^2$ of $b > a^2$.
23. Vind de punten op de kromme $y = x^3 - x^2 - x + 1$ waar de raaklijn horizontaal is.
24. Laat zien dat de kromme $y = 6x^3 + 5x - 3$ geen raaklijn met richtingscoefficient 4 heeft.
25. Vind de punten op de ellips $x^2 + 2y^2 = 1$ waar de raaklijn afgeleide 1 heeft.
26. Vind een vergelijking voor de raaklijn aan de kromme $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$ in het punt $(x, y) = (4, 1)$.
27. Geef de vergelijking van de lijn die loodrecht staat op de raaklijn aan $y = \sin(x)$ in $(\pi, 0)$.
28. Geef de vergelijking van de lijn die loodrecht staat op de raaklijn aan $y = \tan(2x)$ in $(0, 0)$.

29. Beschouw twee lijnen l_1 en l_2 in het vlak, waar l_1 door de punten $(0, 1)$ en $(x, 0)$ gaat en l_2 door de punten $(0, 1)$ en $(3x, 0)$. Hier is $x > 0$. Laat θ de hoek tussen l_1 en l_2 zijn. Voor welke x is θ maximaal?

30. Een hockey team speelt in een stadion met een capaciteit voor 15000 toeschouwers. Met een toegangsprijs van 12 euro, komen er gemiddeld 11000 toeschouwers. Een marktonderzoek geeft aan dat voor iedere euro prijsvermindering, de gemiddelde bezoekersaantallen met 1000 mensen toenemen. Bij welke toegangsprijs is de omzet maximaal?

31. Bereken de Taylor benadering van orde n voor $x \mapsto 1/(1 + x^2)$, rond $x = 0$.

32. Geef de Taylor benadering van de cosinus functie tot en met termen van orde 5. Geef een interval $(-\delta, \delta)$ waarop de fout, dat wil zeggen het verschil tussen de cosinus en haar benadering, hooguit 1 procent bedraagt.

33. Bereken de afgeleide van $f(x) = \ln |x|$.

34. Bereken de afgeleide van $f(x) = \sqrt{x} - 2e^x$.

35. Bereken $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$.

36. Bereken $\lim_{x\downarrow 5} \ln(x - 5)$.

37. Bereken de afgeleide van $f(x) = xe^{-1/x}$.

38. Bereken de afgeleide van $f(x) = \ln \left|\frac{x^2-4}{2x+5}\right|$.

39. Zij $f(x) = g(e^x)$. Vind de afgeleide van f in termen van de afgeleide van g.

40. Op welk interval is de functie $f(x) = 1 + 2e^x - 3x$ stijgend?

41. Bereken de Taylor benadering van orde n voor $x \mapsto e^x$, rond $x = 0$.

42. De functie $f(x) = 1/(1 + e^{-x})$ komt voor als activatiefunctie in de theorie van neurale netwerken. Bereken de limieten $\lim_{x\to\infty} f(x)$ en $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Schets de grafiek van f. Bereken de afgeleide $f'(x)$. Bewijs het volgende verband tussen f en f': $f'(x) = f(x)(1 - f(x))$.

43. Met $f(x) = 1/(1 + e^{-x})$ als in de vorige opgave, beschouw $g(x) = 2f(x) - 1$. Bereken de limieten $\lim_{x\to\infty} g(x)$ en $\lim_{x\to-\infty} g(x)$. Schets de grafiek van g. Bereken de afgeleide $g'(x)$ en geef een vergelijking die g en g' met elkaar relateert.

44. Bediscussieer de werking van Newton's algoritme om de nulpunten te vinden van $f(x) = 4x(1 - x)$. Doe dit aan de hand van de volgende vragen.

    (a) Wat zijn de nulpunten van f?

    (b) Bepaal een expliciete uitdrukking voor de Newton iteratie. Voor welke x_0 is de Newton iteratie gedefinieerd?

    (c) Ga voor elk van de nulpunten van f na voor welke beginwaarden x_0 voor het Newton algoritme dit nulpunt gevonden word.

6 Integreren

Integreren is een limietproces waarbij vele kleine getallen bij elkaar worden opgeteld. Op deze manier worden oppervlakten uitgerekend. De hoofdstelling van de analyse geeft een verband met differentiëren.

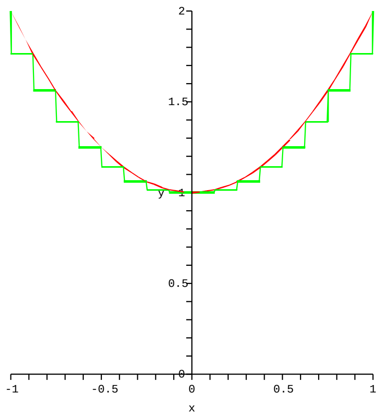
6.1 Definities en eigenschappen

Beschouw een continue functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Neem aan dat $f(x) \geq 0$ voor $x \in [a,b]$. De oppervlakte van het gebied tussen de x-as, de lijnen $x = a$, $x = b$, en de grafiek van f wordt als volgt gedefinieerd. Verdeel het interval $[a,b]$ in n kleine intervallen $I_1, \ldots, I_n$ ter lengte $\Delta x = (b-a)/n$. Kies punten x_i in het i-de interval $I_i = [a+(i-1)\Delta x, a+i\Delta x]$. We kunnen uitrekenen de som $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, de gemiddelde waarde van f over de punten x_i vermenigvuldigd met de lengte van het interval $[a,b]$. Men kan bewijzen dat de limiet $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ bestaat. Definieer de integraal van f over het interval $[a,b]$ door

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Deze definitie passen we toe op alle continue functies, niet alleen positieve functies. Uit de definitie halen we een aantal eigenschappen van integralen van continue functies.

- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.
- $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
- Voor $c \in (a,b)$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.



Figuur 9: De oppervlakte onder de grafiek van een functie wordt benadert met de oppervlakte onder de grafiek van een stuksgewijs constante functie.

De hoofdstelling van de analyse geeft een aanpak om integralen uit te rekenen. De hoofdstelling van de analyse zegt het volgende. Schrijf $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ (merk op dat $g(a) = 0$). Dan geldt

$$g'(x) = f(x).$$

Dat dit waar is, wordt aannemelijk gemaakt door uit te rekenen

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Omdat f continu is, is voor kleine waarden van h, de waarde $f(t)$ vrijwel gelijk aan $f(x)$ voor alle t in het interval $[x, x+h]$. De integraal in het rechter lid is daarmee bijna gelijk aan $f(x)h$, de waarde $f(x)$ vermenigvuldigt met de lengte h van het interval $[x, x+h]$. Het rechterlid convergeert naar $\frac{1}{h}hf(x) = f(x)$ als h naar 0 gaat.

Voorbeeld 6.1 *De definities maken ook duidelijk dat de gemiddelde waarde van een functie f op een interval $[a, b]$, gedefinieerd wordt als $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.*

Voorbeeld 6.2 *Een auto die met een snelheid van 72 kilometer per uur rijdt, remt met een vertraging van $5m/s^2$. In meters per seconde, is de startsnelheid van de auto $20m/s$. De snelheid van de auto is gegeven door $v(t) = 20 - 5tm/s$; na 4 seconden staat de auto stil. De afgelegde remweg is gelijk aan $\int_0^4 v(t)dt$. Het is eenvoudig in te zien dat deze oppervlakte gelijk is aan de helft van $\int_0^4 20dt$, ofwel 40 meter.*

6.2 Primitieve functies

Als F een functie is met $F'(x) = f(x)$, dan heet F een primitieve (of primitieve functie). De hoofdstelling van de analyse geeft

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b,$$

waar $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$. Dus

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Merk op dat als F een primitieve van f is, dat dan ook $x \mapsto F(x) + c$ voor elke constante c een primitieve van f is. Voor de waarde van de integraal maakt dat niet uit. We schrijven $\int f(x)dx = F(x)$ (of $\int f(x)dx = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$).

Hieronder volgt een rijtje primitieve functies:

- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ als $n \neq -1$,
- $\int 1/xdx = \ln|x|$,
- $\int \sin(x)dx = -\cos(x)$,
- $\int \cos(x)dx = \sin(x)$,
- $\int e^x dx = e^x$,
- $\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(x)$,
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x)$,

6.3 Substitutie

Deze sectie en de twee hierop volgende secties geven drie methoden om primitieve functies te vinden. De eerste twee methoden, substitutie en partieel integreren, zijn algemene methoden en zijn consequenties van de kettingregel en de productregel respectievelijk. De derde methode, breuksplitsen, maakt het mogelijk primitieve functies te vinden voor functies die te schrijven zijn als een breuk van twee polynomen ('rationale functies').

De kettingregel geeft $\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x)$. Dus geldt

$$\int_a^b F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x))|_a^b .$$

De rechterkant is ook gelijk aan $F(u)|_{g(a)}^{g(b)}$, zodat

$$\int_a^b F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x))|_a^b = F(u)|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} F'(u)du.$$

In wezen hebben we hier een substitutie uitgevoerd: $g(x)$ is vervangen door u, $g'(x)dx$ door du en het interval $[a, b]$ door $[g(a), g(b)]$.

