

Kennisgrafen en het wiskundeonderwijs

Bijna 28 jaar na mijn afstuderen in de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek bij de Universiteit van Amsterdam ben ik bij de Open Universiteit (OU) gepromoveerd op een onderwerp uit de didactiek van de wiskunde. Kort samengevat ging het om het beantwoorden van de volgende vraag: is het mogelijk om een hulpmiddel te ontwikkelen, uit te proberen en te verbeteren, dat goede diensten kan bewijzen bij het structureren van wiskundige kennis en vaardigheden door studenten en door leerlingen in het voortgezet onderwijs? Niet alleen voor de Open Universiteit met haar afstandsonderwijs, maar ook voor het voortgezet onderwijs, gegeven alle aandacht voor zelfstandig leren en studeren, is dit een relevante vraagstelling. Jan van der Craats (KMA, OU en UvA) en Anne van Streun (RUG) waren promotor, respectievelijk copromotor.

Na in 1971 afgestudeerd te zijn heb ik tot 1975 een baan als wiskundeleraar gecombineerd met die van medewerker voor de didactiek van de wiskunde bij het toenmalige Mathematisch Instituut van de UvA. Daarna heb ik tot 1986 als wiskundeleraar en conrector gewerkt in het voortgezet onderwijs en vanaf 1986 tot heden bij de Open Universiteit Nederland als (mede)verantwoordelijke voor het ontwikkelen en exploiteren van wiskundecursussen ten behoeve van de wetenschappelijke opleidingen Informatica (met ir-titel) en Milieuwetenschappen.

Uitgangspunt bij het onderzoek is geweest dat wiskundeonderwijs gericht moet zijn op het verwerven van wiskundige competentie. Wiskundige competentie heb ik gedefinieerd als het zodanig beschikbaar hebben van wiskundige kennis en vaardigheden dat deze optimaal te gebruiken zijn bij het aanpakken en oplossen van (complexe) problemen binnen de wiskunde of problemen buiten de wiskunde waarbij wiskunde echter wel een rol speelt. De basis voor het ontwikkelde hulpmiddel, dat ik kennisgraaf heb gedoopt, is een visualisering met behulp van een gerichte graaf. De knopen van de

graaf zijn - globaal gesproken - wiskundige begrippen. Door aan de gerichte verbindingen labels te hangen kan de aard van het verband tussen de begrippen tot uitdrukking worden gebracht. Als de centrale probleemstelling van het onderzoek is geformuleerd: levert het structureren van wiskundige kennis en vaardigheden met behulp van een kennisgraaf een bijdrage aan het verwerven van wiskundige competentie?

Om de context van het onderzoek te schetsen, zijn in het proefschrift de ontwikkelingen in het wiskunde-onderwijs en de didactiek van de wiskunde van ongeveer de laatste dertig jaar beschreven. Het begrip ‘wiskundige competentie’ en de eraan ten grondslag liggende wiskundige kennis en vaardigheden zijn nader geanalyseerd. Ook heb ik nagegaan of een kennisgraaf voor het structureren van wiskundige kennis en vaardigheden in principe bruikbaar is. Op grond daarvan is de vorm gespecificeerd van het elektronische hulpmiddel om kennisgrafen te construeren.

Er hebben in totaal vier deelonderzoeken plaats gevonden (afgezien van een exploratief vooronderzoek), waarbij proefpersonen stukken wiskunde in een kennisgraaf gestructureerd hebben. In het eerste onderzoek traden deskundigen als proefpersonen op. De conclusie van dat onderzoek was dat het structureren van wiskundige kennis goed mogelijk en ook nuttig is, maar dat het resultaat verbeterd kan worden door aan het hulpmiddel van de kennisgraaf een stevige basis te geven in de vorm van een model voor wiskundige kennis en vaardigheden: het wiskundige-kennisgraafmodel. Dat model en de bijbehorende werkwijze zijn eenvoudig uit te leggen, zie hierna. Dat model is zowel theoretisch als praktisch gevalideerd. Voor de praktische validering is nagegaan of het model toepasbaar is bij de cursus Lineaire algebra van de Open Universiteit (waar Peter de Paepe nog als auteur aan heeft meegewerkt). Dat bleek inderdaad zo te zijn.

