Ontwikkeling van het functiebegrip

in: Wiskunde als Wetenschap

Tom Koornwinder

thk@science.uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut, UvA

Moderne definitie van een functie

X en Y deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$.

Functie $f\colon X \to Y$ voegt aan elke $x \in X$ een unieke $y = f(x)$ in Y toe.

Moderne definitie van een functie

X en Y deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$.

Functie $f\colon X \to Y$ voegt aan elke $x \in X$ een unieke $y = f(x)$ in Y toe.

Specificatie van f?

Moderne definitie van een functie

X en Y deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$.

Functie $f : X \to Y$ voegt aan elke $x \in X$ een unieke $y = f(x)$ in Y toe.

Specificatie van f?

- f willekeurig

Moderne definitie van een functie

X en Y deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$.

Functie $f\colon X \to Y$ voegt aan elke $x \in X$ een unieke $y = f(x)$ in Y toe.

Specificatie van f?

- f willekeurig
- f in een functieklasse,
  bijv. $f \in C(X)$

Moderne definitie van een functie

X en Y deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$.

Functie $f: X \to Y$ voegt aan elke $x \in X$ een unieke $y = f(x)$ in Y toe.

Specificatie van f?

- f willekeurig
- f in een functieklasse, bijv. $f \in C(X)$
- door een formule

  bijv. $f(x) = (3x+5)^{10} - e^x$

Moderne definitie van een functie

X en Y deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$.

Functie $f\colon X \to Y$ voegt aan elke $x \in X$ een unieke $y = f(x)$ in Y toe.

Specificatie van f?

- f willekeurig
- f in een functieklasse,
  bijv. $f \in C(X)$
- door een formule

  bijv. $f(x) = (3x+5)^{10} - e^x$

  of $\quad f(x) = \int_0^x y^{7/3}(1-y)^{13/9}\,dy$

Specificatie van f (vervolg)

- met een voorschrift,
  bijv. $f(x)$ is unieke oplossing van differentiaal
  vergelijking met beginvoorwaarden

Specificatie van f (vervolg)

- met een voorschrift,
  bijv. $f(x)$ is unieke oplossing van differentiaal vergelijking met beginvoorwaarden

  of $f(k) = y_k$ met $\pi = 3.y_1y_2y_3\ldots = 3.141\ldots$

Specificatie van f (vervolg)

- met een voorschrift,
  bijv. $f(x)$ is unieke oplossing van differentiaal vergelijking met beginvoorwaarden

  of $f(k) = y_k$ met $\pi = 3.y_1y_2y_3\ldots = 3.141\ldots$
- door een tabel die voor elke $x \in X$ een $f(x) \in Y$ geeft.
  Hier moet X eindig zijn.

Specificatie van f (vervolg)

- met een voorschrift,
  bijv. $f(x)$ is unieke oplossing van differentiaal vergelijking met beginvoorwaarden

  of $f(k) = y_k$ met $\pi = 3.y_1y_2y_3\ldots = 3.141\ldots$
- door een tabel die voor elke $x \in X$ een $f(x) \in Y$ geeft.
  Hier moet X eindig zijn.
- door een grafiek van de functie.
  Dan voor elke $x \in X$ slechts een benaderende waarde van y.

Specificatie van f (vervolg)

- met een voorschrift,
  bijv. $f(x)$ is unieke oplossing van differentiaal vergelijking met beginvoorwaarden

  of $f(k) = y_k$ met $\pi = 3.y_1y_2y_3\ldots = 3.141\ldots$
- door een tabel die voor elke $x \in X$ een $f(x) \in Y$ geeft.
  Hier moet X eindig zijn.
- door een grafiek van de functie.
  Dan voor elke $x \in X$ slechts een benaderende waarde van y.
- door een procedure in een computerprogramma die bij input x output y geeft.

Functiebegrip rond 1700

Wat miste de wiskundige in de 17de en 18de eeuw om ons functiebegrip te vatten?