Dergelijke substituties kunnen integralen vereenvoudigen, zoals de volgende voorbeelden aantonen.

Voorbeeld 6.3 *Beschouw $\int 2x\sqrt{1+x^2}dx$. Laat $u = 1 + x^2$, het argument van de wortel. Dan geldt $du = 2xdx$ en*

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx = \int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u\sqrt{u} = \frac{2}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2}.$$

Voorbeeld 6.4 *Hetzelfde voorbeeld als boven, maar nu wordt gevraagd de oppervlakte $\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}dx$ uit te rekenen. Eén manier om dit te doen is door gebruik te maken van de boven berekende primitieve:*

$$\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{2}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}2\sqrt{2} - \frac{2}{3}.$$

Voorbeeld 6.5 *Wat in het voorbeeld hierboven ook kan, is meteen in de substitutie uit te rekenen wat het integratieinterval is in de nieuwe variable $u = 1 + x^2$. Als $x = 0$, dan is $u = 1$. En als $x = 1$, dan is $u = 2$. Dus*

$$\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}dx = \int_1^2 \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u\sqrt{u}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}2\sqrt{2} - \frac{2}{3},$$

uiteraard hetzelfde antwoord.

Voorbeeld 6.6 *Bereken $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)dx$. Laat $u = x^2$. Dan $du = 2xdx$. Als $x = 0$, dan $u = 0$. Als $x = \sqrt{\pi}$, dan $u = \pi$. Dus*

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin(u)du = -\frac{1}{2}\cos(u)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}(\cos(\pi) - \cos(0)) = 1.$$

Voorbeeld 6.7 *Bereken de oppervlakte A van een schijf met straal 1. De schijf wordt gegeven door $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$, dus $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ met $-1 \leq x \leq 1$. Er volgt dat*

$$A = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx.$$

Substitueer $x = \cos(\theta)$ met $0 \leq \theta \leq \pi$. (Deze substitutie heeft een meetkundige achtergrond: een vector (x, y) op de eenheidscirkel wordt bepaald door de hoek θ met de x-as; er geldt $(x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$.) Merk op dat $x = -1$ correspondeert met $\theta = \pi$ en $x = 1$ met $\theta = 0$. Bereken $dx = -\sin(\theta)d\theta$. Omdat $\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 = 1$ geldt $\sin(\theta) = \sqrt{1-\cos(\theta)^2}$ (we moeten de positieve wortel hebben, omdat $\sin(\theta)$ positief is voor $\theta \in (0, \pi)$). Dus

$$A = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = 2\int_{\pi}^{0} -\sin(\theta)^2 d\theta = \int_{\pi}^{0} \cos(2\theta) - 1 d\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta) - \theta\Big|_{\pi}^{0} = \pi.$$

6.4 Partieel integreren

De productregel laat zien dat

$$\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx = \int \frac{d}{dx}(f(x)g(x))dx = f(x)g(x).$$

Door een van de twee producten links naar de rechterkant te halen, ontstaat hieruit de formule van partieel integreren:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Voorbeeld 6.8

$$\int x\sin(x)dx = x(-\cos(x)) - \int 1(-\cos(x))dx = -x\cos(x) + \sin(x).$$

waar we partieel geïntegreerd hebben met de keuze $f'(x) = \sin(x)$ en $g(x) = x$.

Voorbeeld 6.9 *Bereken $\int_0^1 x^2\cos(x)dx$. Partieel integreren met de keuze $f'(x) = \cos(x)$ en $g(x) = x^2$, geeft*

$$\int_0^{\pi/2} x^2\cos(x)dx = \frac{1}{3}\sin(x)x^3\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\sin(x)xdx.$$

De integraal aan de rechterkant valt ook met partieel integreren uit te rekenen:

$$\int_0^{\pi/2} 2\sin(x)xdx = -2\cos(x)x|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -2\cos(x)dx = -2\cos(x)x|_0^{\pi/2} + 2\sin(x)|_0^{\pi/2},$$

nu met de keuze $f'(x) = \sin(x)$ en $g(x) = 2x$. Samenvattend,

$$\int_0^{\pi/2} x^2\cos(x)dx = \frac{1}{3}\sin(x)x^3 - 2\cos(x)x + 2\sin(x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}(\frac{\pi}{2})^3 + 2.$$

Voorbeeld 6.10

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x.$$

waar we partieel geïntegreerd hebben met de keuze $f'(x) = 1$ *en* $g(x) = \ln(x)$*.*

6.5 Breuksplitsen

Rationale functies, ofwel breuken van polynomen, kunnen geschreven worden als sommen van eenvoudiger rationale functies. Hierdoor is het makkelijker een primitieve te vinden.

Voorbeeld 6.11

$$\int \frac{5x-4}{2x^2+x-1}dx = \int \frac{5x-4}{(x+1)(2x-1)}dx = \int \frac{3}{x+1} + \frac{-1}{2x-1}dx = 3\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|2x-1|.$$

In de eerste stap wordt de noemer ontbonden in factoren. De tweede stap is het eigenlijke breuksplitsen, waarna de primitieve zo opgeschreven kan worden. Het breuksplitsen wordt hier als volgt uitgevoerd. Schrijf

$$\frac{5x-4}{(x+1)(2x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1}.$$

Als we de rechterkant onder een noemer brengen, krijgen we

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} = \frac{A(2x-1)+B(x+1)}{(x+1)(2x-1)} = \frac{(2A+B)x+(-A+B)}{(x+1)(2x-1)}.$$

Vergelijken we dit met de oorspronkelijke breuk, dan zien we dat $5x-4 = (2A+B)x + (-A+B)$*, ofwel*

$$\begin{cases} 2A+B=5, \\ -A+B=-4. \end{cases}$$

Uit deze twee vergelijkingen lossen we de twee onbekenden A, B *op:* $A = 3$ *en* $B = -1$*.*

Voorbeeld 6.12

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx &= \int \frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)}dx \\ &= \int \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}dx \\ &= \int \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+4} + \frac{-1}{x^2+4}dx \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| - \frac{1}{2}\arctan(x/2). \end{aligned}$$

In de eerste stap wordt de noemer ontbonden. Merk op dat x^2+4 *niet verder ontbonden kan worden. De tweede stap is het breuksplitsen; hier worden* A, B, C *opgelost uit*

$$\frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

De berekening, die we achterwege laten, geeft $A = 1, B = 1, C = -1$. Omdat x^2+4 een kwadratische term is, staat in de noemer hierbij een eerste orde polynoom. Ten slotte wordt de integraal $\int \frac{x-1}{x^2+4}dx$ nog gesplitst in twee integralen $\int \frac{x}{x^2+4}dx$ en $\int \frac{-1}{x^2+4}dx$. De eerste hiervan kan met de substitutie $u = x^2 + 4$ worden aangepakt: met $du = 2xdx$ krijgen we

$$\int \frac{x}{x^2+4}dx = \int \frac{1}{2}\frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln|x^2+4|.$$

De tweede kan vereenvoudigd worden met de substitutie $x = 2v$. Dan zien we, met $dx = 2dv$,

$$\int \frac{-1}{x^2+4}dx = \int 2\frac{-1}{4v^2+4}dv = \int \frac{-1}{2}\frac{1}{v^2+1}dv = \frac{1}{2}\arctan(v) = \frac{1}{2}\arctan(x/2).$$

Het volgende voorbeeld dient om duidelijk te maken hoe te breuksplitsen als er machten van veeltermen in een noemer staan.

Voorbeeld 6.13 *Er geldt*

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-x-\frac{1}{2}}{(x+1)^2}.$$

Schrijf, om dit te vinden, $\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2}$ en los A, B, C op. Merk op dat er een term met $(x+1)^2$ in de noemer blijft, waarbij de macht van de teller één kleiner is.

Voorbeeld 6.14 *Beschouw de functie*

$$f(x) = \frac{x^4-1}{x(x+1)^2}.$$

De teller bevat een term van de orde vier (als hoogst voorkomende macht), dit is hoger dan de derde orde term die als hoogste macht in de noemer voorkomt. Om de primitieve van $f(x)$ te vinden, kunnen we eerst met een staartdeling de teller door de noemer delen, om zo $f(x)$ te herschrijven tot een polynoom plus als restterm een rationale functie met noemer $x(x+1)^2 = x^3+2x^2+x$ en een teller met termen van orde kleiner dan 3. Namelijk

$$x^4 - 1 = x\left[x^3+2x^2+x\right] - 2x^3 - x^2 = x\left[x^3+2x^2+x\right] - 2\left[x^3+2x^2+x\right] + 3x^2 + 2x.$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{x^4-1}{x(x+1)^2} = x - 2 + \frac{3x^2+2x}{x(x+1)^2} = x - 2 + \frac{3x+2}{(x+1)^2}.$$

6.6 Oneigenlijke integralen

Een integraal van een functie over een onbegrensd interval, of over een interval waarop de functie onbegrensd is, wordt met een limiet gedefinieerd. Een integraal $\int_a^\infty f(x)dx$ wordt bijvoorbeeld gedefinieerd als $\lim_{n\to\infty}\int_a^n f(x)dx$ als deze limiet bestaat. Als $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \infty$, wordt een integraal $\int_a^b f(x)dx$ gedefinieerd als $\lim_{n\downarrow a}\int_n^b f(x)dx$ als de limiet bestaat.

