

# Categorieëentheorie

Gerrit Oomens

17-07-2009

Bachelorproject Wiskunde

Begeleiding: dr. Jochen Heinloth

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(\phi)} & F(Y) \\ \zeta_X \downarrow & & \downarrow \zeta_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(\phi)} & G(Y) \end{array}$$

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde  
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica  
Universiteit van Amsterdam



## Samenvatting

De categorieëentheorie biedt een abstract kader om wiskundige objecten en relaties tussen deze objecten te bestuderen. In deze scriptie wordt deze theorie toegepast om enkele stellingen te formuleren en te bewijzen. Er wordt een algemene inleiding gegeven in de basisbegrippen van de categorieëentheorie. Deze begrippen worden gebruikt om een zekere equivalentie tussen compacte Hausdorffruimten en commutatieve Banach-algebra's aan te geven en deze equivalentie wordt bewezen met behulp van enige begrippen uit de functionaalanalyse. Verder wordt het verband tussen de fundamentealgroep van een topologische ruimte met universele overdekking en de mogelijke overdekkingen van deze ruimte bestudeerd. Ten slotte wordt dit generaliseerd naar ruimten zonder universele overdekking.

## Gegevens

Titel: Categorieëentheorie  
Auteur: Gerrit Oomens, G.Oomens@uva.nl  
Begeleider: dr. Jochen Heinloth  
Tweede beoordelaar: prof.dr. Gerard van der Geer  
Einddatum: 17-07-2009

Korteweg de Vries Instituut voor Wiskunde  
Universiteit van Amsterdam  
Science Park 904, 1098 XH Amsterdam  
<http://www.science.uva.nl/math>

# Inhoudsopgave

<b>Inleiding</b>	<b>2</b>
<b>I Categorieëentheorie</b>	<b>3</b>
I.1 Categorieën . . . . .	3
<b>II Banach-algebra's en compacte Hausdorffruimten</b>	<b>7</b>
II.1 Banach-algebra's . . . . .	7
II.2 Equivalentie van categorieën . . . . .	10
<b>III Fundamentealgroep</b>	<b>14</b>
III.1 Overdekkingen . . . . .	14
III.2 Fundamentealgroep via overdekkingen . . . . .	18
III.3 Fundamentealgroep als automorfismengroep . . . . .	20
III.4 Zonder universele overdekking . . . . .	23
<b>A Functionaalanalyse</b>	<b>27</b>
A.1 Enkele stellingen . . . . .	27
A.2 Spectraaltheorie . . . . .	28
<b>Bibliografie</b>	<b>31</b>
<b>Populaire samenvatting</b>	<b>32</b>

# Inleiding

In alle takken van de wiskunde komen we verzamelingen tegen die uitgerust zijn met een zekere extra structuur, zoals groepen, topologische ruimten of vectorruimten. De verschillende structuren lopen ver uiteen — we zien niet onmiddellijk een verband tussen een topologie en een groepsbewerking — maar in alle gevallen bestuderen we afbeeldingen tussen de objecten die op een of andere manier de structuur bewaren. Voor groepen zijn dit homomorfismen, voor topologische ruimten continue afbeeldingen en voor vectorruimten lineaire afbeeldingen. Dit soort structuren zijn binnen de wiskunde overal aanwezig en om de verbanden tussen verschillende klassen van dit soort objecten te bestuderen is het aantrekkelijk om een algemene theorie van “verzamelingen met structuur” en “afbeeldingen die structuur behouden” op te zetten. Dit is voor het eerst gedaan in de jaren veertig van de vorige eeuw in het kader van de algebraïsche topologie. De zo ontstane categoriëentheorie is in de loop van afgelopen eeuw verder ontwikkeld en heeft toepassingen binnen de abstracte algebra en logica.

