Hyperbolisch Hypergeometrische functies

Na mijn afstuderen aan de UvA in 2003 ben ik er begonnen aan een promotieonderzoek naar quantum groepen, integreerbare systemen en speciale functies. Dit zijn een heleboel lastige begrippen in één keer en ik zal daarom alleen proberen uit te leggen wat mijn onderzoek behelst naar speciale functies. Mijn promotie heb ik afgelopen november afgerond en vanaf september 2008 zal ik aan Caltech in Californië een post-doc positie vervullen.

Speciale functies zijn functies die zo veel toepassingen hebben in verschillende takken van de wiskunde (en buiten de wiskunde) dat ze de titel speciaal verdienen. Dit is natuurlijk een niet erg wiskundig ogende definitie, en het klopt ook dat het speciaal noemen van een functie meer een waardeoordeel is dan iets anders. Bekende voorbeelden van speciale functies zijn de gamma functie, de zeta functie en ook Bessel functies.

Voor mij is echter het archetypische voorbeeld van een speciale functie de e-macht (alhoewel deze functie zo veel toepassingen heeft dat sommige mensen hem niet als een speciale functie, maar als een categorie apart beschouwen). Bij het bestuderen van de e-macht vallen een paar dingen op. Zo is de e-macht “indirect” gedefinieerd, namelijk ofwel als oplossing van een differentiaalvergelijking (f’=f), of als machtreeks. Dit betekent dat je bijvoorbeeld de waarde van de e-macht niet expliciet kan uitrekenen (al kunnen we de e-macht perfect benaderen) en je de functie moet bestuderen door allerlei eigenschappen af te leiden. Gelukkig heeft de e-macht zoveel mooie eigenschappen, dat we er toch redelijk goed mee uit de voeten kunnen. Zo zijn er evaluaties waarbij we de e-macht wel exact kunnen uitrekenen als we maar het goede getal invullen, denk aan de beroemde formule $e^{2\pi i}=1$. Bovendien zijn er optelformules als $e^{(a+b)}=e^a e^b$ en nog meer van dit soort eigenschappen.

Het is een algemeen verschijnsel dat je speciale functies wilt bestuderen door allerlei eigenschappen (of formules) voor ze af te leiden. Nu betekent dit dat alle speciale functies eigenlijk apart moeten worden bestudeerd, en er in het algemeen geen vaste middelen zijn om dat te doen. Als we dit zouden doen voor elke functie die we tegenkomen levert dit een enorm woud aan speciale functies op die elk weer een eigen behandeling verdienen. Een deel van de oplossing hiervoor is om bijvoorbeeld te laten zien dat bepaalde functies hele klassen differentiaalvergelijkingen oplossen en we zo'n functie dus vaker kunnen gebruiken. Zo kunnen oplossingen van lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficienten (als f''+2f'-3f=0) altijd geschreven worden in termen van de e-macht. Maar zelfs dan blijft het bestuderen van speciale functies lijken op postzegelverzamelen.

Het is dus zoeken naar een soort systeem van Medeleyev voor speciale functies. Nu geloof ik niet dat er een alomvattend systeem bestaat maar wel zijn er bepaalde deelklassen van speciale functies waarvoor er meer structuur bekend is. Een belangrijke deelklasse bestaat uit de zogeheten hypergeometrische functies (die ook in de titel van dit stuk voorkomen). Onder andere de e-macht en Bessel functies zijn voorbeelden van hypergeometrische functies. Binnen deze klasse zijn verschillende hypergeometrische functies limieten van elkaar (waarna we eigenschappen van de ene functie op de andere kunnen overdragen door deze door de limiet te halen). Bovendien kunnen we bepaalde eigenschappen voor alle hypergeometrische functies tegelijkertijd afleiden en hoeven we ze dus niet steeds allemaal apart te bekijken.

Ikzelf heb hyperbolische hypergeometrische functies bestudeerd. Dit zijn een soort apart type speciale functies die in veel opzichten lijken op gewone hypergeometrische functies. Het mooie van hyperbolisch hypergeometrische functies is dat ze vergelijkingen oplossen waarvan je van te voren niet zou verwachten dat ze oplossingen hebben.

Die vergelijkingen zijn zogeheten differentievergelijkingen, een soort discretisatie van differentiaalvergelijkingen. Een simpel voorbeeld van een differentievergelijking is een vergelijking van het type f(x+h)= g(x)f(x), voor een gegeven functie g en stapgrootte h. Als we het argument x van f nu in het complexe vlak kiezen lijkt het voor de hand liggend om ook naar oplossingen van twee dergelijke vergelijkingen te kijken met verschillende stapgroottes h en h', tenslotte is het complexe vlak tweedimensionaal. Traditioneel wordt dan altijd geëist dat de functie periodiek is in de tweede stapgrootte, dus f(x+h')=f(x). Dit gaat goed totdat h' en h een reëel veelvoud van elkaar worden: neem bijvoorbeeld h'=h, dan moet gelden f(x)=f(x+h')=f(x+h)=g(x)f(x), dus heb je een probleem als g niet identiek 1 is.

Nu lijkt dit op het eerste gezicht ietwat suf, omdat je problemen creëert door extra eisen op te leggen, maar er zijn toepassingen waar je h' vast wil kiezen (bijvoorbeeld 1) en h een reëele waarde met een bepaalde natuurkundige betekenis heeft. Persoonlijk vind ik een van de mooiste interpretaties dat in het XXZ model de keuze voor h/h' als reëel getal overeenkomt met de overgang naar massaloze deeltjes.

Het probleem dat er geen oplossingen zijn voor h=h', is op te lossen door de tweede vergelijking identiek te laten zijn aan de eerste met h en h' verwisseld. Ook dan is het echter nog helemaal niet duidelijk dat er nette oplossingen zijn voor alle keuzes van h en h'. Het blijkt nu dat er toch functies g te vinden zijn waarvoor er oplossingen zijn voor de twee vergelijkingen f(x+h)=g(x,h)f(x) en f(x+h')=g(x,h')f(x) die meromorf ("netjes") zijn in zowel x als h en h'. Hyperbolisch hypergeometrische functies zijn nu oplossingen van dit soort stelsels vergelijkingen. Om de bijzonderheid van het bestaan van oplossingen voor zo'n dubbel stelsel vergelijkingen te benadrukken, noem ik nog het resultaat uit mijn proefschrift dat er voor dit soort eerste orde differentievergelijkingen in essentie maar één mogelijke keuze voor g (en dus f) is.

Fokko van de Bult

Dr. F.J. van de Bult promoveerde op 29 november 2007 op het proefschrift getiteld "Hyperbolic Hypergeometric Functions". Promotor was prof. dr. E. Opdam en co-promotor dr. J.V. Stokman.