Functiebegrip rond 1700

Wat miste de wiskundige in de 17de en 18de eeuw om ons functiebegrip te vatten?

Hij miste erg veel:

Functiebegrip rond 1700

Wat miste de wiskundige in de 17de en 18de eeuw om ons functiebegrip te vatten?

Hij miste erg veel:

- geen verzamelingsbegrip en afbeeldingsbegrip

Functiebegrip rond 1700

Wat miste de wiskundige in de 17de en 18de eeuw om ons functiebegrip te vatten?

Hij miste erg veel:

- geen verzamelingsbegrip en afbeeldingsbegrip
- geen precieze definitie van $\mathbb{R}$

Functiebegrip rond 1700

Wat miste de wiskundige in de 17de en 18de eeuw om ons functiebegrip te vatten?

Hij miste erg veel:

- geen verzamelingsbegrip en afbeeldingsbegrip
- geen precieze definitie van $\mathbb{R}$
- geen goede notatie voor functies

Functiebegrip rond 1700

Wat miste de wiskundige in de 17de en 18de eeuw om ons functiebegrip te vatten?

Hij miste erg veel:

- geen verzamelingsbegrip en afbeeldingsbegrip
- geen precieze definitie van $\mathbb{R}$
- geen goede notatie voor functies
- naïef gebruik van oneindig groot en oneindig klein

Functiebegrip rond 1700

Wat miste de wiskundige in de 17de en 18de eeuw om ons functiebegrip te vatten?

Hij miste erg veel:

- geen verzamelingsbegrip en afbeeldingsbegrip
- geen precieze definitie van $\mathbb{R}$
- geen goede notatie voor functies
- naïef gebruik van oneindig groot en oneindig klein
- geen precieze definitie van limiet, afgeleide en integraal

Functiebegrip rond 1700

Wat miste de wiskundige in de 17de en 18de eeuw om ons functiebegrip te vatten?

Hij miste erg veel:

- geen verzamelingsbegrip en afbeeldingsbegrip
- geen precieze definitie van $\mathbb{R}$
- geen goede notatie voor functies
- naïef gebruik van oneindig groot en oneindig klein
- geen precieze definitie van limiet, afgeleide en integraal
- ander continuïteitsbegrip

Functiebegrip rond 1700

Wat miste de wiskundige in de 17de en 18de eeuw om ons functiebegrip te vatten?

Hij miste erg veel:

- geen verzamelingsbegrip en afbeeldingsbegrip
- geen precieze definitie van $\mathbb{R}$
- geen goede notatie voor functies
- naïef gebruik van oneindig groot en oneindig klein
- geen precieze definitie van limiet, afgeleide en integraal
- ander continuïteitsbegrip
- geen rigoreuze bewijzen

Functiebegrip rond 1700

Wat miste de wiskundige in de 17de en 18de eeuw om ons functiebegrip te vatten?

Hij miste erg veel:

- geen verzamelingsbegrip en afbeeldingsbegrip
- geen precieze definitie van $\mathbb{R}$
- geen goede notatie voor functies
- naïef gebruik van oneindig groot en oneindig klein
- geen precieze definitie van limiet, afgeleide en integraal
- ander continuïteitsbegrip
- geen rigoreuze bewijzen
- denkwijze meer meetkundig dan algebraïsch

Functiebegrip rond 1700

Wat miste de wiskundige in de 17de en 18de eeuw om ons functiebegrip te vatten?

Hij miste erg veel:

- geen verzamelingsbegrip en afbeeldingsbegrip
- geen precieze definitie van $\mathbb{R}$
- geen goede notatie voor functies
- naïef gebruik van oneindig groot en oneindig klein
- geen precieze definitie van limiet, afgeleide en integraal
- ander continuïteitsbegrip
- geen rigoreuze bewijzen
- denkwijze meer meetkundig dan algebraïsch
- alleen functies gegeven door een mooie expliciete formule

De zeventiende eeuw

Geen functies maar krommen in het vlak.

