Goochelen en wiskunde

Tom Koornwinder en Dick Koornwinder

T.H.Koornwinder@uva.nl, dick.koornwinder@gmail.com

https://staff.fnwi.uva.nl/t.h.koornwinder/

Lezing tijdens het zesde lustrum van de
Wiskundige Studievereniging *Desda*,
Radboud Universiteit Nijmegen, 14 april 2016

laatst gewijzigd: 18 april 2016

Familie Koornwinder is niet van de straat maar . . .

van de laan (in Berkel, ZH)

portret van David Coornwinder († 1623), in bezit van het Louvre

Briefwisseling van Hugo Grotius

13 april 1623,
Van Hugo de Groot aan Willem de Groot

“Sententiarum in supplicio affectos exemplaria exspectabimus. Velim scire et quae ad populum locutus sit Corenwenderus.”

`www.dbnl.org/tekst/groo001brie02_01/groo001brie02_01_0245.php`

De (laatste) woorden tot het volk van (David) Coornwinder, waar Hugo de Groot naar vraagt, zie je op de volgende pagina.

Laatste woorden van David Coornwinder

Korenwinders leſte rede

Treurtooneel 1 deel, p. 483.

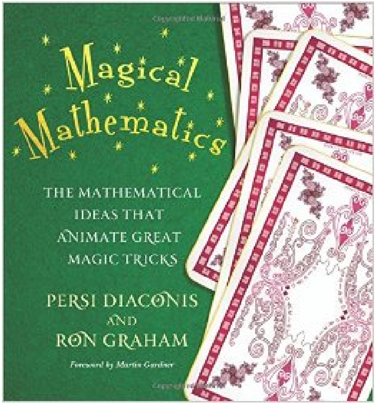
Daerna haelde de Geweldige, met ſijn Dienaers te paerde geſeten, Korenwinder wel vaſt gebonden, van de poorte. Dees quam ſoo haeſt op 't ſchavot niet, of hy ſagh met treurige oogen naer 't lichaem des Heeren van Groeneveldt: toen keerde hy ſich tot het volk 't welk hy dus aenſprak, *Met recht ſeit d'Apoſtel Paulus, die ſtaet ſie toe dat hy niet en valle, en de heilige Hiob heeft ook met reden geſeit, dat de menſch d'ongerech-*

tig-

MDCXXIII.

tigheit opſuipt als de aerde het water. Beide deſe ſpreuken heb ik aen mij ſelven bevonden waerachtig te ſijn. Daer door ontfang ik mijn recht. Bidt dan, beminde burgers, den almachtigen Godt dat hy my mijne ſonde vergeve. En heb ik u misdaen, vergeef my dat van gelijken. Eenige van d'omſtaenders riepen, *Ja ja*, en men hoorde hem verder ſeggen, *Indien gy my ook ergens in hebt misdaen, dat vergeef ik u van herten. Helpt een Chriſtelijk gebedt voor my doen. Hier mede begeef ik my tot Godt.* Daer op knielende, en Godt om genade hebbende aengeroepen, wierdt hy door den Beul van Dordrecht geblindt, en met den ſwaerde onthooft.

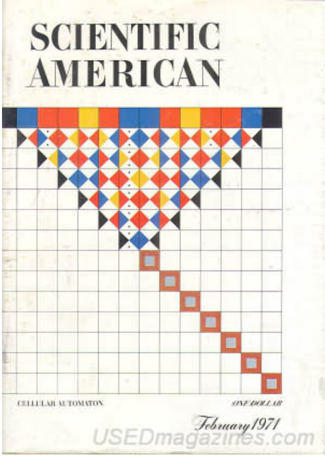
Sijn einde.



