

# Van golven in ondiep water tot intersectietheorie op moduliruimten

S. Shadrin

Oratie, 6 december 2013

# Korteweg-de Vries vergelijking

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{12} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}$$

- Korte geschiedenis van de ontwikkeling van de KdV-vergelijking
- Meest verrassende verbanden met andere onderzoeksgebieden

# Experimenten van Russell

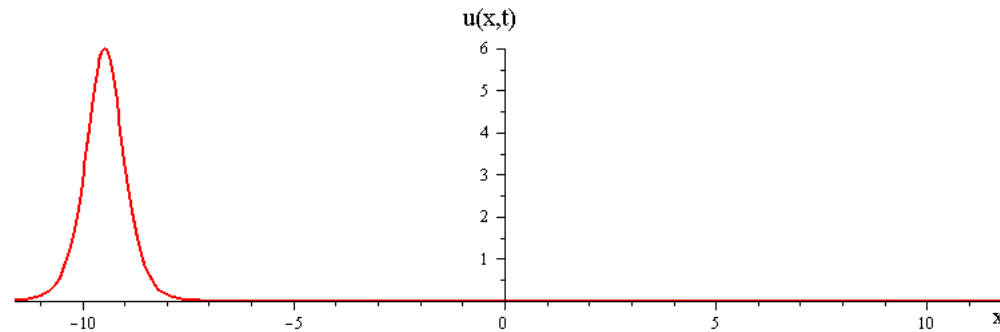
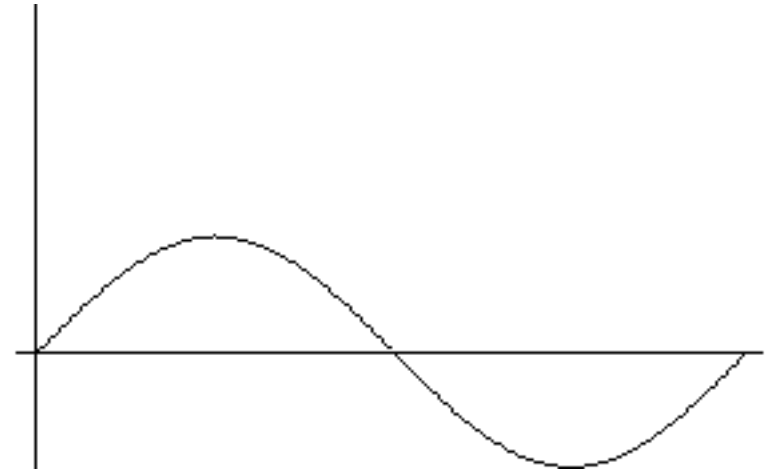
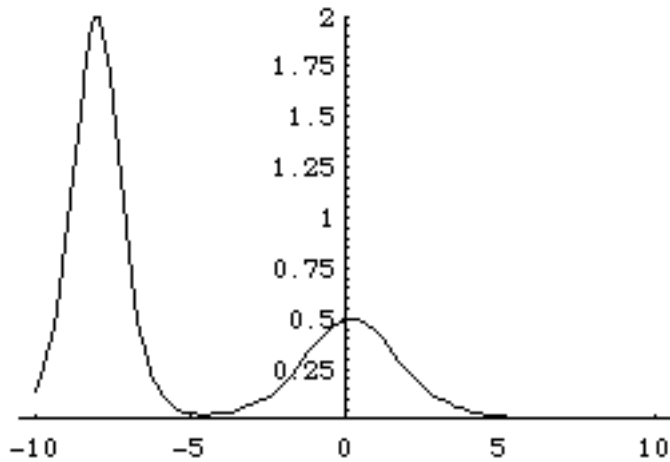


John Scott Russell  
1808-1892  
Schots ingenieur

Het Union Canal, bestaat sinds 1822  
(hedendaags uitzicht)



# Solitonen



- Solitonen zijn eenlinggolven. Deze golven behouden hun vorm op de lange afstand