Voorbeeld 6.15 *Er geldt*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \infty,$$

want $\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln(x)|_1^n = \ln(n)$ *en dit wordt willekeurig groot in de limiet* $n \to \infty$. *Zo geldt ook*

$$\int_0^1 \frac{1}{x} = \infty,$$

want $\int_s^1 \frac{1}{x} dx = \ln(x)|_s^1 = -\ln(s)$ *en dit wordt willekeurig groot in de limiet* $s \downarrow 0$. *Daarentegen geldt*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1,$$

want $\int_1^n \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x}\Big|_1^n = 1 - \frac{1}{n}$ *en* $\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$. *Ga na dat geldt*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \infty$$

en

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}.$$

Voorbeeld 6.16 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2 \arctan(x)}$ *bestaat, want* $0 < \frac{1}{x^2 \arctan(x)} < \frac{1}{2}\pi \frac{1}{x^2}$ *en voor deze laatste functie bestaat de integraal over* $(1, \infty)$.

6.7 Volumen

Een integraal van een functie wordt benaderd door niet met alle functiewaarden, maar met eindig veel functiewaarden te rekenen. Voor positieve functies levert dit de oppervlakte onder de grafiek van de functie. Op analoge manier kan een volume berekend worden. Beschouw een lichaam L in de drie dimensionale ruimte. De doorsnijding van L met een vlak $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = \bar{x}\}$ is een gebied met een oppervlakte $A(\bar{x})$. Het volume $V(L)$ van L kan benaderd worden door eindig veel van deze doorsnijdingen te bekijken. Neem aan dat L ligt in een gebied met x-waarden tussen a en b. Voor een groot getal n, laat $\Delta x = (b - a)/n$ en kies n punten $x_i = a + i\Delta x$, $1 \leq i \leq n$. Dan

$$V(L) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x.$$

De laatste limiet (als hij bestaat) is gelijk aan de integraal van de functie $A(x)$ over het interval (a, b), dus

$$V(L) = \int_a^b A(x) dx.$$

Voorbeeld 6.17 *Bereken de inhoud van een bol B met straal 1. De bol wordt gegeven door $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Voor $-1 \leq \bar{x} \leq 1$ is de doorsnijding van B met het vlak $\{x = \bar{x}\}$ gelijk aan de schijf $\{y^2 + z^2 \leq 1 - \bar{x}^2\}$ met straal $\sqrt{1 - \bar{x}^2}$. Deze schijf heeft oppervlakte $A(\bar{x}) = \pi(1 - \bar{x}^2)$. Het volume van B is dus*

$$\int_{-1}^{1} A(x)dx = \int_{-1}^{1} \pi(1 - x^2)dx = \pi(x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\pi.$$

Voorbeeld 6.18 *Bereken de inhoud van een pyramide met als grondvlak een vierkant van zijde a, en met hoogte h. Op een hoogte x tussen 0 en h, geeft de pyramide een vierkant van zijde ax/h. De oppervlakte hiervan is $A(x) = (ax/h)^2$, zodat de inhoud van de pyramide gegeven wordt door*

$$\int_0^h \left(\frac{ax}{h}\right)^2 dx = \frac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \frac{a^2}{h^2}\frac{1}{3}x^3\Big|_0^h = \frac{a^2}{h^2}\frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3}a^2 h,$$

ofwel een derde keer de oppervlakte van het grondvlak keer de hoogte.

6.8 Numeriek integreren

De definitie van de integraal suggereert methoden om een integraal numeriek te benaderen. Belangrijk is om een afschatting van de fout van het benaderde antwoord te hebben. We beschrijven drie algoritmen om een integraal numeriek te benaderen, en geven formules voor de fout die daarbij gemaakt wordt. Neem aan dat we $\int_a^b f(x)dx$ willen benaderen.

Middenpunt regel. Voor een geheel getal n, schrijf $\Delta x = (b - a)/n$. Kies n punten $x_i = a + (i - \frac{1}{2})\Delta x$, $1 \leq i \leq n$. Merk op dat x_i precies tussen $a + (i - 1)\Delta x$ en $a + i\Delta x$ ligt. Benader de uit te rekenen integraal met

$$M(n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Men kan aantonen dat, als $C = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, dan

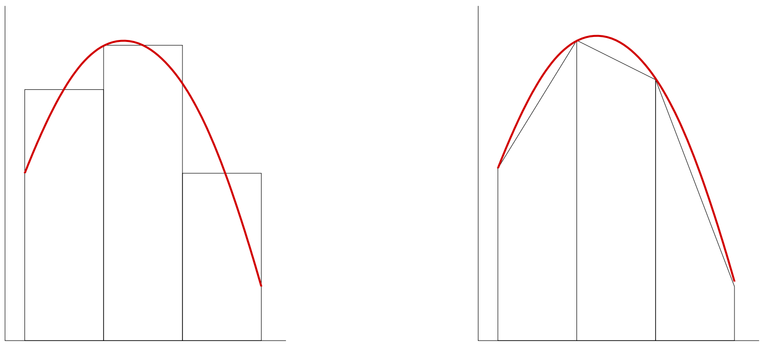
$$\left|\int_a^b f(x)dx - M(n)\right| \leq C\frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$

Trapezium regel. Voor een geheel getal n, schrijf $\Delta x = (b-a)/n$. Kies $n+1$ punten $x_i = a+i\Delta x$, $0 \leq i \leq n$. Merk op dat $x_0 = a$ en $x_n = b$. Benader de uit te rekenen integraal met

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\Delta x.$$

In de formule wordt telkens het gemiddelde genomen van twee functiewaarden. Men kan aantonen dat, als $C = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, dan

$$\left|\int_a^b f(x)dx - T(n)\right| \leq C\frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$



Figuur 10: Bij de middenpunt regel (linker grafiek) wordt de oppervlakte onder de grafiek van de functie benadert met de gesommeerde oppervlakten van de getekende rechthoeken. De rechtergrafiek toont de benadering van de oppervlakte onder de grafiek van de functie bij trapezium regel

Simpson's regel. Voor een geheel getal n, schrijf $\Delta x = (b-a)/n$. Kies $n+1$ punten $x_i = a + i\Delta x$, $0 \leq i \leq n$. Het kwadratische polynoom dat in drie opeenvolgende punten x_{i-1}, x_i, x_{i+1} de waarden $f(x_{i-1}), f(x_i), f(x_{i+1})$ heeft, wordt gegeven door

$$P(x) = \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}{2(\Delta x)^2}(x - x_i)^2 + \frac{-f(x_{i-1}) + f(x_{i+1})}{2(\Delta x)}(x - x_i) + f(x_i).$$

De oppervlakte onder de grafiek van P over het interval $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ is gelijk aan

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P(x)dx = \frac{f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})}{3}\Delta x.$$

Door zulke oppervlakten te sommeren, wordt de uit te rekenen integraal benaderd door een som $S(n)$. Omdat telkens drie opeenvolgende punten x_{i-1}, x_i, x_{i+1} bij elkaar worden genomen, moet n een even getal zijn. Dit levert

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n/2} \frac{f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})}{3}\Delta x.$$

Men kan aantonen dat

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S(n) \right| \leq C\frac{(b-a)^5}{180n^4},$$

voor $C = \max_{x \in [a,b]} |f''''(x)|$ (het maximum van de absolute waarde van de vierde afgeleide van f). Merk op dat in de noemer n^4 staat, waar in de corresponderende formules voor de middenpunt regel en de trapezium regel n^2 staat.

Voorbeeld 6.19 *Benader* $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ *met de regel van Simpson, met een fout kleiner dan* $1/10000$. *De vierde afgeleide van* $f(x) = 1/x$ *is gelijk aan* $f''''(x) = 24/x^5$. *We zien dat* $|f''''(x)| \leq 24$ *voor* x *in het interval* $[1, 2]$. *De fout die gemaakt wordt door de integraal te benaderen met de regel van Simpson* $S(n)$ *is hooguit* $24/(180n^4)$. *Als* $24/(180n^4) < 1/10000$, *dan is ook de fout* $\left|\int_a^b f(x)dx - S(n)\right|$ *kleiner dan* $1/10000$. *Nu geldt dat* $24/(180n^4) < 1/10000$ *als* $n > \sqrt[4]{240000/180} \approx 6.0428$, *dus als* $n \geq 8$.

6.9 Oefeningen

1. Bereken $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$.
2. Bereken $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$.
3. Bereken $\int_0^2 x^2(1 + 2x^3)^3dx$.
4. Bereken $\int_0^4 x\sqrt{16 - 3x}dx$.
5. Bereken $\int_1^\infty \frac{1}{x^3+x}dx$.
6. Bereken $\int \sin(x)\cos(\cos(x))dx$.
7. Bereken $\int \frac{6x+1}{3x+2}dx$.
8. Bereken $\int x\cos(3x)dx$.
9. Bereken $\int \frac{1}{x^2+6x+8}dx$.
10. Bereken $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$.
11. Bereken $\int \sin(x)^3dx$.
12. Vind een primitieve van de functie $f(x) = 1/(x(x + 1)^2)$ uit Voorbeeld 6.13.
13. Vind een primitieve van de functie $f(x) = (x^4 - 1)/(x(x + 1)^2)$ uit Voorbeeld 6.14.
14. Wat is de afgeleide van $f(x) = \int_0^x udu$? Bereken vervolgens de afgeleide van $x \mapsto \int_0^{x^2} udu$.
15. Bereken het volume van een kapje van een bol, $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \frac{1}{2}\}$.
16. Bereken het volume van een pyramide met een hoogte h en met een vierkante basis van zijde b.

