Sferische harmonischen, oud en nieuw

Tom Koornwinder

Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam
thkmath@xs4all.nl
https://staff.fnwi.uva.nl/t.h.koornwinder/

Voordracht tijdens een bijeenkomst in Groningen op 5 november 2021
ter viering van het 50-jarig hoogleraarschap aan de RU Groningen
van prof. dr. Boele Braaksma

Boele opponeert tijdens mijn promotie bij de UvA in 1975

STICHTING

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

ZW 1968–016

Voordracht in de seriez

"Elementaire onderwerpen vanuit een hoger standpunt belicht"

Prof. Dr. B.L.J. Braaksma

Jacobi and Gegenbauer Polynomials as Spherical Harmonics.

Mathematisch Centrum, Tweede Boerhaavestraat

JACOBI POLYNOMIALS AS SPHERICAL HARMONICS

BY

B. L. J. BRAAKSMA AND B. MEULENBELD

(Communicated by Prof. A. C. ZAANEN at the meeting of March 30, 1968)

Proc. KNAW, Series A, 71 = Indag. Math. 30 (1968), 384–389

Sferische harmonischen

Laplace-operator op $\mathbb{R}^d$: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$.

Ω_d : sfeer in $\mathbb{R}^d$ met straal 1.

Definitie

Sferische harmonischen van graad n op Ω_d zijn beperkingen tot Ω_d van harmonische homogene polynomen op $\mathbb{R}^d$ van graad n. $\mathcal{H}_n$ is de lineaire ruimte van al deze functies.

- De orthogonale groep $\mathrm{O}(d)$ werkt op $\mathcal{H}_n$.
- De representatie van $\mathrm{O}(d)$ op $\mathcal{H}_n$ is irreducibel.
- $L^2(\Omega_d) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$, orthogonale directe som.

Ultrasferische polynomen als sferische harmonischen

Jacobi-polynomen $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, graad n, parameters $\alpha, \beta > -1$,

$$\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \, dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Geval $\alpha = \beta$: *ultrasferische* (of *Gegenbauer*-)polynomen.

Stelling

Voor $\alpha = \frac{1}{2}(d-3)$ is $f\colon \xi \mapsto P_n^{(\alpha,\alpha)}(\xi_1)$ een (zonale) sferische harmonische van graad n op Ω_d.

- $Tf = f$ als $T \in \mathrm{O}(d-1)$ (stabilisator van e_1 in $\mathrm{O}(d)$).
- Elke $\mathrm{O}(d-1)$-invariante $g \in \mathcal{H}_n$ is constante keer f.
- $\xi \mapsto (\xi_1 + i\xi_2)^n$ zit in $\mathcal{H}_n$.
  $\mathrm{O}(d-1)$-symmetrisatie hiervan geeft $f(\xi)/f(e_1) \Longrightarrow$ integraalrepresentatie voor $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ (van Laplace-type).

Jacobi-polynomen als sferische harmonischen

Stelling (Braaksma & Meulenbelt)

Voor $d = p + q$, $\alpha = \frac{1}{2}p - 1$, $\beta = \frac{1}{2}q - 1$ *is*
$f\colon \xi \mapsto P_n^{(\alpha,\beta)}\big(-(\xi_1^2 + \cdots + \xi_p^2) + (\xi_{p+1}^2 + \cdots + \xi_{p+q}^2)\big)$
een sferische harmonische van graad $2n$ *op* Ω_d *.*

- $Tf = f$ als $T \in \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$.
- Elke $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$-invariante $g \in \mathcal{H}_{2n}$ is constante keer f.
- $\xi \mapsto (\xi_1 + \mathrm{i}\xi_{p+1})^{2n}$ zit in $\mathcal{H}_{2n}$.
  $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$-symmetrisatie hiervan geeft $f(\xi)/f(e_1) \Longrightarrow$ dubbelintegraalrepresentatie voor $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Dijksma & K, Indag. Math. (1971)

Voor $d = p + q$, $\alpha = \frac{1}{2}p - 1$, $\beta = \frac{1}{2}q - 1$, $\gamma = \alpha + \beta + \frac{1}{2}$, $\eta \in \Omega_d$ is $\xi \to P_{2n}^{(\gamma,\gamma)}(\langle \xi, \eta \rangle)$ een sferische harmonische van graad $2n$.
$\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$-symmetrisatie hiervan geeft een dubbelintegraal-representatie voor $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(y)$ in termen van $P_{2n}^{(\gamma,\gamma)}(z)$.