# Vergelijking voor eenlinggolven

Uit "Essai sur la théorie des eaux courantes", Mémoires présentés par divers savants à l'Acad. des Sci. Inst. Nat. France, XXIII, pp. 1–680, 1877, door J. Boussinesq:

L'intégrale de celle-ci, en raisonnant comme on l'a fait pour celle de (286), serait devenue  $\psi_1 = 0$  ou

$$(283 \text{ bis}) \quad \frac{dh'}{dt} + \omega_0 \frac{d}{ds} \left[ h' + \frac{k''}{2} \left( \frac{2+k}{2} \frac{h'^2}{H} + \frac{k'H^2}{3} \frac{d^2h'}{ds^2} \right) \right] = 0,$$

ce qui est l'équation cherchée. Ensuite les deux formules (282 bis), qu'on peut écrire

Uit "On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves; Philosophical Magazine, 5th series, 39, pp. 422–443, 1895, door D. Korteweg en G. De Vries:

If, then,  $l + \eta$  ( $\eta$  being a small quantity) represent the elevation of the surface above the bottom at a horizontal distance  $x$  from the origin of coordinates, we have succeeded in deducing the equation

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{g/l} \cdot \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{3}{2} a \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)}{\partial x},$$

# Korteweg en de Vries



Diederik Korteweg  
1848-1941

Hoogleraar aan de UvA  
1881-1913



Gustav de Vries  
1866-1934

Proefschrift "Bijdrage tot de  
kennis der lange golven", 1894

# Kadomtsev-Petviashvili vergelijking

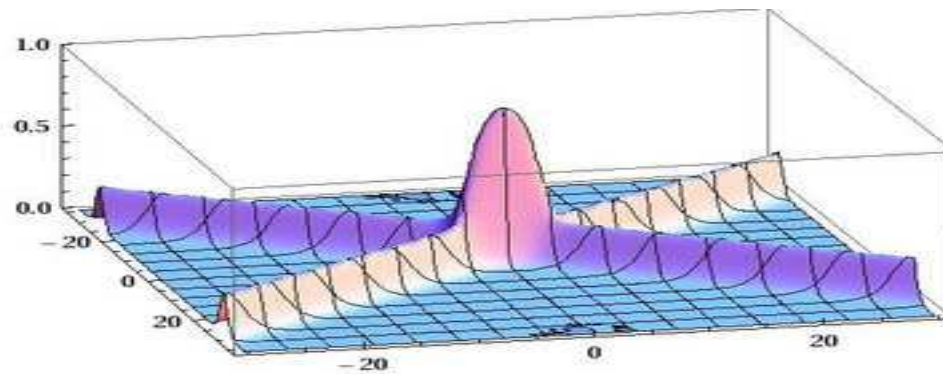
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{12} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right) \pm \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

- Was afgeleid door de fysici Boris Kadomtsev en Vladimir Petviashvili in 1970.
- Beschrijft de golven in ondiep water in twee dimensies.
- De KdV-vergelijking is een reductie van de KP-vergelijking



Boris Kadomtsev  
1928-1988  
Russische fysicus

# Golven in twee dimensies

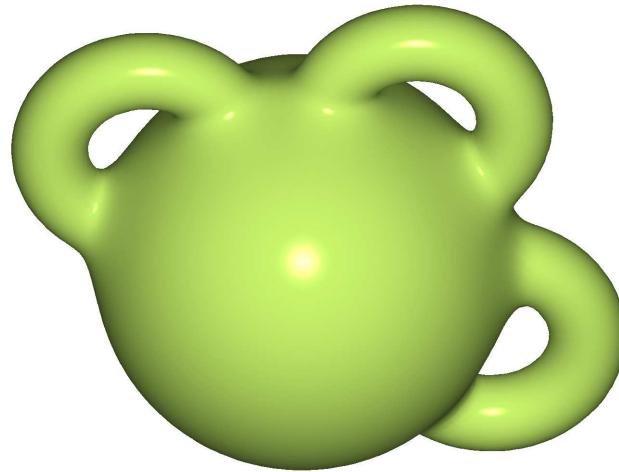
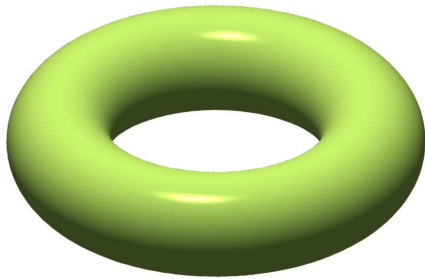