Het centrale object in deze theorie is de *categorie*, die bestaat uit zowel objecten als de verbanden tussen deze objecten. Zo kunnen we bijvoorbeeld spreken over de categorie van groepen, waarvan de objecten groepen zijn en de verbanden homomorfismen van groepen. Verschillende categoriëen kunnen we vergelijken. Een belangrijk begrip hierbij is een zogenaamde *equivalentie van categoriëen*, dat aangeeft dat twee categoriëen vrijwel identiek zijn, zowel in objecten als in verbanden. De categoriëentheorie stelt ons in staat om deze equivalenties te formuleren.

In het eerste hoofdstuk ontwikkelen we de benodigde gereedschappen van de categoriëentheorie om dit te kunnen doen. Daarna bekijken we in het tweede hoofdstuk een equivalentie tussen categoriëen, een bekend resultaat uit de theorie van Banach-algebra's dat ons vertelt dat de categorie van commutatieve Banach-algebra's equivalent is met die van compacte Hausdorffruimtes. Om dit te bewijzen is nogal wat functionaalanalyse benodigd, waarvan een deel terug te vinden is in de appendix. Ten slotte bekijken we in het derde hoofdstuk enkele constructies uit de categoriëentheorie waarmee we de fundamenteelgroep van een topologische ruimte kunnen bestuderen.

# Hoofdstuk I

## Categorieëentheorie

In dit hoofdstuk definiëren we de basisbegrippen van de categorieëentheorie: categorieën, functoren en natuurlijke transformaties. Deze begrippen zijn voldoende om te kunnen formuleren wat een equivalentie van categorieën is en dit zullen we dan ook doen aan het einde van dit hoofdstuk.

### I.1 Categorieën

We voeren het eerste centrale begrip van de categorieëentheorie in, waarmee het concept van een “klasse van verzamelingen met structuur” wordt vastgelegd.

**Definitie I.1.1.** Een *categorie*  $\mathcal{C}$  bestaat uit

- een collectie  $\text{Ob } \mathcal{C}$  van *objecten*,
- voor iedere  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  een verzameling  $\text{Hom}(X, Y)$  van *morfismen*  $\phi: X \rightarrow Y$  en
- een collectie bewerkingen  $\circ: \text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$ , de *samenstelling van morfismen*.

Deze objecten moeten voldoen aan

- voor alle  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  er bestaat een  $\text{id}_X \in \text{Hom}(X, X)$  met  $\text{id}_X \circ \phi = \phi \circ \text{id}_X = \phi$  voor alle morfismen  $\phi$ ;
- de bewerking  $\circ$  is associatief:  $(\phi \circ \psi) \circ \chi = \phi \circ (\psi \circ \chi)$  voor  $\phi \in \text{Hom}(X, Y)$ ,  $\psi \in \text{Hom}(Y, Z)$ ,  $\chi \in \text{Hom}(Z, A)$ .

Merk op dat deze definitie niet vastlegt dat de objecten van een categorie inderdaad verzamelingen zijn met een extra structuur of dat de morfismen inderdaad afbeeldingen zijn; een categorie die wel van de deze vorm is, noemt men wel een *concrete* categorie. Zoals we hieronder zien, zijn er zeker voorbeelden te bedenken van categorieën die niet van deze vorm zijn. In deze scriptie zullen wij echter hoofdzakelijk ons bezighouden met het bestuderen van enkele specifieke concrete categorieën.

Wellicht is het meest voor de hand liggende voorbeeld van een categorie de categorie **Set** van alle verzamelingen met als morfismen tussen twee verzamelingen  $X$  en  $Y$  alle mogelijke afbeeldingen en met de gebruikelijke samenstelling van afbeeldingen. Al eerder zijn genoemd

de categorie **Grp** van groepen  $(G, \cdot)$  met als morfismen de homomorfismen en de categorie **Vec<sub>K</sub>** van vectorruimten over een lichaam  $K$  met lineaire afbeeldingen. Vrijwel analoog kunnen we **Top**, de topologische ruimten met continue afbeeldingen, en nog vele andere categorieën van deze vorm bekijken.