7 Functies van meer variabelen

Analoog aan de theorie voor functies van een variabele kan ook een calculus voor functies van meer variabelen ontwikkeld worden. Wij gaan in dit hoofdstuk in op het limietbegrip en differentiatie, en bestuderen extreme waarden.

7.1 Limieten

Zij $\mathcal{U}$ een gebied in $\mathbb{R}^n$ en $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ een functie op $\mathcal{U}$. We schrijven $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Met $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wordt dit $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$. Voor $n = 2, 3$ gebruiken we ook de notatie $(x, y) \mapsto f(x, y)$ en $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$.

Er geldt $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(x) = L$ als voor ieder klein interval I rond de waarde L, er een omgeving van $\mathbf{a}$ is zodat $f(\mathbf{x})$ in I zit voor ieder punt $\mathbf{x}$ in deze omgeving. De waarde $f(\mathbf{x})$ is dus bijna L als $\mathbf{x}$ in de buurt van $\mathbf{a}$ is. De functie f heet continu in $\mathbf{a}$ als $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{z}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Voorbeeld 7.1 *Zij* $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, *gedefinieerd voor* $(x, y) \neq (0, 0)$. *Bestaat* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$*? In punten* (x, mx) *geldt* $f(x, mx) = \frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$. *Deze waarde hangt niet van* x *af, maar varieert met* m. *Er zijn daarom punten* (x, mx) *willekeurig dicht bij* $(0, 0)$*, waarvoor de functiewaarden verschillend zijn. Conclusie: de limiet* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ *bestaat niet.*

Voorbeeld 7.2 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$, *want*

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{3(x^2+y^2)y}{x^2+y^2}\right| \leq 3|y|,$$

en de absolute waarde van $\frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ *is dus klein voor* (x, y) *in de buurt van* $(0, 0)$.

Voorbeeld 7.3 *Zij* $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, *gedefinieerd voor* $(x, y) \neq (0, 0)$. *Bestaat* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$*? Als we de functiewaarde uitrekenen in punten* (x, mx)*, krijgen we* $f(x, mx) = \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = \frac{m^2x}{1+m^4x^2}$. *Merk op dat* $\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x}{1+m^4x^2} = 0$*, onafhankelijk van* m. *Als we echter de functiewaarde uitrekenen in* (x^2, mx)*, krijgen we* $f(x^2, mx) = \frac{m^2x^4}{x^4+m^4x^4} = \frac{m^2}{1+m^4}$. *Deze waarde hangt wel van* m *af, en is niet bijna 0 als* m *verschillend van 0 is. Er zijn daarom punten* (x^2, mx) *willekeurig dicht bij* $(0, 0)$*, waarvoor de functiewaarden verschillend zijn. De limiet* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ *bestaat daarom niet.*

7.2 Afgeleiden

Om de notatie beperkt te houden, kijken we naar functies van twee variabelen. De theorie kan probleemloos naar functies van meer variabelen veralgemeend worden, zoals we beneden zullen aanstippen. Beschouw dus een functie f van twee variabelen (x, y). Als we een van de variabelen constant houden, krijgen we een functie van de andere variabele. Deze kunnen we differentiëren; zo worden partiële afgeleiden gedefinieerd:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}. \end{aligned}$$

Boven staan (als de limieten bestaan) de partiële afgeleide naar x en de partiële afgeleide naar y.

Voorbeeld 7.4 *Laat* $f(x,y) = \sin(x/(1+y))$. *Dan geldt*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{1+y}\cos\left(\frac{x}{1+y}\right), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-x}{(1+y)^2}\cos\left(\frac{x}{1+y}\right). \end{aligned}$$

Onder de conditie dat de beide partiële afgeleiden continue functies van (x,y) zijn, dus dat $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ en $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ continu zijn, kan een goede eerste orde benadering gegeven worden van $f(x,y)$. Dit werkt als volgt. Laat (x_0,y_0) een punt in het vlak zijn. Neem aan dat $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ en $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ continu zijn in het punt (x_0,y_0). Dan geldt dat

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ah, y_0+bh) - f(x_0,y_0)}{h} = a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

De limiet aan de linkerkant heet de richtingsafgeleide van f in het punt (x_0,y_0) in de richting (a,b). De partiële afgeleide naar x is dus de richtingsafgeleide in de richting $(1,0)$ en de partiële afgeleide naar y is de richtingsafgeleide in de richting $(0,1)$. Bovenstaande limiet impliceert dat een richtingsafgeleide berekend kan worden met behulp van de beide partiële afgeleiden. Dit is alleen waar als de partiële afgeleiden continu zijn, zoals het volgende voorbeeld duidelijk maakt.

Voorbeeld 7.5 *Laat* $f(x,y) = x\sqrt{x}y\sqrt{y}/(x^2+y^2)$ *als* $(x,y) \neq (0,0)$ *en* $f(0,0) = 0$. *Dit is een continue functie;* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. *Dit kan aangetoond worden door op te merken dat* $|xy| \leq \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2} = x^2+y^2$, *zodat* $|f(x,y)| \leq (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}/(x^2+y^2) = \sqrt{x^2+y^2}$ *en deze laatste functie is bijna 0 voor* (x,y) *in de buurt van 0. Bovendien geldt dat* $f(x,0) = 0$ *voor alle* x *en* $f(0,y) = 0$ *voor alle* y, *zodat* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ *en* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. *Maar als we de richtingsafgeleide in* $(0,0)$ *en in de richting* (a,b) *uitrekenen, dan krijgen we*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(ah,bh) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{a\sqrt{a}b\sqrt{b}h^3}{a^2h^2+b^2h^2}}{h} = \frac{a\sqrt{a}b\sqrt{b}}{a^2+b^2}.$$

Als a *en* b *beide ongelijk aan 0 zijn, is dit niet gelijk aan* $a\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *(want dit laatste is gelijk aan 0).*

De partiële afgeleiden zijn in dit voorbeeld niet continu in $(0,0)$. *Bijvoorbeeld,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}y\sqrt{y}(x^2+y^2) - 2x^2\sqrt{x}y\sqrt{y}}{(x^2+y^2)^2},$$

waaruit volgt dat $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{1}{4}$, *voor elk punt* (x,x) *met* $x \neq 0$. *We hebben gezien dat* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, *zodat inderdaad de partiële afgeleide naar* x *niet continu is in* $(0,0)$.

Als geldt dat $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ah,y_0+bh)-f(x_0,y_0)}{h} = a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, dan wordt de afgeleide $Df(x_0,y_0)$ van f in het punt (x_0,y_0) gedefinieerd als de matrix van partiële afgeleiden;

$$Df(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

Dus
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah,y_0+bh)-f(x_0,y_0)}{h} = Df(x_0,y_0)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$
Een eerste orde benadering van de functie f rond het punt (x_0,y_0) wordt gegeven door
$$\begin{aligned} z &= f(x_0,y_0)+Df(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \\ & f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0). \end{aligned}$$
De grafiek van deze functie is het raakvlak aan de grafiek van f, in het punt $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

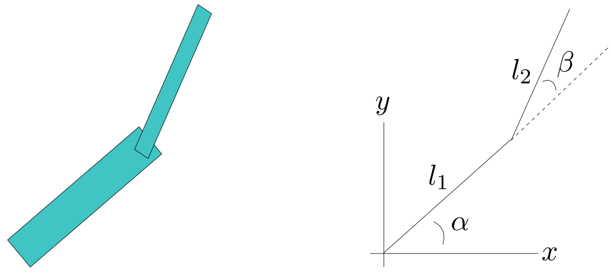
Voorbeeld 7.6 *Beschouw de functie $f(x,y)=e^x\cos(y)$ rond $x=0$ en $y=0$. De lineaire approximatie is*
$$(x,y)\mapsto f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = 1+x,$$
want $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^x\cos(y)$ (gelijk aan 1 in $(x,y)=(0,0)$) en $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-e^x\sin(y)$ (gelijk aan 0 in $(x,y)=(0,0)$). Het raakvlak aan de grafiek $\{z=f(x,y)\}$ van de functie f wordt gegeven door $\{z=1+x\}$, zijnde de grafiek van de lineaire approximatie.

7.3 Meer variabelen en afbeeldingen

Al het bovenstaande kan direct gegeneraliseerd worden naar functies van meer variabelen. Beschouw een functie $\mathbf{x}\mapsto f(\mathbf{x})$ met $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$. Dan bestaan partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ naar de verschillende coordinaten. Als deze partiële afgeleiden continu van het punt $(x_1,\ldots,x_n)$ afhangen, dan bestaat de afgeleide
$$Df(x_1,\ldots,x_n)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix}.$$

Men kan ook meerdere differentieerbare functies $f_1,\ldots,f_m$, allemaal gedefinieerd op $\mathbb{R}^n$, tegelijk bekijken. Dat levert een afbeelding $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{f}(\mathbf{x})$;
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\ldots,x_n) \end{pmatrix}.$$

Elk van de afbeeldingen is te differentiëren, zodat
$$Df(x_1,\ldots,x_n)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$



Figuur 11: Een robotarm bestaande uit een bovenarm van lengte l_1 en een onderarm van lengte l_2.