Dus bijv. niet $f(x) = x - x^2$ maar $x^2 - x + y = 0$.

De zeventiende eeuw

Geen functies maar krommen in het vlak.

Dus bijv. niet $f(x) = x - x^2$ maar $x^2 - x + y = 0$.

Andere meetkundige grootheden hangen af van het punt op de kromme. Bijv.:
abscis, ordinaat, booglengte, tangent, subtangent, normaal, subnormaal.

De zeventiende eeuw

Geen functies maar krommen in het vlak.

Dus bijv. niet $f(x) = x - x^2$ maar $x^2 - x + y = 0$.

Andere meetkundige grootheden hangen af van het punt op de kromme. Bijv.:
abscis, ordinaat, booglengte, tangent, subtangent, normaal, subnormaal.

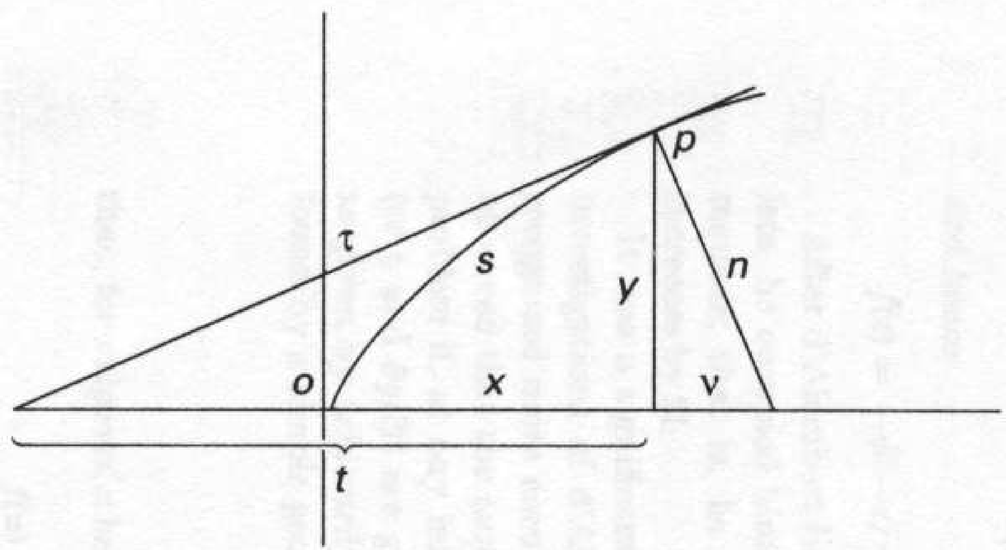


FIGURE 12.1

Quantities connected with a curve: x is the abscissa, y the ordinate, s the arc-length, t the subtangent, τ the tangent, n the normal, and ν the subnormal.

Newton (1642–1727)

Newton (1642–1727)

Bij Newton doorloopt het punt de kromme in de tijd.
Alle verdere grootheden hangen daardoor ook van de tijd af.