Complexe sferische harmonischen

$z = x + \mathrm{i}y \leftrightarrow (x,y)\colon \mathbb{C}^d \leftrightarrow \mathbb{R}^{2d}$; eenheidssfeer Ω_{2d}.

$$\frac{1}{4}\Delta = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial y_d^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \overline{z_1}} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial z_d \partial \overline{z_d}}\,.$$

Definitie

Complexe sferische harmonischen van graad (m,n) *op* Ω_{2d} zijn beperkingen tot Ω_{2d} van polynomen $p(z_1,\ldots,z_d,\overline{z_1},\ldots,\overline{z_d})$, harmonisch en homogeen van graad m resp. n in de z_i resp. $\overline{z_i}$. $\mathcal{H}_{m,n}$ is de lineare ruimte van al deze functies.

- De unitaire groep $\mathrm{U}(d)$ werkt op $\mathcal{H}_{m,n}$.
- De representatie van $\mathrm{U}(d)$ op $\mathcal{H}_{m,n}$ is irreducibel.

Zernike-polynomen $R^{\alpha}_{m,n}(z)$

$$R^{\alpha}_{m,n}(re^{i\theta}) = \text{const.}\, r^{|m-n|} e^{i(m-n)\theta} P^{(\alpha,|m-n|)}_{m\wedge n}(2r^2-1) \quad (m,n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

$$\int_{x^2+y^2<1} R^{\alpha}_{m,n}(z)\, \overline{R^{\alpha}_{k,l}(z)}\, (1-x^2-y^2)^{\alpha}\, dx\, dy = 0 \quad ((m,n) \neq (k,l)).$$

F. Zernike, Physica 1 (1934) ($\alpha = 0$).

F. Zernike & H.C. Brinkman, Proc. KNAW 38 (1935) (algemene $\alpha > -1$).

Nobelprijs; ASML.

Frits Zernike

Zernike-polynomen als complexe sferische harmonischen

Stelling (K, 1972)

$f\colon \zeta \mapsto R^{d-2}_{m,n}(\zeta_1)$ is een (zonale) complexe sferische harmonische van graad (m,n) op $\Omega_{2d} \subset \mathbb{C}^d$.

- $Tf = f$ als $T \in \mathrm{U}(d-1)$ (stabilisator van e_1 in $\mathrm{U}(d)$).
- Elke $\mathrm{U}(d-1)$-invariante $g \in \mathcal{H}_{m,n}$ is constante keer f.
- $\zeta \mapsto (a_1\zeta_1 + \cdots + a_d\zeta_d)^m(b_1\overline{\zeta_1} + \cdots + b_d\overline{\zeta_d}\,)^n$ zit in $\mathcal{H}_{m,n}$ als $a_1b_1 + \cdots + a_db_d = 0$. Hieruit door $U(d-1)$-symmetrisatie een dubbelintegraalrepresentatie voor $R^{d-2}_{m,n}$.
- Ook productformule en additieformule voor $R^{d-2}_{m,n}$.
- $R^{\alpha}_{n,n}(re^{i\theta}) = \mathrm{const.}\, P_n^{(\alpha,0)}(2r^2-1) \Rightarrow$ ook zulke formules voor Jacobi-polynomen.
- Dezelfde resultaten verschenen wat eerder in Russischtalige artikelen door Vilenkin en R.L. Šapiro.

Wortelstelsels en spiegelingsgroepen

Spiegeling in $\mathbb{R}^d$ t.o.v. orthoplement van niet-nul vector α:

$$\sigma_\alpha(x) = x - 2\,\frac{\langle x, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\,\alpha \quad (x \in \mathbb{R}^d).$$

Wortelstelsel R in $\mathbb{R}^d$:
eindige $R \subset \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ zo dat $\sigma_\alpha R = R$ als $\alpha \in R$.

Neem aan: $\pm\alpha$ zijn enige veelvouden in R van $\alpha \in R$.