Voorbeeld 7.7 *In Figuur 11 is een robotarm getekend. De positie van het uiteinde, de hand, wordt vastgelegd door de twee hoeken α en β. De positie (x, y) van de hand wordt gegeven door*

$$(x, y) = (l_1 \cos(\alpha) + l_2 \cos(\alpha + \beta), l_1 \sin(\alpha) + l_2 \sin(\alpha + \beta))$$

Schrijf $\mathbf{f}(\alpha, \beta)$ voor de afbeelding gegeven door de rechterkant van bovenstaande gelijkheid. Dan geldt

$$D\mathbf{f}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} -l_1 \sin(\alpha) - l_2 \sin(\alpha + \beta) & -l_2 \sin(\alpha + \beta) \\ l_1 \cos(\alpha) + l_2 \cos(\alpha + \beta) & l_2 \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}.$$

Deze matrix van partiële afgeleiden geeft aan hoe, in eerste orde benadering, de positie van de hand verandert als functie van de hoeken α en β. In de opgaven wordt gevraagd hier verder aan te rekenen.

7.4 Kettingregel

We beginnen met twee voorbeelden om de gedachten te bepalen.

Voorbeeld 7.8 *Laat $f(x, y) = x^2 + y^4$, waar x en y van t afhangen volgens $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$. Er is sprake van een samengestelde functie $f(x(t), y(t)) = x(t)^2 + y(t)^4 = \cos(t)^2 + \sin(t)^4$. De kettingregel voor functies geeft*

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = -2\cos(t)\sin(t) + 4\sin(t)\cos(t).$$

Dit is gelijk aan

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = Df(x(t), y(t)) \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) & \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld 7.9 *Beschouw de functies $g(x, y) = x^2 + y^2$ en $f(x) = \sin(x)$. Stel de functies samen tot $(x, y) \mapsto f(g(x, y)) = \sin(x^2 + y^2)$. Differentiëren naar x en y geeft*

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(g(x, y))) = f'(g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \cos(x^2 + y^2)2x,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(f(g(x, y))) = f'(g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \cos(x^2 + y^2)2y.$$

Dus, met $F(x,y) = f(g(x,y))$, *geldt*

$$DF(x,y) = f'(g(x,y))Dg(x,y) = f'(g(x,y))\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \cos(x^2+y^2)\begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}.$$

Bovenstaande voorbeelden laten zich generaliseren tot een kettingregel voor samenstellingen van afbeeldingen. We presenteren een aantal gevolgen van de algemene vorm van de kettingregel, die beneden wordt gegeven. In de volgende formules zijn f, g, g_1, g_2 functies van één variabele x of twee variabelen (x,y). Telkens als een functie van meer variabelen afhangt, wordt een afgeleide naar een variabele een partiële afgeleide, waar de andere variabele constant gehouden wordt. Voor $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geldt (vergelijk Voorbeeld 7.8)

$$\frac{d}{dx}\left(f(g_1(x), g_2(x))\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(x), g_2(x))g_1'(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(x), g_2(x))g_2'(x).$$

Voor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ geldt (als in Voorbeeld 7.9)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(f(g(x,y))\right) &= f'(g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(f(g(x,y))\right) &= f'(g(x,y))\frac{\partial g}{\partial y}(x,y). \end{aligned}$$

Voor $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ geldt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(f(g_1(x,y), g_2(x,y))\right) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(x,y), g_2(x,y))\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(x,y), g_2(x,y))\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y), \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(f(g_1(x,y), g_2(x,y))\right) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(x,y), g_2(x,y))\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(x,y), g_2(x,y))\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y). \end{aligned}$$

In het algemeen, laat $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en $\mathbf{g} : \mathbb{R}^o \to \mathbb{R}^n$ twee afbeeldingen zijn. Uitvoeriger opgeschreven zijn twee afbeeldingen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_o \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g_1(y_1, \ldots, y_o) \\ \vdots \\ g_n(y_1, \ldots, y_o) \end{pmatrix}$$

gegeven. Laat $\mathbf{F} : \mathbb{R}^o \mapsto \mathbb{R}^m$ de samenstelling $\mathbf{y} \mapsto f(g(\mathbf{y}))$ (waar $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_o)$) zijn. In deze notatie krijgt de kettingregel een natuurlijke vorm;

$$\begin{aligned} D\mathbf{F}(\mathbf{y}) &= D\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}))D\mathbf{g}(\mathbf{y}) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_o}(\mathbf{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1}(\mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_o}(\mathbf{y}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Voorbeeld 7.10 *Drie parallel geplaatste weerstanden met gemeten waarden* $R_1 = 25\Omega, R_2 = 40\Omega$ *en* $R_3 = 50\Omega$, *geven een totale weerstand* R *gegeven door*

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

De totale weerstand R *is dus een functie* $R = R(R_1, R_2, R_3)$. *We hebben*

$$\begin{aligned} R(25,40,50) &= \frac{1}{\frac{1}{25} + \frac{1}{40} + \frac{1}{50}} \\ &= \frac{200}{17}. \end{aligned}$$

Gegeven is dat de fout in de metingen van de weerstanden R_1, R_2, R_3 *maximaal 0.5 procent bedraagt. De waarde van* R_1 *kan dus* $\frac{0.5}{100}25 = 0.125$ *afwijken van de opgegeven waarde* 25. *Evenzo kan de waarde van* R_2 0.2 *afwijken en de waarde van* R_3 *kan* 0.25 *afwijken. De vraag is wat de maximale fout in de berekende waarde van* R *is.*

We schatten de fout in de berekende waarde van R *door de linearizering van* R *te gebruiken. De kettingregel geeft*

$$DR(R_1, R_2, R_3) = -(R(R_1, R_2, R_3))^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{R_1^2} & \frac{-1}{R_2^2} & \frac{-1}{R_3^2} \end{pmatrix},$$

zodat

$$DR(25,40,50) = -\frac{200^2}{17^2} \begin{pmatrix} \frac{-1}{25^2} & \frac{-1}{40^2} & \frac{-1}{50^2} \end{pmatrix}.$$

Als de afwijking in R_1, R_2, R_3 *respectievelijk* $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ *bedraagt, is de fout in de berekende waarde van* R *ongeveer*

$$\left| DR(25,40,50) \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix} \right|$$

Ohm. Met $\Delta_1 = \frac{0.5}{100}25$, $\Delta_2 = \frac{0.5}{100}40$, *en* $\Delta_3 = \frac{0.5}{100}50$, *is de berekende fout in* R *dus ongeveer*

$$\frac{200^2}{17^2} \left(\frac{1}{25^2} \frac{5}{100} 25 + \frac{1}{40^2} \frac{5}{100} 40 + \frac{1}{50^2} \frac{5}{100} 50 \right) = \frac{1}{17}$$

Ohm.

We hebben de fout boven afgeschat met de linearizering van

$$R(R_1, R_2, R_3) \approx R(25,40,50) + DR(25,40,50) \begin{pmatrix} R_1 - 25 \\ R_2 - 40 \\ R_3 - 50 \end{pmatrix}.$$

Overigens, daar de rechterkant boven lineair is en de fout in de meting van de afzonderlijke weerstanden voor alle weerstanden 0.5 procent is, kunnen we inzien dat de fout in R *ook maximaal (ongeveer) 0.5 procent is, als de fout in* R_1, R_2, R_3 *maximaal 0.5 procent is. Nu is 0.5 procent van* $R(25,40,50) = \frac{200}{17}$ *gelijk aan* $\frac{1}{17}$. *We hoeven dus nauwelijks te rekenen voor het antwoord.*

7.5 Gradiënt

Beschouw, voor een gegeven functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de punten (x, y) waar f een vaste waarde h heeft; $\{f(x, y) = h\}$. Neem een punt (x_0, y_0) waarvoor $f(x_0, y_0) = h$. Men kan bewijzen dat, als $Df(x_0, y_0) \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, dat dan de verzameling $\{f(x, y) = h\}$ eruit ziet (in de buurt van (x_0, y_0)) als een kromme.

We hebben gezien dat f in de buurt van het punt (x_0, y_0) benaderd kan worden met de linearizering

$$(x, y) \mapsto f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

Dit kan anders geschreven worden, door te werken met de gradiënt $\nabla f(x, y)$ van f gegeven door

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Het inproduct van twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ is gedefinieerd door

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Met deze notatie laat de linearizering van f rond (x_0, y_0) zich schrijven als

$$(x, y) \mapsto f(x_0, y_0) + \left\langle \nabla f(x, y), \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

De gradiënt heeft een meetkundige interpretatie;

- $\nabla f(x_0, y_0)$ staat loodrecht op de niveaukromme $C_h = \{f(x, y) = h\}$, in het punt (x_0, y_0).
- De waarde van f neemt het sterkst toe in de richting van $\nabla f(x_0, y_0)$.