Persi Diaconis & Ron Graham, *Magical Mathematics*, Princeton University Press, 2012

Persi Diaconis

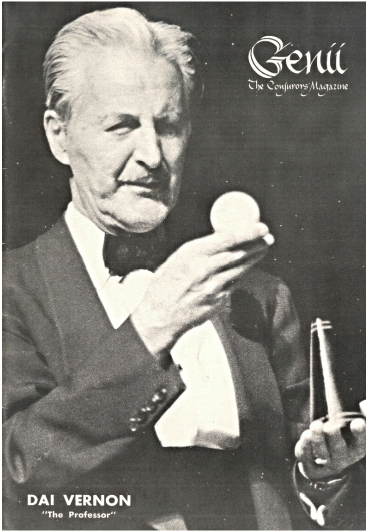
Martin Gardner



Mathematical recreations

Diaconis left home at 14 to travel with sleight-of-hand legend Dai Vernon.

Persi Diaconis



Dai Vernon, “The Professor”

Een kaarttruc van Gilbreath

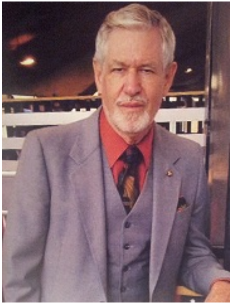
Vorm een stapel met afwisselend rode (R) en zwarte (Z) kaarten. Coupeer een of meer keren. Deel dan een aantal kaarten van die stapel (van bovenaf) uit op een nieuwe stapel. Voeg de twee stapels samen met de *riffle shuffle*. Deel telkens twee kaarten (van boven van de stapel genomen) uit aan mensen in het publiek. Iedereen blijkt een rode en een zwarte kaart te hebben gekregen.

Gilbreath Principle (1958)

Twee stapels kaarten.
Stapel 1 en 2 samen hebben eigenschap E:
totaal aantal kaarten is even, in beide stapels afwisselend R en Z, de twee stapels beginnen met verschillende kleur.

Schuif stapels in elkaar met riffle shuffle,
bekijk effect per twee kaarten op nieuwe stapel.

Eerste twee kaarten zijn:
òf eerste twee kaarten van stapel 1
òf eerste twee kaarten van stapel 2
òf eerste kaart van stapel 1 en stapel 2.
In alle gevallen een R en Z en de resterende stapel 1 en 2 hebben nog steeds eigenschap E.



Norman Gilbreath

Generalized Gilbreath Principle

Twee stapels samen hebben eigenschap E:
totaal aantal kaarten is een veelvoud van k (bijv. $k = 4$);
voor zekere j hebben kaarten in eerste rij nummers
$j+1 \pmod{k}, j+2 \pmod{k}, \ldots$ en hebben kaarten in tweede rij nummers $j \pmod{k}, j-1 \pmod{k}, \ldots$.

Dan zijn de eerste i kaarten van stapel 1 samen met de eerste $k-i$ kaarten van stapel 2 allemaal verschillend $\pmod{k}$ en de resterende stapel 1 en stapel 2 hebben weer eigenschap E.

Voorbeeld:

$$\left.\begin{array}{c} 11\ 12\ 13 \mid \ \mid 14 \mid 15\ 16 \\ 10 \mid 9\ 8\ 7\ 6 \mid 5\ 4\ 3 \mid 2\ 1 \end{array}\right\} \longrightarrow 11\ 12\ 10\ 13 \mid 9\ 8\ 7\ 6 \mid 5\ 4\ 14\ 3 \mid 15\ 2\ 1\ 16$$

Dus kaarten 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
komen in nieuwe volgorde 11 12 10 13 9 8 7 6 5 4 14 3 15 2 1 16

Permutaties

Definitie

Een *permutatie* is een bijectie σ van $\{1, 2, \ldots, n\}$, genoteerd als

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Definitie

Een permutatie σ van $\{1, 2, \ldots, n\}$ is *cyclisch* als alle elementen $1, \sigma(1), \sigma^2(1), \sigma^3(1), \ldots, \sigma^{n-1}(1)$ verschillend zijn (dus dan $\sigma^n(1) = 1$). We schrijven σ dan in *cykelnotatie* $\begin{pmatrix} 1 & \sigma(1) & \sigma^2(1) & \ldots & \sigma^{n-1}(1) \end{pmatrix}$.