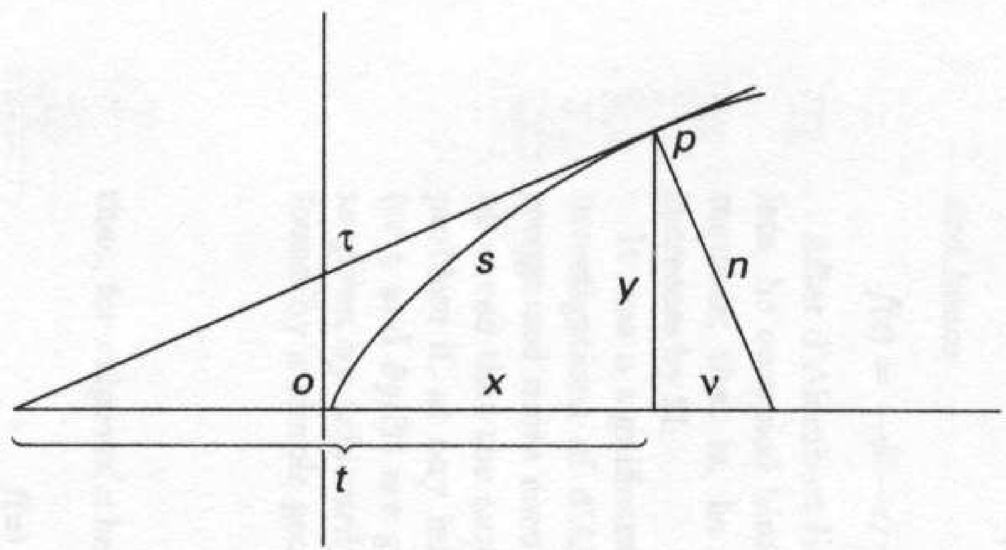


FIGURE 12.1

Quantities connected with a curve: x is the abscissa, y the ordinate, s the arc-length, t the subtangent, τ the tangent, n the normal, and ν the subnormal.

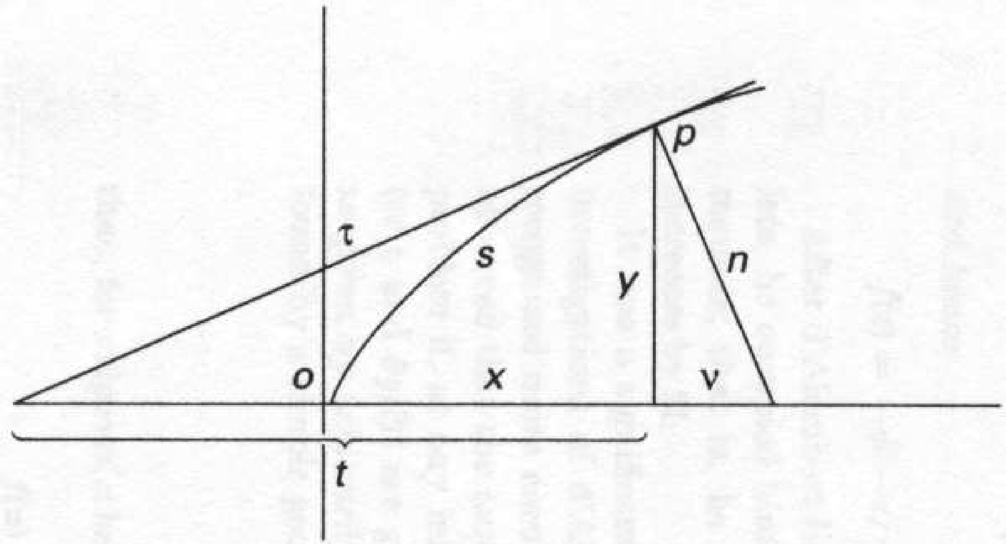
Leibniz (1646–1716)

Leibniz (1646–1716)

Leibniz gebruikt voor het eerst het woord *functie*.

FIGURE 12.1

Quantities connected with a curve: x is the abscissa, y the ordinate, s the arc-length, t the subtangent, τ the tangent, n the normal, and ν the subnormal.