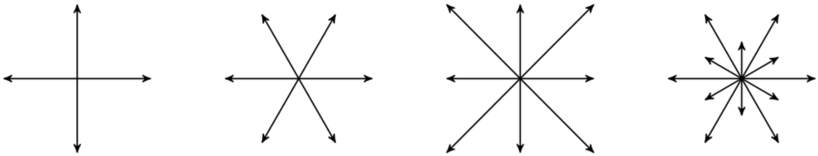
Spiegelingsgroep W:
eindige groep voortgebracht door de σ_α ($\alpha \in R$).

Multipliciteiten k_α ($\alpha \in R$): $k_\alpha \geq 0$, W-invariant.

R opgesplitst in R_+ en $-R_+$, gescheiden door hypervlak.

$h(x) = \prod_{\alpha \in R_+} |\langle x, \alpha\rangle|^{k_\alpha}$ ($x \in \mathbb{R}^d$), W-invariant.

2D wortelstelsels



$A_1 \times A_1$ $\quad$ A_2 $\quad$ $B_2 \cong C_2$ $\quad$ G_2

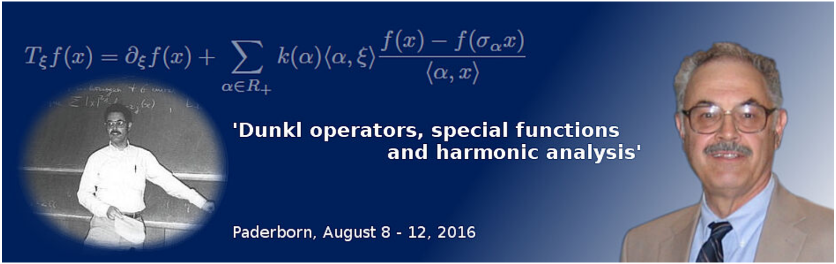
Ook niet-kristallografische wortelstelsels met *W* de dihedrale groep.

Definitie (Dunkl, Math. Z., 1988)

Dunkl-operatoren T_j ($j = 1, \ldots, d$) werkend op $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$(T_j f)(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) + \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k_\alpha \alpha_j \frac{f(x) - f(\sigma_\alpha(x))}{\langle x, \alpha \rangle} \qquad (x \in \mathbb{R}^d).$$

De operatoren T_j commuteren.



673 artikelen in MathSciNet met *Dunkl* in de titel.

h-harmonischen op Ω_d

Dunkl–Laplace-operator: $\Delta_h = \sum_{j=1}^{d} T_j^2$.

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ is *h-harmonisch* als $\Delta_h f = 0$.

Definitie

h-Harmonischen van graad n op Ω_d zijn de beperkingen tot Ω_d van h-harmonische homogene polynomen op $\mathbb{R}^d$ van graad n.
$\mathcal{H}_n$ is de lineaire ruimte van al deze functies.

- inproduct: $\langle f, g\rangle_h = \int_{\Omega_d} f(\xi)g(\xi)h(\xi)^2\, d\omega(\xi)$.
- $L^2(\Omega_d, h^2 d\omega) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$, orthogonale directe som.
- $\Delta_h = L_h + D_h$ met
  $L_h f = h^{-1}(\Delta(fh) - f\Delta h)$ (differentiaaloperator) en
  $$(D_h f)(x) = -\sum_{\alpha\in R} k_\alpha \|\alpha\|^2 \frac{f(x) - f(\sigma_\alpha x)}{\langle x, \alpha\rangle^2} \text{ (reflectie-operator).}$$

q-harmonische polynomen (reële geval)

$\mathcal{A}$: algebra met generatoren $x_1, \ldots, x_d$ en relaties

$$x_i x_j = q x_j x_i \quad (i < j).$$

q-dilataties γ_i: $p(x_1, \ldots, x_d) \mapsto p(x_1, \ldots, x_{i-1}, q x_i, x_{i+1}, \ldots, x_d)$.

q-afgeleiden ∂_i: $p(x_1, \ldots, x_d) \mapsto \dfrac{((\gamma - \gamma^{-1})p)(x_1, \ldots, x_d)}{q - q^{-1}}\, x_i^{-1}$.

kwadratische vorm: $Q = x_1^2 + q^{-1} x_2^2 + \cdots + q^{-d+1} x_d^2$.

q-Laplace-operator: $\Delta = q^{d-1}\partial_1^2 + q^{d-2}\partial_2^2 + \cdots + \partial_d^2$.