Voorbeeld 7.11 *Laat $f(x, y) = x^2 + 4y^2$. De niveaukrommen C_h van f, $C_h = \{x^2 + 4y^2 = h\}$, zijn ellipsen (voor $h > 0$). Bereken*

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}.$$

We kunnen de ellipsen C_h parametriseren door $\mathbf{g}(\theta) = (h \cos(\theta), \frac{h}{2} \sin(\theta))$, waarbij θ een hoek is. De afgeleide van $\mathbf{g}$ is gegeven door $(-h \sin(\theta), \frac{h}{2} \cos(\theta))$. Merk op dat, in een punt $(x, y) = (h \cos(\theta), \frac{h}{2} \sin(\theta))$,

$$\langle \nabla f(x, y), D\mathbf{g}(\theta) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2h \cos(\theta) \\ 4 \sin(\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -h \sin(\theta) \\ \frac{h}{2} \cos(\theta) \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Dit drukt uit dat de gradiënt van f loodrecht op de ellips (de niveaukromme van f) staat.

Voor de volledigheid geven we een uitleg voor de meetkundige eigenschappen van de gradiënt. Als in bovenstaand voorbeeld, laat $\mathbf{g}(t)$ een niveaukromme C_h van een functie f parametriseren. Dus $h = f(g_1(t), g_2(t))$ voor alle waarden van t. Door deze vergelijking te differentiëren, met behulp van de kettingregel, zien we

$$0 = \frac{d}{dt}\left(f(g_1(t), g_2(t)\right) = Df(\mathbf{g}(t))D\mathbf{g}(t) = \left\langle \nabla f(\mathbf{g}(t)), \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Nu is een inproduct van twee vectoren nul precies dan als deze vectoren loodrecht op elkaar staan. Dus in bovenstaande bereking, staan $\nabla f(\mathbf{g}(t))$ en $D\mathbf{g}(t)$ loodrecht op elkaar. Precieser geldt dat

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle \cos(\theta)$$

waar θ de hoek tussen de vectoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ is. Nu is $\cos(\theta)$ gelijk aan 0 als $\theta = \frac{1}{2}\pi$, dus als de beide vectoren loodrecht op elkaar staan. En $\cos(\theta)$ is maximaal (dat wil zeggen , gelijk aan 1), als $\theta = 0$, dus als de vectoren dezelfde richting hebben. Dit is precies wat boven beweerd werd, met $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ vervangen door $\nabla f(\mathbf{g}(t))$ en $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ vervangen door $D\mathbf{g}(t)$.

7.6 Taylor reeksen

Functies van meer variabelen kunnen met polynomen benaderd worden, analoog aan functies van één variabele. De formules zijn geavanceerder, maar het idee is recht toe recht aan. We beperken ons tot een functie $f(x, y)$ van twee variabelen x en y. We willen een benadering geven van de functie rond, zeg, het punt $(0, 0)$. Als we de waarden van f op een lijn $h(a, b)$, gegeven door een vaste vector (a, b) en $h \in \mathbb{R}$, bekijken, dan hebben we te maken met een functie van één variabele:

$$h \mapsto f(ha, hb).$$

Deze functie kunnen we benaderen met een Taylor reeks als eerder. Als we de notatie $g(h) = f(ha, hb)$ gebruiken, dan geldt $g(h) = g(0) + hg'(0) + \frac{1}{2}h^2 g''(0)$ plus termen van orde drie en hoger in h. Omdat

$$g'(h) \;\; = \;\; a\frac{\partial f}{\partial x}(ha, hb) + b\frac{\partial f}{\partial y}(ha, hb)$$

en

$$\begin{aligned} g''(h) &= \frac{d}{dh}\left(a\frac{\partial f}{\partial x}(ha, hb) + b\frac{\partial f}{\partial y}(ha, hb)\right) \\ &= a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(ha, hb) + 2ab\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(ha, hb) + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(ha, hb), \end{aligned}$$

geldt (waar we 'termen van orde drie en hoger in h' noteren als $\mathcal{O}(h^3)$)

$$\begin{aligned} f(ha,hb) &= g(0) + hg'(0) + \frac{1}{2}h^2 g''(0) + \mathcal{O}(h^3) \\ &= f(0,0) + ha\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + hb\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \\ & \quad \frac{1}{2}h^2a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + h^2ab\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(0,0) + \frac{1}{2}h^2b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

In de meer gebruikelijke notatie $(x,y) = (ha,hb)$, zien we

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx f(0,0) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \\ & \quad \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + xy\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(0,0) + \frac{1}{2}y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{aligned}$$

als we f benaderen door een polynoom in x en y met hooguit tweede orde termen. Merk op dat deze tweede orde Taylor benadering van f rond $(0,0)$ ook geschreven kan worden als

$$f(0,0) + Df(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left\langle D^2f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle,$$

waar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ notatie is voor het inproduct van twee vectoren (zie ook Hoofdstuk 7.5), en

$$D^2f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

7.7 Extreme waarden

Beschouw een functie f van twee variabelen. De functie f heeft een maximum in een punt (c,d) als $f(c,d) \geq f(x,y)$ voor alle punten (x,y). Het punt (c,d) geeft een lokaal maximum, als er een omgeving van het punt (c,d) is zodat $f(c,d) \geq f(x,y)$ voor alle punten (x,y) uit die omgeving. Een minimum en een lokaal minimum wordt analoog gedefinieerd. Een (lokaal) extremum is een (lokaal) minumum of maximum.

Een noodzakelijke conditie voor een continu differentieerbare functie om een lokaal extremum in een punt (c,d) te hebben, is dat $Df(c,d) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dus beide partiële afgeleiden, naar x en naar y, moeten in het punt (c,d) nul zijn,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(c,d) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(c,d) &= 0. \end{aligned}$$

Dit is geen voldoende voorwaarde, de partiële afgeleiden kunnen nul zijn in een punt dat geen lokaal maximum of minimum is.

We beschrijven nu een methode om na te gaan of een punt een maximum of een minimum levert. We hebben hier tweede orde partiële afgeleiden voor nodig. We kunnen de functies $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial} f(x, y)$ en $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ nog een keer partieel differentiëren, naar x en naar y. Dit levert de tweede orde partiële afgeleiden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$. Het blijkt dat als deze tweede orde partiële afgeleiden continue functies van (x, y) zijn, dat dan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Dat wil zeggen, eerst naar x differentiëren en dan naar y, levert hetzelfde op als eerst naar y differentiëren en dan naar x. We nemen aan dat de tweede orde partiële afgeleiden continu zijn, zodat dit geldt.

We schrijven opnieuw

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$$

voor de matrix van tweede orde partiële afgeleiden. Laat $E(x, y)$ de determinant hiervan zijn:

$$E(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right)^2.$$

Laat (c, d) een punt zijn waarvoor $Df(c, d) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dan geldt

- Als $E(c, d) > 0$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c, d) > 0$, dan is (c, d) een lokaal minimum,
- Als $E(c, d) > 0$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c, d) < 0$, dan is (c, d) een lokaal maximum,
- Als $E(c, d) < 0$, dan is (c, d) een zadelpunt en is daarmee noch een minimum, noch een maximum,
- Als $E(c, d) = 0$, dan is het niet mogelijk om uit de tweede orde afgeleiden te concluderen of (c, d) een extremum is of niet.

De eenvoudigste afbeeldingen waaraan goed is te zien hoe dit werkt, zijn

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 \quad \text{(met een minimum in } (0, 0)), \\ f(x, y) &= -x^2 - y^2 \quad \text{(met een maximum in } (0, 0)), \\ f(x, y) &= x^2 - y^2 \quad \text{(met een zadelpunt in } (0, 0)). \end{aligned}$$

De afbeeldingen vallen in de eerste drie mogelijkheden, zoals makkelijk valt na te gaan, in dezelfde volgorde. Het is in deze gevallen de tweede orde Taylor benadering van f, rond het punt waar Df verdwijnt (zie Sectie 7.6), die bepaalt of f een maximum of minimum heeft, of geen van twee (een zadelpunt).