Voorbeeld: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Definitie (Gilbreath permutation)

Een permutatie van $\{1, 2, \dots, n\}$ verkregen door een riffle shuffle toe te passen op $\quad j+1, j+2, \dots, n-1, n \quad$ en $\quad j, j-1, \dots, 2, 1$.

Noem $\sigma(i)$ het plaatsnummer waar i is terecht gekomen. Dan is σ een permutatie van $\{1, 2, \dots, n\}$ met

$\sigma(j+1) < \sigma(j+2) < \cdots < \sigma(n-1) < \sigma(n)$ en

$\sigma(j) < \sigma(j-1) < \cdots \sigma(2) < \sigma(1)$. Dus de "grafiek" van σ is eerst dalend en daarna stijgend: een *unimodale permutatie*.

Voorbeeld: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 \longrightarrow$

$$\left\{\begin{matrix} 11, 12, 13, 14, 15, 16 \\ 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 \end{matrix}\right\} \longrightarrow$$

$11, 12, 10, 13, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 14, 3, 15, 2, 1, 16.$

Dan stuurt $\sigma \quad 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$

naar $\quad 15, 14, 12, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 3, 1, 2, 4, 11, 13, 16$

Opmerking: Er zijn 2^{n-1} unimodale permutaties van $\{1, 2, \dots, n\}$. Bedenk zelf waarom.

Verband met geïtereerde kwadratische afbeeldingen

Laat $f_c(x) := x^2 + c \quad (c \in \mathbb{R})$. Dan

$f_c^2(x) = f_c(f_c(x)) = (x^2 + c)^2 + c = x^4 + 2cx^2 + c^2 + c,$

$f_c^3(x) = x^8 + 4cx^6 + 2c(3c+1)x^4 + 4c^2(c+1)x^2 + c^4 + 2c^3 + c^2 + c.$

Definitie

x is een *periodiek punt van* f_c *van periode* n als $f_c^n(x) = x$ maar $f_c^m(x) \neq x$ voor $m = 1, 2, \ldots, n-1$. Dan alle $f_c^m(x)$ $(m = 0, 1, \ldots, n-1)$ verschillend.

We zijn geïnteresseerd in de waarden van c waarvoor 0 een periodiek punt van f_c is. Kijk hiertoe naar de reële oplossingen c van de vergelijking $f_c^n(0) = 0$, een hogere-graads-vergelijking in c.

Voorbeeld $c = -1$ is een oplossing van $c^2 + c = 0$
en f_{-1} geeft $0 \to -1 \to 0 \to -1 \to \ldots$

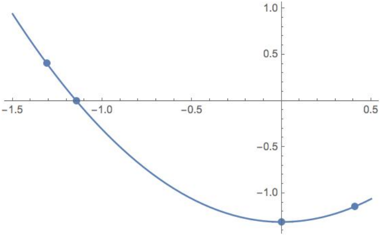
Voorbeeld $c = -1.75487\ldots$ is een oplossing van
$c^4 + 2c^3 + c^2 + c = 0$ en dan geeft f_c:
$0 \to -1.75487\ldots \to 1.32471\ldots \to 0$

Stelling

Zij 0 een periodiek punt van periode n van f_c. Zij $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ de ordening van de punten $f_c^m(0)$ $(m = 0, 1, \ldots, n-1)$. Definieer de permutatie σ door $f_c(x_{\sigma(j)}) = x_j$. Dan is σ cyclisch en unimodaal. Omgekeerd is elke cyclische unimodale permutatie zo te verkrijgen.