# Verbanden met andere gebieden

- Het Schottky-probleem
- Half-oneindige Grassmanniaan
- Intersectietheorie van de moduluimten

# Riemann-oppervlakken



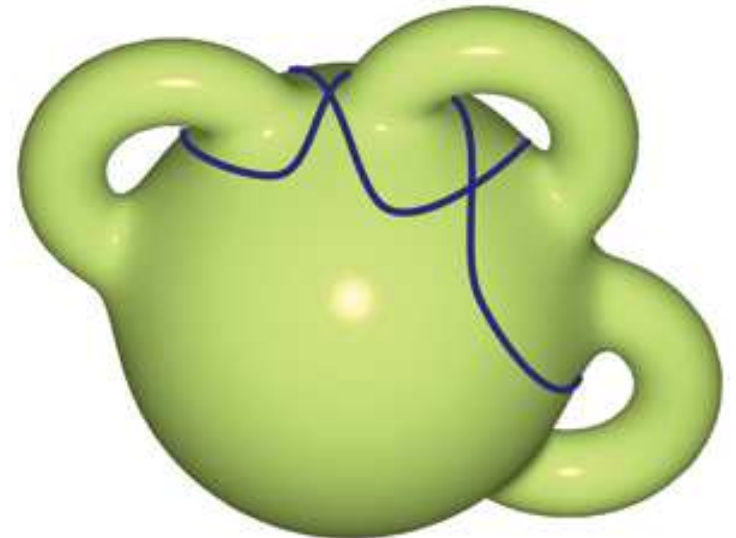
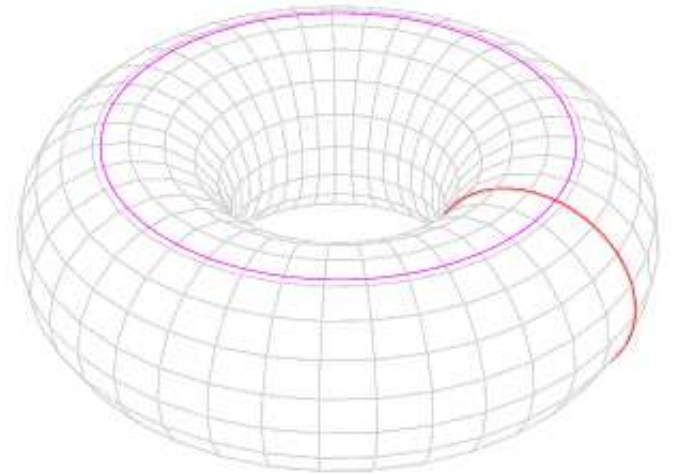
- Oppervlakken met een complexe structuur
- Ook bekend staand als algebraïsche krommen



Bernhard Riemann  
1826-1866  
Duitse wiskundige

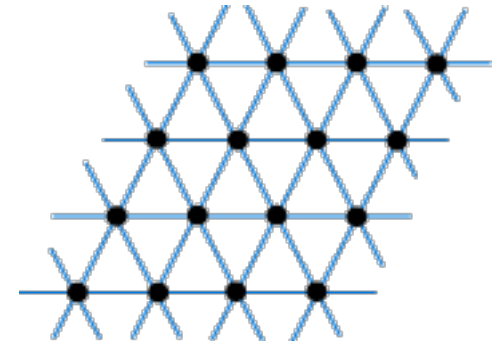
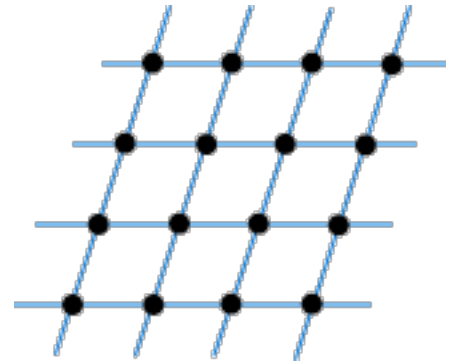
# Het Schottky-probleem