Voorbeeld 7.12 *Bereken de extreme waarden van* $f(x,y) = (x^2+y)e^y$. *Kandidaatpunten voor maxima en minima zijn de punten waar beide partiële afgeleiden nul zijn:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Dit levert de twee vergelijkingen $2xe^y = 0$ *en* $e^y + (x^2+y)e^y = 0$ *respectievelijk. Omdat* e^y *nooit nul is, volgt uit de eerste vergelijking dat* $x = 0$. *Vullen we dit in de tweede vergelijking in, dan levert dit* $e^y + ye^y = (1+y)e^y = 0$. *Opnieuw omdat* e^y *nooit nul is, zien we dat* $y = -1$. *Om te zien of het punt* $(x,y) = (0,-1)$ *een minimum, maximum, of zadelpunt is, berekenen we de tweede orde afgeleiden. We hebben*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2e^y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= 2xe^y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2e^y + (x^2+y)e^y. \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,-1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/e & 0 \\ 0 & 1/e \end{pmatrix}.$$

Omdat de determinant van deze matrix positief is, en het linker bovenelement ook positief is, geeft het punt $(0,-1)$ *een minimum.*

Voorbeeld 7.13 *Beschouw het vlak* $V = \{2x - y + z = 1\}$ *en het punt* $(-4,1,3)$ *in* $\mathbb{R}^3$. *Wat is de kleinste afstand van dit punt tot het vlak? De afstand van* $(-4,1,3)$ *tot een punt* (x,y,z) *dat in* V *ligt, is gelijk aan* $\sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2}$. *Deze afstand willen we minimaliseren. Nu is de wortel uit* $(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2$ *minimaal precies als* $(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2$ *minimaal is, en kunnen we deze kwadratische functie minimaliseren. Voor* (x,y,z) *in* V *geldt*

$$z = 1 - 2x + y.$$

Als we dit in de kwadratische functie invullen, krijgen we een functie

$$f(x,y) = (x+4)^2 + (y-1)^2 + (y-2x-2)^2$$

van twee variabelen (x,y) *die we moeten minimaliseren. Bereken*

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x+4) - 4(y-2x-2) & 2(y-1) + 2(y-2x-2) \end{pmatrix}.$$

Beide elementen van de matrix $Df(x,y)$ *moeten nul zijn in een minimum. Dit levert de twee vergelijkingen*

$$\begin{cases} 2(x+4) - 4(y-2x-2) = 0, \\ 2(y-1) + 2(y-2x-2) = 0. \end{cases},$$

ofwel

$$\begin{cases} 10x - 4y + 16 = 0, \\ -4x + 4y - 6 = 0. \end{cases}.$$

De oplossing hiervan is $(x, y) = (-5/3, -1/6)$*, waarvoor* $f(-5/3, -1/6) = (14/6)^2 + (-7/6)^2 + (7/6)^2 = 49/6$*. De matrix van tweede orde partiële afgeleiden is*

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix},$$

waaraan we bevestigd zien dat het een minimum betreft. Ergo, de minimale afstand van $(-4, 1, 3)$ *tot het vlak* V *is* $\sqrt{49/6}$*, en het punt op* V *dat het dichtst bij* $(-4, 1, 3)$ *ligt, is* $(-5/3, -1/6, 25/6)$*.*

7.8 Newton's methode

In Sectie 5.7 hebben we gezien hoe numeriek een oplossing van een vergelijking met een onbekende gevonden kan worden. In het algemeen zal een stelsel van n vergelijkingen met evenveel onbekenden ook geïsoleerde oplossingen (denk hierbij aan een eindig aantal oplossingen) hebben.

Voorbeeld 7.14 *Beschouw de twee vergelijkingen*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 1, \\ 2xy &= 0. \end{cases} \tag{5}$$

in de onbekenden x, y*. Uit de tweede vergelijking halen we dat* x *of* y *of beide 0 moeten zijn. Als* $x = 0$*, geeft de eerste vergelijking* $-y^2 = 1$*. Dit is niet mogelijk. Als* $y = 0$*, geeft de eerste vergelijking* $x^2 = 1$*. Dit heeft oplossingen* $x = 1$ *en* $x = -1$*.*

De oplossingen van het stelsel (5) zijn de twee vectoren $(x, y) = (1, 0)$ *en* $(x, y) = (-1, 0)$*.*

In deze sectie wordt Newton's methode beschreven om zulke vergelijkingen op te lossen. We beperken ons in de beschrijving van Newton's methode tot twee vergelijkingen met twee onbekenden. Laat $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ een continu differentieerbare afbeelding zijn. Om de vergelijking $\mathbf{f}(x, y) = (0, 0)$ numeriek op te lossen, beschouwen we het volgende iteratieve proces. Neem een vector $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$. Gegeven (x_n, y_n) voor $n \geq 1$, laten we (x_{n+1}, y_{n+1}) bepaald zijn door

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) - [D\mathbf{f}(x_n, y_n)]^{-1}\, \mathbf{f}(x_n, y_n).$$

Dat wil zeggen, met

$$N(x, y) = (x, y) - [D\mathbf{f}(x_n, y_n)]^{-1}\, \mathbf{f}(x_n, y_n), \tag{6}$$

laten we

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = N(x_n, y_n). \tag{7}$$

Voorbeeld 7.15 *Kijkend naar Voorbeeld 7.14, schrijven we* $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 - y^2 - 1, 2xy)$*. Vergelijking (5) heeft dan de vorm* $\mathbf{f}(x, y) = (0, 0)$*. Er geldt*

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

De inverse $[D\mathbf{f}(x,y)]^{-1}$ hiervan wordt gegeven door

$$[D\mathbf{f}(x,y)]^{-1} = \frac{1}{4(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Immers,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

is de algemene formule voor een inverse van een twee bij twee matrix (die bestaat als de determinant $ad-bc$ ongelijk aan 0 is). Merk op dat $[D\mathbf{f}(x,y)]^{-1}$ bestaat als $(x,y) \neq (0,0)$. Om $N(x,y) = (x,y) - [D\mathbf{f}(x,y)]^{-1}\mathbf{f}(x,y)$ uit vergelijking (6) te bepalen, berekenen we

$$[D\mathbf{f}(x,y)]^{-1}\mathbf{f}(x,y) = \frac{1}{4(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2-y^2-1 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Uitwerken geeft

$$N(x,y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2(x^2+y^2)}, \frac{y}{2} - \frac{y}{2(x^2+y^2)} \right).$$

Newton's methode werkt als volgt. Neem aan dat $(\bar{x},\bar{y})$ een oplossing is van $\mathbf{f}(x,y)=0$ waarvoor $D\mathbf{f}(\bar{x},\bar{y})$ inverteerbaar is (dat wil zeggen, $[D\mathbf{f}(\bar{x},\bar{y})]^{-1}$ bestaat). Dan convergeert (x_n,y_n) gedefinieerd door (7) naar $(\bar{x},\bar{y})$ voor $n \to \infty$ ($\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ en $\lim_{n\to\infty} y_n = \bar{y}$), als de beginvector (x_1,y_1) dicht bij $(\bar{x},\bar{y})$ gekozen wordt. We zullen niet uitwerken hoe dicht (x_1,y_1) bij $(\bar{x},\bar{y})$ gekozen moet worden. In ieder geval levert Newton's methode een procedure om benaderingen van oplossingen te verbeteren. Door begincondities te proberen kunnen bovendien oplossingen gevonden worden.

In een oplossing $(\bar{x},\bar{y})$ van $\mathbf{f}(x,y)=0$ geldt dat $DN(\bar{x},\bar{y})$ gelijk aan de nulmatrix is. Hoewel we de achterliggende theorie van Newton's methode niet behandelen, is dit de reden dat de methode zo goed werkt en (x_{n+1},y_{n+1}) sneller dan exponentieel snel (in n) naar een oplossing convergeert.

7.9 Oefeningen

1. Bereken $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$, of bewijs dat de limiet niet bestaat.
2. Bereken $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$, of bewijs dat de limiet niet bestaat.
3. Bereken de eerste orde partiële afgeleiden van $f(x,y) = 3x^4 - x\sqrt{y}$.
4. Bereken de eerste orde partiële afgeleiden van $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x+2y}}$.
5. Bereken de eerste orde partiële afgeleiden van $(x,y,z) \mapsto x/(y-z)$.
6. Zij $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Bereken de eerste en tweede orde partiële afgeleiden van r.
7. Zij $\theta = \arccos(y/x)$. Bereken de eerste en tweede orde partiële afgeleiden van θ.
8. Vind alle tweede orde partiële afgeleiden van $f(x,y) = 4x^3 - xy^2$.
9. Vind alle tweede orde partiële afgeleiden van $(r,s,t) \mapsto r\cos(s+2t)$.

10. Vind alle tweede orde partiële afgeleiden van $f(x,y) = xe^{-2y}$.
11. Laat zien dat de functie $f(x,y) = -(x^2-1)^2-(x^2y-x-1)^2$ geen lokaal minimum en geen zadelpunten heeft. Doe dit door aan te tonen dat f precies twee kritieke punten heeft, die beide een maximum zijn.
12. Vind de vergelijking voor het raakvlak van $z = x^2 + y^2 + 4y$ aan het punt $(0, 1, 5)$.
13. Vind de vergelijking voor het raakvlak van $z = xe^y$ aan het punt $(1, 0, 1)$.
14. In Voorbeeld 7.7, bereken wanneer de determinant van de matrix $D\mathbf{f}(\alpha, \beta)$ van partiële afgeleiden 0 is. Wat betekent dit voor de afbeelding $\mathbf{f}$?
15. Vind de lineaire benadering van $f(x,y) = x^3\sqrt{y^2 + 16}$ in het punt $(2, 3)$ en gebruik dit om $f(1.98, 3.01)$ te benaderen.
16. Vind de lokale maxima en minima van $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$.
17. Vind de lokale maxima en minima van $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$.
18. De grijstonen in een zwart-wit foto worden beschreven met een functie f, die $[0,1] \times [0,1]$ afbeeldt op $[0,1]$. Ga voor de functie $f(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(2\pi x)\cos(2\pi y)$, met de interpretatie dat de waarden van f variëren van 0 voor wit tot 1 voor zwart, de betekenis na van maximale, minimale en zadelpunten. Bediscussieer de verzameling $\{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$ vanuit deze toepassing.