Voorbeeld

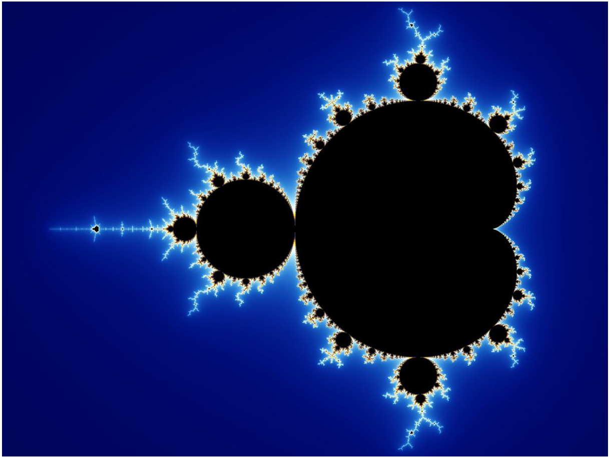
Voor $c = -1.3107\ldots$ is 0 een periodiek punt van periode 4 van f_c.
Dan $x_1 = 0.4072 > x_2 = 0 > x_3 = -1.1448\ldots > x_4 = -1.3107\ldots$
en f_c stuurt $x_2 \to x_4 \to x_1 \to x_3 \to x_2$,
dus σ stuurt $1, 2, 3, 4$ naar $4, 3, 1, 2$, inderdaad unimodaal en cyclisch.



Stelling wordt toegeschreven aan Milnor & Thurston. De enige vermelding van de stelling, zonder bewijs, is in *Magical Mathematics*.

Met f_c werkend op $\mathbb{C}$ de Mandelbrot-verzameling

$f_c(z) := z^2 + c$.
De *Mandelbrot set* is de verzameling M van die $c \in \mathbb{C}$ waarvoor $\{f_c^n(0)\}_{n=0,1,2,...}$ begrensd is.
M is compact en samenhangend, ligt binnen $\{c \in \mathbb{C} \mid |c| \le 2\}$.



Shuffles

De volgende shuffles van kaarten zijn o.a. bekend:

- Faro of Weave shuffle
- Overhand shuffle
- Riffle shuffle
- Hindu shuffle
- Reverse Faro shuffle
- Monge shuffle
- Down Under shuffle

De (reverse) Faro, Monge en Down Under shuffles zijn volkomen gedetermineerd, dus ideaal voor wiskundige behandeling. De Overhand, Riffle en Hindu shuffles beogen om de kaarten willekeurig door elkaar te brengen, maar slagen daar niet helemaal in, want ze behouden sommige structuur. Bovendien lenen ze zich tot vals spelen, maar dit geldt ook voor de Faro shuffle.

Bij de (perfecte) Faro shuffle (van $2n$ kaarten genummerd $0, 1, \ldots, 2n-1$) onderscheiden we de *out-shuffle* en de *in-shuffle*.

out-shuffle: $0, 1, 2, \ldots, 2n-1 \longrightarrow$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \ldots & n-1 \\ n & n+1 & \ldots & 2n-1 \end{Bmatrix} \longrightarrow 0, n, 1, n+1, \ldots, n-1, 2n-1$$

in-shuffle: $0, 1, 2, \ldots, 2n-1 \longrightarrow$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \ldots & n-1 \\ n & n+1 & \ldots & 2n-1 \end{Bmatrix} \longrightarrow n, 0, n+1, 1, \ldots, 2n-1, n-1$$

Permutaties π_0 (out-shuffle) en π_1 (in-shuffle) van $0, 1, 2, \ldots, 2n-1$:

$$\pi_0(k) := \begin{cases} 2k, & k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ 2(k-n)+1, & k = n, n+1, \ldots, 2n-1, \end{cases}$$

$$\pi_1(k) := \begin{cases} 2k+1, & k = 0, 1, \ldots, n-1, \\ 2(k-n), & k = n, n+1, \ldots, 2n-1. \end{cases}$$

Dus $\pi_\varepsilon(k) = 2k + \varepsilon \quad (k < n, \varepsilon \in \{0, 1\})$.