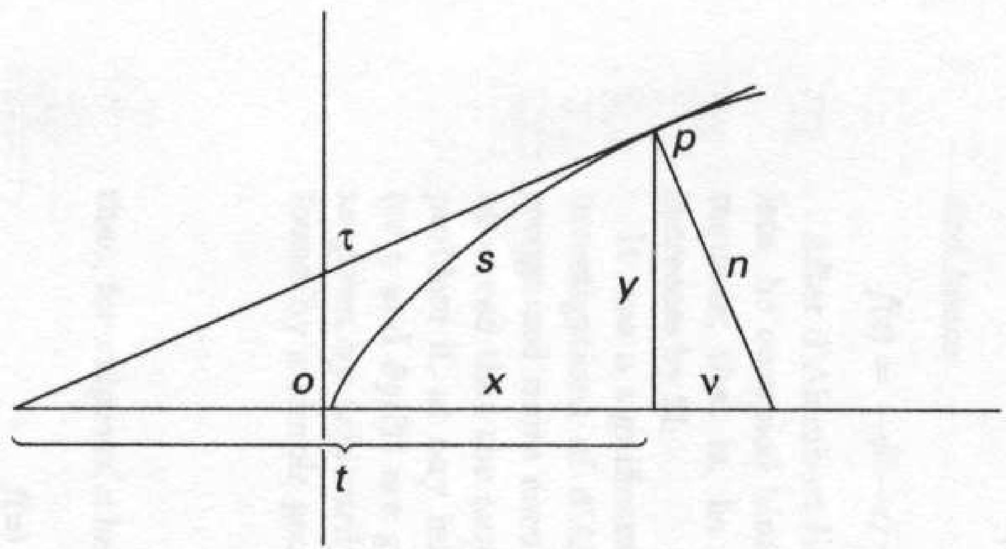
Leibniz (1646–1716)

Leibniz gebruikt voor het eerst het woord *functie*.

Het Latijnse woord *functio* komt van het Latijnse werkwoord *fungor* = “ik voer een taak uit”.

FIGURE 12.1

Quantities connected with a curve: x is the abscissa, y the ordinate, s the arc-length, t the subtangent, τ the tangent, n the normal, and ν the subnormal.



Leibniz (1646–1716)

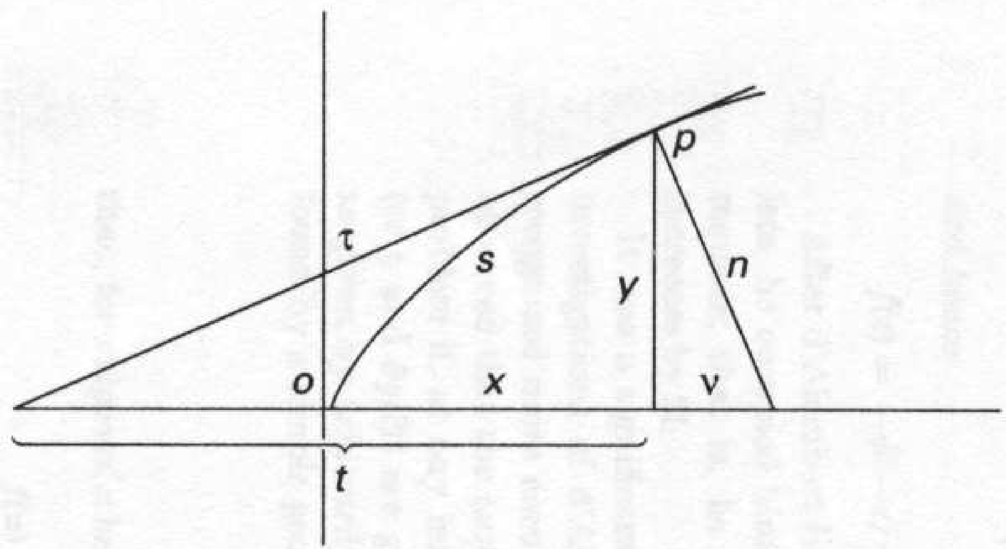
Leibniz gebruikt voor het eerst het woord *functie*.

Het Latijnse woord *functio* komt van het Latijnse werkwoord *fungor* = "ik voer een taak uit".