- De integralen door gesloten krommen beschrijven de complexe structuur.
- Deze integralen vormen een rooster in een hoog-dimensionale ruimte
- Hoe kunnen we de roosters van integralen binnen alle mogelijke roosters karakteriseren?



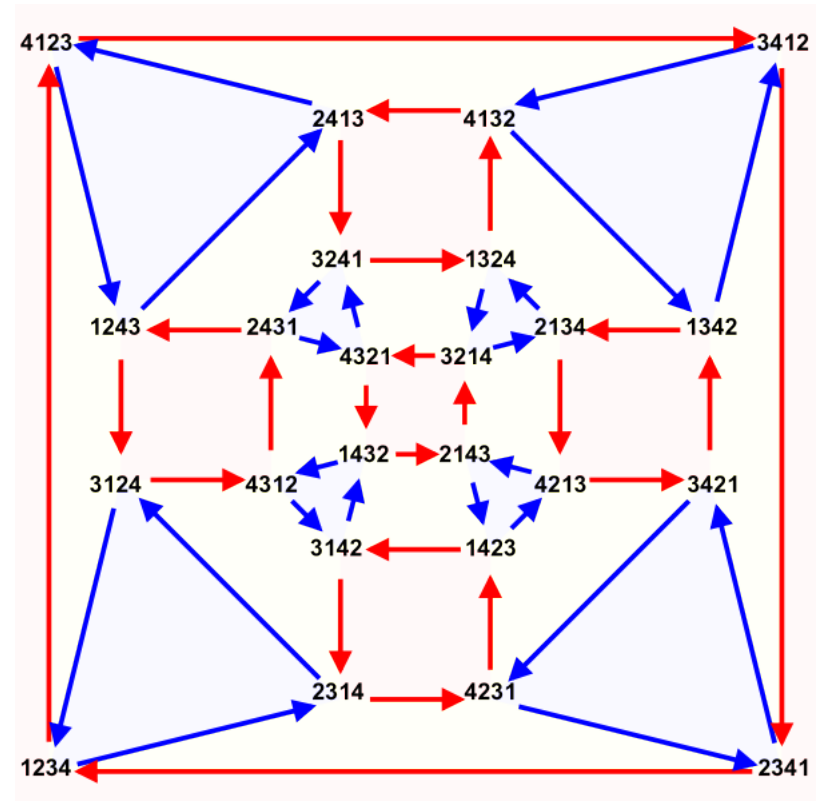
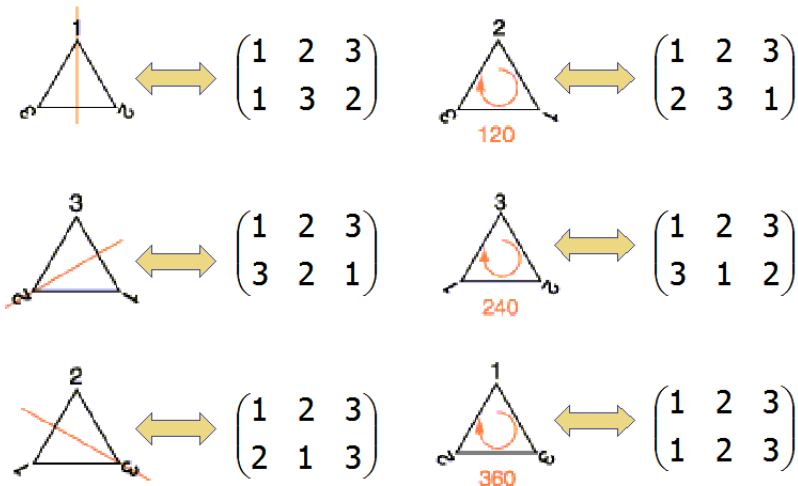
# Het Novikov-vermoeden