Dan geldt voor $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j \in \{0, 1\}$ dat

$$\pi_{\varepsilon_0}\pi_{\varepsilon_1}\ldots\pi_{\varepsilon_{j-1}}\pi_{\varepsilon_j}(0) = \varepsilon_0 + 2\varepsilon_1 + 2^2\varepsilon_2 + \cdots + 2^j\varepsilon_j, \quad \text{mits} < 2n.$$

Dus als we een getal p vanaf 0 willen bereiken met in- en out-shuffles, dan schrijven we p binair als $\varepsilon_j\varepsilon_{j-1}\ldots\varepsilon_1\varepsilon_0$ en passen dan bovenstaande regel toe.

Voorbeeld:

Laat $n \geq 6$. Het decimale getal $11 = 8 + 2 + 1$ heeft binaire voorstelling 1011. We bereiken dit vanaf 0 door

$$\begin{aligned} \pi_1(0) &= 1, \\ \pi_0(1) &= 2, \\ \pi_1(2) &= 5, \\ \pi_1(5) &= 11. \end{aligned}$$

Het aantal out-shuffles dat nodig is om $0, 1, \ldots, 2n-1$ weer in de oorspronkelijke toestand terug te brengen is de kleinste k zo dat $2^k = 1 \pmod{2n-1}$. Als $2n = 2^r$ dan $k = r$.
Als $2n$ geen macht van 2 is en $2^r < 2n \leq 2^{r+1}$ dan meestal $k > r+1$.
Bijv. als $2n = 6$ dan $k = 4$. Als $2n = 52$ dan $k = 8$ (want $2^8 - 1 = 5 \times 51$).

out-shuffle van $0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$:

$$\pi_0(k) := \begin{cases} 2k, & k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1, \\ 2(k - 2^{n-1}) + 1, & k = 2^{n-1}, 2^{n-1} + 1, \ldots, 2^n - 1. \end{cases}$$

Schrijf k in binaire notatie:

$$\pi_0(\varepsilon_{n-1}\varepsilon_{n-2}\ldots\varepsilon_0) = \varepsilon_{n-2}\ldots\varepsilon_0\varepsilon_{n-1}$$

Dus π_0 is cyclische permutatie van de binaire digits.

Monge shuffle

Gaspard Monge (1746–1818)

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots, 2n-1, 2n$$

$$3, 4, 5, 6, 7 \ldots, 2n-1, 2n \qquad\qquad 2, 1$$

$$5, 6, 7, \ldots, 2n-1, 2n \qquad\qquad 4, 2, 1, 3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2n, \ldots, 4, 2, 1, 3, \ldots, 2n-1$$

Monge : $1, 2, 3, \ldots, 2n-1, 2n \quad \longrightarrow \quad 2n, \ldots, 4, 2, 1, 3, 5, \ldots, 2n-1$

buurflip : $1 \longleftrightarrow 2, \quad 3 \longleftrightarrow 4, \quad \ldots, \quad 2n-1 \longleftrightarrow 2n$

spiegeling : $1 \longleftrightarrow 2n, \quad 2 \longleftrightarrow 2n-1, \quad \ldots, \quad n \longleftrightarrow n+1$

n-translatie : $1 \longleftrightarrow n+1, \quad 2 \longleftrightarrow n+2, \quad \ldots, \quad n \longleftrightarrow 2n$

$$\text{spiegeling} \circ \text{Monge} = \text{Monge} \circ \text{buurflip}$$

$$n\text{-translatie} \circ \text{Monge} = \text{Monge} \circ \text{spiegeling}$$

Operaties die met de spiegeling commuteren:

k-spiegeling (k deler van $2n$):
spiegeling in de $2n/k$ achtereenvolgende groepjes van k

out-shuffle : $1, 2, \ldots, 2n \quad \longrightarrow \quad 1, n+1, 2, n+2, \ldots, n, 2n$

Dus begin met een invariantie onder spiegeling. Na herhaalde k-spiegelingen en (reverse) out-shuffles en tenslotte een Monge shuffle hebben we een invariantie onder n-translatie.