De belangrijkste aspecten van het model zijn de categorisering van wiskundige kennis en vaardigheden in centrale begrippen, bijzondere gevallen van een centraal begrip, operaties (in brede zin) op een begrip, toepassingsgebieden en eigenschappen van begrippen

of operaties. De bijbehorende werkwijze is te karakteriseren als: ‘van globaal naar specifiek’. Deze werkwijze is afgeleid van de manier waarop je een probleem aanpakt: eerst ga je globaal na welk onderdeel of welke onderdelen van de wiskunde in aanmerking komen (gesteld natuurlijk dat wiskunde een rol kan spelen); daarna ga je specifiek kijken hoe dat onderdeel, of preciezer: welke begrippen en methoden bruikbaar kunnen zijn. Er wordt als het ware steeds meer ‘ingezoomd’ op de kern van het probleem en de (naar verwachting) in aanmerking komende wiskunde. De hoop is dat door een overeenkomstige werkwijze te gebruiken er een positief effect is op het verwerven van wiskundige competentie. Het wiskundige-kennisgraafmodel wordt namelijk eerst op hoofdlijnen op een te structureren wiskundig kennisdomein toegepast, en vervolgens op relevante elementen zodat die een nadere uitwerking krijgen. Dit kan, in principe, onbeperkt herhaald worden zodat er steeds verder gedetailleerd kan worden. Het computerprogramma KennisGraaf ondersteunt deze recursieve werkwijze.

Vervolgens zijn er drie onderzoeken met dit model uitgevoerd. Eerst is nagegaan hoe studenten van de Open Universiteit met dit model zijn omgegaan bij het begin van de cursus Lineaire algebra. De conclusie was dat studenten die de stof goed bestudeerd hadden en dus enige afstand tot de stof hadden, in staat waren hun wiskundige kennis volgens het model te structureren. Daarna hebben 38 leerlingen van 5 vwo wiskunde b individueel bij het domein ‘limieten en continuïteit’ uit de schoolwiskunde een kennisgraaf geconstrueerd. Daar was de conclusie dat deze leerlingen kennelijk niet geleerd hadden dat wiskundige begrippen een onderlinge samenhang hebben en dat het bij het opbouwen van wiskundige kennis van belang is die samenhang voor zichzelf zichtbaar te maken. Dit is overigens ook al eerder door anderen geconstateerd. In het laatste onderzoek heeft een deel van de leerlingen uit het vorige onderzoek - inmiddels toe aan het laatste schoolonderzoek in 6 vwo - het subdomein ‘baankrommen’ als onderdeel van de stof van dat laatste schoolonderzoek in groepjes van drie gestructureerd. Vervolgens hebben deze leerlingen zich op het schoolonderzoek voorbereid.

Het effect van de structureringsactiviteit op de wijze van voorberei-

den en het schoolonderzoekresultaat was als volgt. De leerlingen bleken inmiddels wel in staat te zijn om het betreffende onderwerp in een kennisgraaf weer te geven. Bij de meeste leerlingen had het structureren (helaas) geen expliciete rol in de voorbereiding op het schoolonderzoek gespeeld. In de nabespreking bleek hiervoor de belangrijkste reden te zijn dat ze te weinig vertrouwd waren met het structureren volgens het wiskundige-kennisgraafmodel. Het bleek echter ook dat iedereen het nuttig vond om zeker in de bovenbouw een dergelijke activiteit vóór elk proefwerk in groepjes uit te voeren en de resulterende kennisgrafen klassikaal na te bespreken, waarbij ook de leraar een kennisgraaf inbrengt. Gezamenlijk kan dan worden vastgesteld wat de 'ideale' kennisgraaf is. De groep leerlingen bleek de opgave van het schoolonderzoek over het betreffende onderwerp slechter gemaakt te hebben dan de groep leerlingen die de structureringsactiviteit niet had uitgevoerd. De meest voor de hand liggende verklaring hiervoor is dat deze laatste groep leerlingen beter in wiskunde was dan de eerste groep. Dit werd bevestigd bij het kort erna afgenomen centraal wiskunde-eindexamen. Het resultaat van dit onderzoek was voor mij wat teleurstellend, maar als je onderzoek doet, is dat nu eenmaal 'all in the game'.

Op grond van de onderzoeken kan dus niet geconcludeerd worden dat het structureren van wiskundige kennis en vaardigheden met behulp van een kennisgraaf een positief effect op het verwerven van wiskundige competentie heeft. Wat heeft het onderzoek wel opgeleverd? Er is een didactisch ontwerp gepresenteerd aan de hand van het domein 'kansrekening' voor wiskundeonderwijs dat de leeractiviteit van het structureren een aparte plaats in het geheel van het leerproces geeft. Daarbij is een aantal verbeteringen van het wiskundige-kennisgraafmodel aanbevolen: opnemen van heuristische methoden, naast algoritmische methoden die er al expliciet onder de categorie 'operaties' in zitten, en opnemen van belangrijke wiskundige activiteiten als 'redeneren en bewijzen' en 'mathematiseren'.

Bert Zwaneveld (Open Universiteit Nederland)