- We gebruiken het rooster om een functie te definiëren (zogenaamde  $\theta$ -functie).
- Het rooster is een rooster van integralen dan en slechts dan als deze functie een oplossing is van de KP-vergelijking
- Bewezen door I. Krichever en T. Shiota

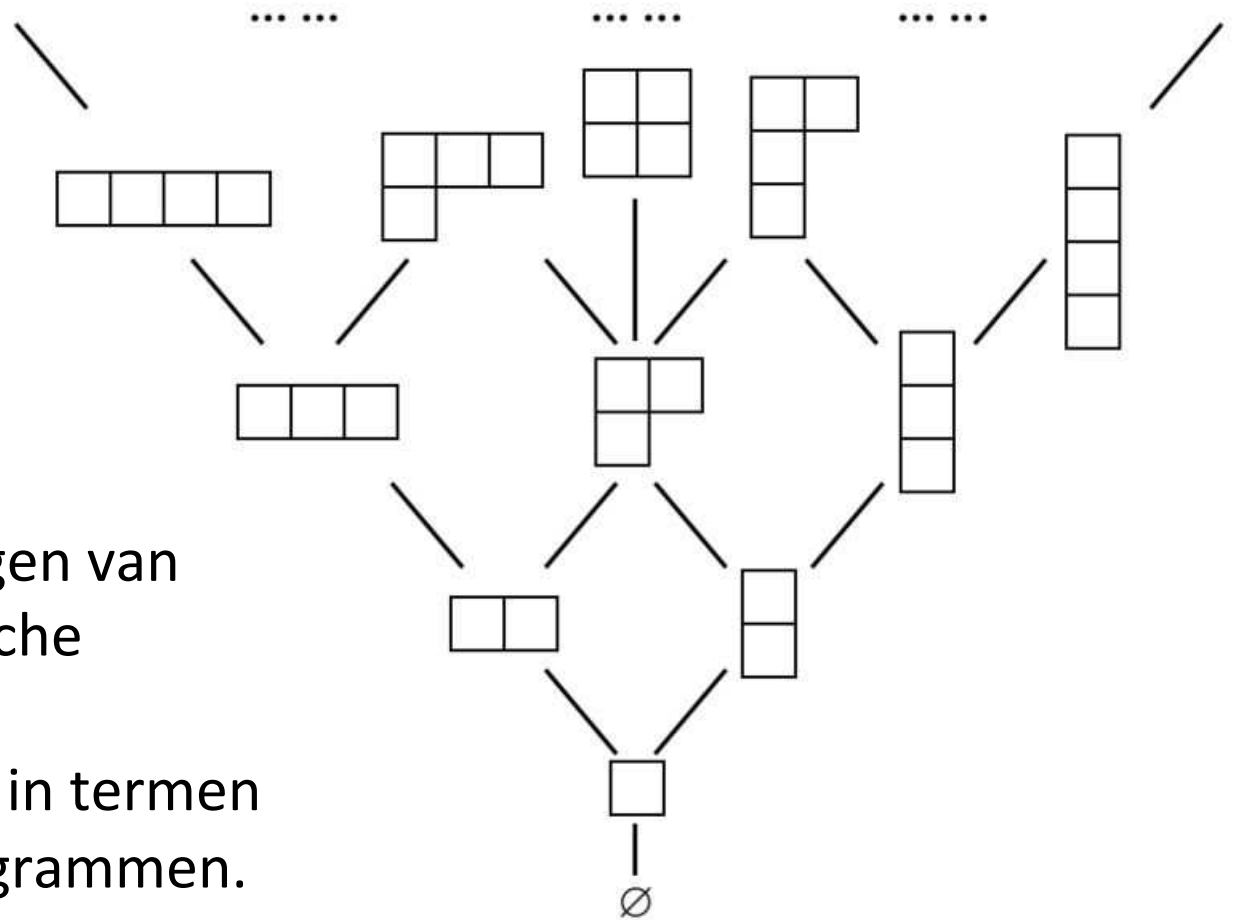


# Symmetrie

- We beschouw mogelijke groepswerkingen van symmetrische groepen op de verschillende ruimten.