Een mogelijke kaarttruc begint met een gepprepareerd spel $1, 2, \ldots, 2n$ met alleen schoppen- en klaveren-kaarten en zo dat k en $2n + 1 - k$ altijd partnerkaarten zijn: de ene schoppen, de ander klaveren en dezelfde kaartwaarde, dus een invariantie onder spiegeling. Voer daar herhaalde k-spiegelingen en (reverse) out-shuffles op uit. De invariantie onder spiegeling blijft behouden. Voer nu de Monge shuffle uit. De partnerkaarten zullen nu op afstand n van elkaar zitten.

Neem nu de bovenste kaart van de stapel af en toon die aan het publiek. Voer op de resterende 2n-1 kaarten de down-and-under-shuffle uit, zie volgende pagina's. Daarbij blijft uiteindelijk 1 kaart over. Zoals we zullen zien, is dat bij $n = 6$ juist de kaart die op plaats $n + 1$ zat, de partnerkaart van de bovenste kaart.

down-and-under shuffle

$$\begin{array}{rr}
1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n & \\
3, 4, 5, 6, \ldots, n, 1 & 2 \\
5, 6, \ldots, n, 1, 3 & 4, 2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
i_1, i_2 & j_1, j_2, \ldots, 4, 2 \\
i_2 & i_1, j_1, j_2, \ldots, 4, 2
\end{array}$$

Wat is i_2, gegeven n?

We willen dit toepassen als begonnen wordt met $1, 2, \ldots, 2n$ met een invariantie onder n-translatie en als kaart 1 uitgenomen wordt. We willen graag dat de down-and-under shuffle, toegepast op $2, 3, \ldots, 2n$ de partner-kaart $n + 1$ van de (nu bekende) kaart 1 levert, dus juist de centrale kaart in $2, 3, \ldots, 2n$.

Stelling

De down-and-under shuffle toegepast op $1, 2, \ldots, n$ *geeft als laatst overgebleven kaart* $k = 2(n - 2^r)$*, waarbij* $2^r < n \leq 2^{r+1}$*.*

Bewijs Merk eerst op dat kaarten in de eerste stapel op plaatsen $3, 4, \ldots, n$ na een stap in de shuffle twee plaatsen hoger komen, terwijl de kaart op plaats 2 *under* gaat en op plaats 1 *down* gaat.

Merk ook op dat een kaart op de laatste plaats n *down* gaat als n oneven is of na $\frac{1}{2}n$ stappen op de laatste plaats $\frac{1}{2}n$ komt als n even is. Dus een kaart op de laatste plaats n eindigt als enige desda $n = 2^r$ voor zekere r.

Dus k moet even zijn, want anders na $\frac{1}{2}(k-1)$ stappen op plaats 1 en daarna *down*. Kaart k (k even) is na $\frac{1}{2}k$ stappen op de laatste plaats $n - \frac{1}{2}k$. Deze eindigt als enige desda $n - \frac{1}{2}k = 2^r$ voor zekere r. Omdat $\frac{1}{2}n \leq n - \frac{1}{2}k < n$ volgt er dat $2^r < n \leq 2^{r+1}$. $\square$

Pas nu de down-and-under shuffle toe op $1, 2, \ldots, 2n-1$. De laatst overgebleven kaart is de centrale kaart n desda

$$n = 2(2n-1-2^r), \quad \text{dus} \quad n = \tfrac{2}{3}(2^r+1)$$

Dus $2^r + 1$ moet deelbaar zijn door 3. Dit geldt desda r is oneven. Bijvoorbeeld:

$r = 1$, $n = 2$, $2n-1 = 3$;

$r = 3$, $n = 6$, $2n-1 = 11$;

$r = 5$, $n = 22$, $2n-1 = 43$.