$p \in \mathcal{A}$ is *q-harmonisch* als $\Delta p = 0$.

$\mathcal{A}_n$: ruimte van homogene polynomen van graad n in $\mathcal{A}$.

$\mathcal{H}_n$: ruimte van q-harmonische polynomen in $\mathcal{A}_n$.

$$\mathcal{A}_n = \bigoplus_{j=0,\ldots,\lfloor n/2 \rfloor} Q^j \mathcal{H}_{n-2j}.$$

Complexe q-harmonische polynomen

$\mathcal{Z}$: $*$-algebra met generatoren $z_1, \ldots, z_d, w_1, \ldots, w_d$, involutie $z_i^* = w_i$, en relaties

$$z_i z_j = q z_j z_i,\ w_j w_i = q w_i w_j\ (i < j), \quad w_i z_j = q z_j w_i\ (i \neq j),$$
$$w_i z_i = z_i w_i + (1 - q^2) \sum_{k<i} z_k w_k \,.$$

q-afgeleiden ∂_i en $\overline{\partial}_i$ werkend op bases van $\mathcal{Z}$ $\left([a] = \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}\right)$:

$$\partial_i(z_1^{\lambda_1} \ldots z_d^{\lambda_d} w_d^{\mu_d} \ldots w_1^{\mu_1}) = [\lambda_i] q^{\lambda_{i+1} + \cdots \lambda_d} z_1^{\lambda_1} \ldots z_i^{\lambda_i - 1} \ldots z_d^{\lambda_d} w_d^{\mu_d} \ldots w_1^{\mu_1},$$
$$\overline{\partial}_i(w_1^{\lambda_1} \ldots w_d^{\lambda_d} z_d^{\mu_d} \ldots z_1^{\mu_1}) = [\lambda_i] q^{-(\lambda_{i+1} + \cdots \lambda_d)} w_1^{\lambda_1} \ldots w_i^{\lambda_i - 1} \ldots w_d^{\lambda_d} z_d^{\mu_d} \ldots z_1^{\mu_1}.$$

$Q = \sum_{j=1}^{d} z_j w_j$ genereert het centrum van $\mathcal{Z}$.

q-Laplace operator: $\Delta = \partial_1 \overline{\partial}_1 + \cdots \partial_d \overline{\partial}_d$.

$\mathcal{Z}_{m,n}$: ruimte van $p \in \mathcal{Z}$ die homogeen van graad m in de z_i en van graad n in de w_i zijn.

$$\mathcal{H}_{m,n} = \{p \in \mathcal{Z}_{m,n} \mid \Delta_q p = 0\}\,.$$

$$\mathcal{Z}_{m,n} = \bigoplus_{j=0,\ldots,m \wedge n} Q^j \mathcal{H}_{m-j,n-j}\,.$$

Vergelijking van reële en complexe q-geval

Complexe q-geval:
Noumi et al. (1993), Floris (1997), Iorgov & Klimyk (2003).

- Hopf-algebra $\mathcal{A}(\mathrm{U}_q(d))$ werkt op $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}_{m,n}, \mathcal{H}_{m,n}$.
- q-Zernike-polynomen als $\mathrm{U}_q(d-1)$-invariant in $\mathcal{H}_{m,n}$.
- Uitdelen naar $Q = 1$ geeft quantumsfeer en complexe quantum-sferische harmonischen.

Reële q-geval:
Noumi et al. (1996), Iorgov & Klimyk (2001).

- Algebra $U'_q(\mathrm{so}(d))$ (geen Hopf-algebra) werkt op $\mathcal{A}, \mathcal{A}_n, \mathcal{H}_n$.
- Variant van *big q-ultrasherical polynomials* als $U'_q(\mathrm{so}(d-1))$-invariant in $\mathcal{H}_n$.
- Uitdelen naar $Q = 1$ niet mogelijk.
- Complexe geval geen verfijning van reële geval.

Hendrik Werkman (De Ploeg),
Ochtendwandeling in de herfst

Boele, nog goede
jaren toegewenst.