# Classificatie van groepswerkingen



- Groepswerkingen van alle symmetrische groepen zijn geassocieerd met Young-diagrammen.

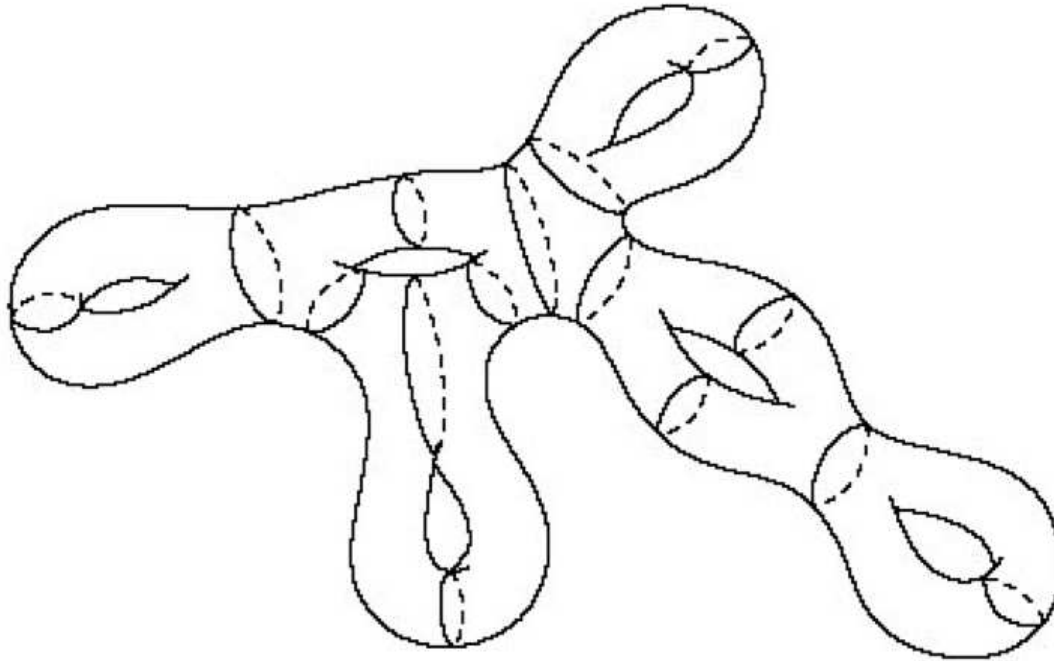
# Sato-Grassmanniaan

- Numerieke gegevens van de groepsbewerkingen zijn gecodeerd door de hoger-dimensionale volumes in een half-oneindig matrix.
- Universele relaties tussen deze volumes vormen weer de KP-hiërarchie.

$A_{11}$	$A_{12}$	$A_{13}$	$A_{14}$	$A_{15}$	$A_{16}$	...
$A_{21}$	$A_{22}$	$A_{23}$	$A_{24}$	$A_{25}$	$A_{26}$	...
$A_{31}$	$A_{32}$	$A_{33}$	$A_{34}$	$A_{35}$	$A_{36}$	...
$A_{41}$	$A_{42}$	$A_{43}$	$A_{44}$	$A_{45}$	$A_{46}$	...
$A_{51}$	$A_{52}$	$A_{53}$	$A_{54}$	$A_{55}$	$A_{56}$	...
$A_{61}$	$A_{62}$	$A_{63}$	$A_{64}$	$A_{65}$	$A_{66}$	...
...	...	...	...	...	...	...