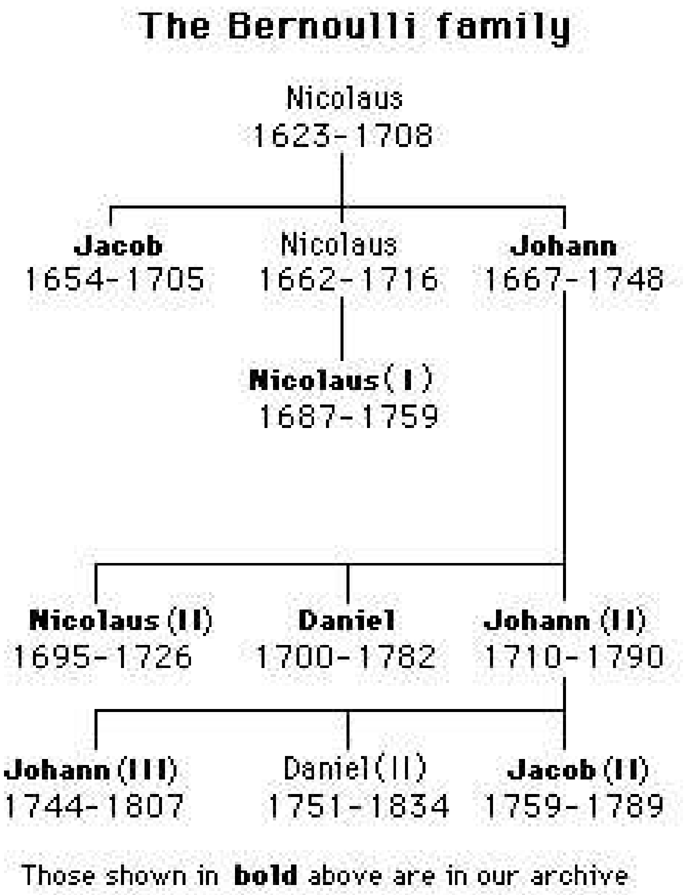
Een functie voert t.o.v. de kromme een bepaalde taak uit.

FIGURE 12.1

Quantities connected with a curve: x is the abscissa, y the ordinate, s the arc-length, t the subtangent, τ the tangent, n the normal, and ν the subnormal.



Johann Bernouilli (1667–1748)



Johann Bernouilli (1667–1748)

J. Bernouilli voerde als eerste een notatie voor functies in.
De functiewaarde in het punt x schreef hij als X.

Johann Bernouilli (1667–1748)

J. Bernouilli voerde als eerste een notatie voor functies in.
De functiewaarde in het punt x schreef hij als X.

Hij gaf in 1718 een definitie van een functie:

Onder een *functie van een variabele grootheid* verstaat men een hoeveelheid die op welke manier dan ook is samengesteld uit die variabele grootheid en uit constanten.

Euler (1707–1783)

Euler (1707–1783)

Euler (1707–1783)

Euler (1707–1783)

Euler voerde de notatie $f(x)$ voor een functie in.

Euler (1707–1783)

Hij gaf in 1748 de volgende definitie van een functie:

Een *functie van een veranderlijke getalgrootheid* is een **analytische uitdrukking** die op de een of andere manier is samengesteld uit de veranderlijke getalgrootheid en uit getallen of constanten.

Euler (1707–1783)

Hij gaf in 1748 de volgende definitie van een functie:

Een *functie van een veranderlijke getalgrootheid* is een **analytische uitdrukking** die op de een of andere manier is samengesteld uit de veranderlijke getalgrootheid en uit getallen of constanten.

In 1755 gaf hij een veel modernere definitie:

Als sommige grootheden zo van andere grootheden afhangen dat, als de laatste veranderd worden, de eerste mee veranderen, dan worden eerstgenoemde grootheden *functies* van laatstgenoemde genoemd.