8 Uitwerkingen van geselecteerde oefeningen

2.3.5

Bereken $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Merk op dat teller en noemer van de breuk 0 zijn in $x=0$. We passen de regel van de L'Hôpital toe:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}.$$

2.3.17

Bereken $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-x$.

Vermenigvuldig de functie met $\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}$. Merk op dat $\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$. Dus $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1}=1$.

9 Antwoorden van geselecteerde oefeningen

2.3.2 0

2.3.4 $5/2$

2.3.6 1

2.3.8 $-1/(2\pi)$

2.3.10 ∞

2.3.12 1 en -1

2.3.14 $2/3$

2.3.16 ∞

2.3.18 $f(x)=1+1/(x-1)+1/(x-3)$

2.3.20 $1/3$

2.3.22 $-\infty$

2.3.24 1

5.8.2 $1+\frac{1}{x\sqrt{x}}$

5.8.4 $\frac{1}{1+\arcsin^2(\sqrt{x})}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}$

5.8.6 $\cos(\tan(\sqrt{1+x^3}))\frac{1}{\cos^2(\sqrt{1+x^3})}\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$

5.8.8 $45x^{44}+45x^{-46}$

5.8.10 $2x(\sqrt{x}+1)(5x^{2/3}-2)+(x^2+4)(\frac{1}{2\sqrt{x}})(x^2+4)+(x^2+4)(\sqrt{x}+1)((10/3)x^{-1/3})$

5.8.14 $f''(x)=-2\sin(x)-x\cos(x)$

5.8.16 $y = 9$

5.8.18 $y = \frac{2}{p^2+p} + \frac{-2(2p+1)}{(p^2+p)^2}(x-p)$ voor $p \neq 0$.

5.8.20 $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

5.8.26 $y = 3 - \frac{1}{2}x$

5.8.28 $y = -\frac{1}{2}x$

5.8.30 $11,5$ euro

5.8.40 $\ln(3) - \ln(2)$

6.9.2 $\frac{1}{2}\ln(2)$

6.9.4 $64\frac{47}{15}$

6.9.6 $-\sin(\cos(x)) + C$

6.9.8 $\frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$

6.9.10 $\frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$

6.9.15 $\frac{5}{24}\pi$

7.9.4 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\sqrt{x+2y} - x/(2\sqrt{x+2y})}{x+2y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{(x+2y)\sqrt{x+2y}}$

7.9.6 $\frac{\partial r}{\partial x} = x/r$, $\frac{\partial r}{\partial y} = y/r$, $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = 1/r - x^2/r^3$, $\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} = -xy/r^3$, $\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = 1/r - y^2/r^3$

7.9.8 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x$

7.9.10 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2e^{-2y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4xe^{-2y}$

7.9.12 $z = -1 + 6y$

7.9.16 In $(-4,1)$ is er een lokaal minimum, $f(-4,1) = -11$

10 Voorbeeldtentamens

Voorbeeldtentamen I

1. Bediscussieer de volgende limiet, $\lim_{x\to 1} e^{(x+1)/(x^2-1)}$.
2. Geef de vergelijking $y = ax + b$ van de lijn die raakt aan de grafiek van $x \mapsto 1 - x^2$ in het punt $(-1, 0)$.
3. Geef de Taylor benadering van orde 3 voor de functie $f(x) = \ln(1 + x)$ rond $x = 0$.
4. Bereken het volume van het kapje van een bol $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \frac{1}{2} \leq z \leq 1\}$.

5. Een hockey team speelt in een stadion met een capaciteit voor 15000 toeschouwers. Met een toegangsprijs van 12 euro, komen er gemiddeld 11000 toeschouwers. Een marktonderzoek geeft aan dat voor iedere euro prijsvermindering, de gemiddelde bezoekersaantallen met 1000 mensen toenemen. Bij welke toegangsprijs is de winst maximaal?

6. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y) \quad = \quad -(x^2 - 1)^2 - (x^2 y - x - 1)^2.$$

Bepaal de punten waar f een lokaal maximum, een lokaal minimum of een zadelpunt aanneemt.

Uitwerking voorbeeldtentamen I

1. Bediscussieer de volgende limiet, $\lim_{x\to 1} e^{(x+1)/(x^2-1)}$.

   Merk op dat $(x+1)/(x^2-1) = 1/(x-1)$ als $x \neq 1$. Er geldt $\lim_{x\downarrow 1} 1/(x-1) = \infty$ en $\lim_{x\uparrow 1} 1/(x-1) = -\infty$. Daarmee geldt $\lim_{x\downarrow 1} e^{(x+1)/(x^2-1)} = \infty$ en $\lim_{x\uparrow 1} e^{(x+1)/(x^2-1)} = 0$.

2. Geef de vergelijking $y = ax + b$ van de lijn die raakt aan de grafiek van $x \mapsto 1 - x^2$ in het punt $(-1, 0)$.

   De afgeleide van $f(x) = 1 - x^2$ is $f'(x) = -2x$; dus $f'(-1) = 2$. De raaklijn heeft dus een vergelijking $y = 2x + b$ waar b zodanig is dat de lijn het punt $(-1, 0)$ bevat. Dus $0 = 2(-1) + b$, zodat $b = 2$. Het antwoord is dus $y = 2x + 2$.

3. Geef de Taylor benadering van orde 3 voor de functie $f(x) = \ln(1 + x)$ rond $x = 0$.

   De derde orde Taylor benadering rond $x = 0$, $T_3(x)$ wordt gegeven door $T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3$. Bereken $f'(x) = 1/(1 + x)$, $f''(x) = -1/(1 + x)^2$ en $f'''(x) = 2/(1 + x)^3$. Dus $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$ en $f'''(0) = 2$. Omdat $f(0) = 1$ geldt

   $$T_3(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

4. Bereken het volume van het kapje van een bol $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \frac{1}{2} \leq z \leq 1\}$.

   Het volume wordt gegeven door de integraal $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(z)dz$, waar $f(z)$ de oppervlakte is van de doorsnijding van de bol met het vlak met constante z-coordinaat (gelijk aan z). Dit laatste is een schijf met straal $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 - z^2}$. De oppervlakte van zo'n schijf is $\pi(1 - z^2)$. Dus het gevraagde volume is

   $$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \pi(1 - z^2)dz = \pi(z - \frac{1}{3}z^3)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{5}{24}\pi.$$

5. Een hockey team speelt in een stadion met een capaciteit voor 15000 toeschouwers. Met een toegangsprijs van 12 euro, komen er gemiddeld 11000 toeschouwers. Een marktonderzoek geeft aan dat voor iedere euro prijsvermindering, de gemiddelde bezoekersaantallen met 1000 mensen toenemen. Bij welke toegangsprijs is de winst maximaal?

   De winst is het product van de toegangsprijs met het aantal toeschouwers. Definiëren we $12 + x$ voor de toegangsprijs, dan geldt $w(x) = (12 + x)(11000 - 1000x)$ voor de winst $w(x)$ in euro. Bereken, met de productregel, $w'(x) = (11000 - 1000x) - (12 + x)1000$. Aan de vergelijking $w'(x) = 0$ is voldaan als $-2000x = -1000$, dus $x = -\frac{1}{2}$. Omdat $w'' = -2000$ levert deze waarde van x een maximum. De gevraagde toegangsprijs is 11.5 euro.

6. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y) \quad = \quad -(x^2 - 1)^2 - (x^2 y - x - 1)^2.$$

Bepaal de punten waar f een lokaal maximum, een lokaal minimum of een zadelpunt aanneemt.

Bereken

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -4x(x^2 - 1) - 2(2xy - 1)(x^2 y - x - 1), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -2(x^2 y - x - 1)x^2. \end{aligned}$$

In een kritiek punten moeten beide partiële afgeleiden verdwijnen (nul zijn). Kijken we naar $\frac{\partial f}{\partial y}$, dan is dit nul als $x = 0$ of als $x^2 y - x - 1 = 0$. Als $x = 0$, dan kan $\frac{\partial f}{\partial x}$ niet nul zijn. Dus $x^2 y - x - 1 = 0$ en daarmee geeft $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ dat $x^2 - 1 = 0$. Merk op dat $x^2 - 1 = 0$ als $x = \pm 1$. De vergelijking $x^2 y - x - 1 = 0$ geeft een bijpassende y-waarde. De kritieke punten zijn dus $(-1, 0)$ en $(1, 2)$. Omdat f de som is van twee kwadraten (elk met een minteken) is het duidelijk dat beide punten een maximum leveren. Dit volgt ook uit een berekening met de Hessiaan, die hier achterwege wordt gelaten.

Voorbeeldtentamen II

1. Bereken de volgende limieten.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^3-1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$$

2. Bereken de volgende twee integralen.

$$\int_0^4 x\sqrt{16-3x}dx, \qquad \int_0^1 \frac{6x+1}{3x+2}dx$$

3. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x,y) \quad = \quad e^{4y-x^2-y^2}$$

   Bepaal de punten waar f een lokaal maximum, een lokaal minimum of een zadelpunt aanneemt.

4. Beschouw de ellips $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$. Wat is de oppervlakte van de grootste rechthoek die binnen de ellips geplaatst kan worden?