# Moduliruimten

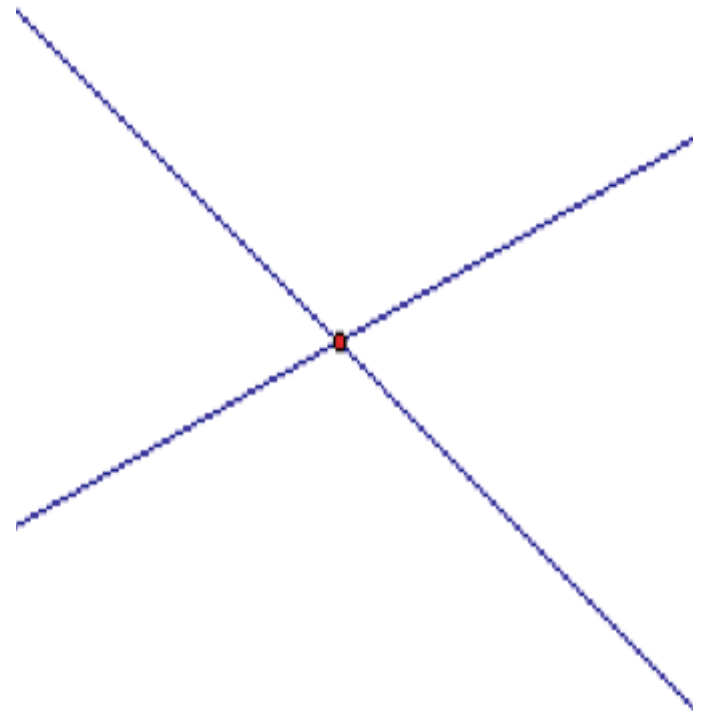
- We beschouw de ruimte van alle mogelijke complexe structuren op een gegeven oppervlak.



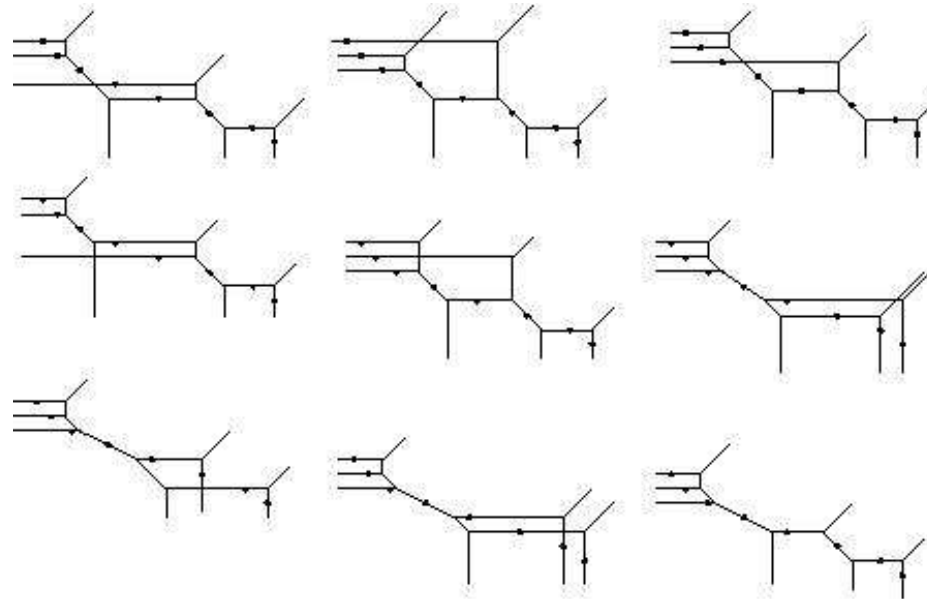


# Intersectietheorie van moduliromen

- Hoe kunnen we alle intersecties van alle natuurlijke deelvariëteiten beschrijven?
- Dat is volledig bepaald door de KdV-hiërarchie.
- Vermoeden van E. Witten; bewezen door M. Kontsevich.



# Moduliruimten van afbeeldingen



- Invariant van een variëteit: de intersectietheorie van de moduliruimten van krommen binnen deze variëteit.
- Deze intersectietheorie is volledig bepaald door een hydrodynamische integreerbaar systeem.

Dank u wel!