Fourier (1768–1830)

Fourier (1768–1830)

Oplossen van de warmtevergelijking

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial T}{\partial t}$$

Fourier (1768–1830)

Kan een functie f op het interval $[0, L]$ met $f(0) = f(L) = 0$ geschreven worden in de vorm

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L)\,? \tag{1}$$

Fourier (1768–1830)

Kan een functie f op het interval $[0, L]$ met $f(0) = f(L) = 0$ geschreven worden in de vorm

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L)\,? \tag{1}$$

Dan noodzakelijk

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\, \sin(n\pi x/L)\, dx. \tag{2}$$

Fourier (1768–1830)

Kan een functie f op het interval $[0, L]$ met $f(0) = f(L) = 0$ geschreven worden in de vorm

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L)\,? \tag{1}$$

Dan noodzakelijk

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin(n\pi x/L)\,dx. \tag{2}$$

Fourier: als f mooi (analytisch) is dan geldt (1) met b_n gegeven door (2).

Negentiende eeuw

Algemener: kan een L-periodieke functie f geschreven worden als

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\tfrac{2\pi nx}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\tfrac{2\pi nx}{L}\right) \qquad \text{met}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\cos\left(\tfrac{2\pi nx}{L}\right)dx, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\left(\tfrac{2\pi nx}{L}\right)dx\,?$$

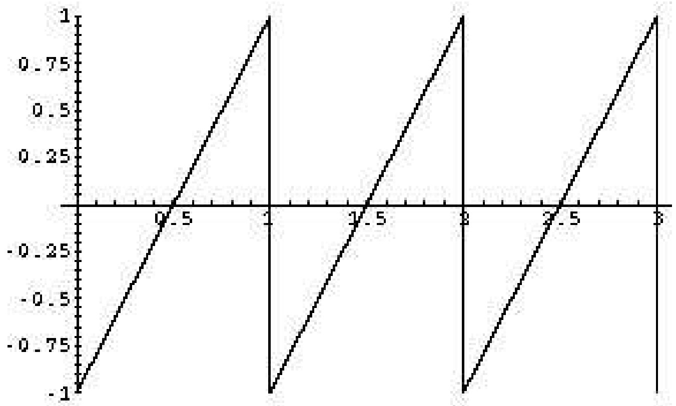
Negentiende eeuw

Algemener: kan een L-periodieke functie f geschreven worden als

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\tfrac{2\pi n x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\tfrac{2\pi n x}{L}\right) \qquad \text{met}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\cos\left(\tfrac{2\pi n x}{L}\right)dx, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\left(\tfrac{2\pi n x}{L}\right)dx\,?$$

Ook voor sommige niet-analytische functies, bijv. de zaagtand:



Negentiende eeuw (vervolg)

Geleidelijk inzicht:

Fourier-reeks van f convergeert puntsgewijs naar f voor zeer algemene functies f.

Maar niet voor alle continue functies.

Werk van o.a.:

- Dirichlet (1805–1859)
- Riemann (1826–1866) (Riemann-integraal)

Negentiende eeuw (vervolg)

Geleidelijk inzicht:

Fourier-reeks van f convergeert puntsgewijs naar f voor zeer algemene functies f.

Maar niet voor alle continue functies.

Werk van o.a.:

- Dirichlet (1805–1859)
- Riemann (1826–1866) (Riemann-integraal)

Onze hedendaagse precieze opzet van de analyse o.a. te danken aan:

- Bolzano (1782–1848)
- Cauchy (1789–1857)
- Weierstrass (1815–1897)

Twintigste eeuw

Lebesgue (1875–1941) voerde in 1902 de *Lebesgue-integraal* in. Dit geeft een veel algemenere klasse van functies.

Twintigste eeuw

Lebesgue (1875–1941) voerde in 1902 de *Lebesgue-integraal* in. Dit geeft een veel algemenere klasse van functies.

Laurent Schwartz (1915–2002) voerde de *distributies* in.
Dit zijn gegeneraliseerde functies: ze kunnen maar hoeven geen echte functies te zijn.
Bijv. $\delta(x)$, de *delta-functie van Dirac*, is geen echte functie.