**Opmerking I.1.2.** De categorie **Set** geeft een indicatie van hoe groot categorieën kunnen zijn. De collectie  $\text{Ob } \mathbf{Set}$  bestaat uit alle mogelijk verzamelingen. Dit kan dan ook zelf niet een verzameling zijn. Immers, als dit een verzameling was, konden we ook de deelverzameling hiervan gegeven door  $S = \{X \in \text{Ob } \mathbf{Set} : X \notin X\}$  bekijken en men kan eenvoudig inzien dat dit tot een tegenspraak leidt (geldt  $S \in S?$ ). Dit probleem staat bekend als de *paradox van Russell*, bedacht door Bertrand Russell in 1901. Ook  $\text{Ob } \mathbf{Grp}$  en  $\text{Ob } \mathbf{Top}$  zijn geen verzamelingen en in het algemeen zal de collectie objecten van een concrete categorie geen verzameling zijn. Dit soort collecties worden *klassen* genoemd. Iedere verzameling is een klasse, maar niet iedere klasse is een verzameling. De operaties die we met klassen kunnen doen zijn beperkter dan wat mogelijk is met verzamelingen. Zo kunnen we wel de vraag stellen “is de verzameling  $S$  bevat in de klasse  $X$ ?”, maar de vraag “is de klasse  $X$  bevat in de klasse  $Y$ ?” heeft geen betekenis als  $Y$  geen verzameling is.

Nu we beschikken over het concept van een categorie, willen we graag verbanden tussen verschillende categorieën bestuderen. Hierbij kunnen we opmerken dat categorieën zelf ook weer “verzamelingen” met structuur zijn. Het enige dat nog ontbreekt zijn afbeeldingen tussen categorieën die de structuur, hier bestaande uit morfismen en hun samenstelling, respecteren.

**Definitie I.1.3.** Laat  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{D}$  categorieën zijn. Een (*covariante*) *functor*  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  is een afbeelding die aan ieder object  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  een object  $F(X) \in \text{Ob } \mathcal{D}$  toevoegt en aan ieder morfisme  $\phi \in \text{Hom}(X, Y)$  een morfisme  $F(\phi) \in \text{Hom}(F(X), F(Y))$  toevoegt zodat

1.  $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$  voor alle  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$
2.  $F(\phi \circ \psi) = F(\phi) \circ F(\psi)$  voor alle morfismen  $\psi \in \text{Hom}(X, Y)$ ,  $\phi \in \text{Hom}(Y, Z)$ .

Vele voorbeelden van functoren zijn te verkrijgen als afbeeldingen die structuur “vergeten”. Zo kunnen we eenvoudig functoren van **Grp** of **Top** naar **Set** vinden door een groep of topologische ruimte af te beelden op de onderliggende verzameling. De homomorfismen of continue afbeeldingen blijven hetzelfde, maar we vergeten het feit dat ze structuur respecteren. Evenzo kan men een functor  $\mathbf{Vec}_K \rightarrow \mathbf{Grp}$  definiëren die een vectorruimte opvat als groep met optelling. Een interessanter voorbeeld van een functor komt uit de algebraïsche topologie: zij  $\mathbf{Top}^*$  de categorie van topologische ruimten met een uitgekozen punt  $(X, x_0)$  met als morfismen tussen  $(X, x_0)$  en  $(Y, y_0)$  continue afbeeldingen  $f: X \rightarrow Y$  met  $f(x_0) = y_0$ . Definieer de functor  $F: \mathbf{Top}^* \rightarrow \mathbf{Grp}$  door  $F((X, x_0)) = \pi_1(X, x_0)$ , de fundamentealgroep van  $X$  in  $x_0$ . Aan een continue afbeelding  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  kent  $F$  het geïnduceerde homomorfisme van fundamentealgroepen  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  toe.

Een ander voorbeeld van een functor is te vinden in de lineaire algebra. Definieer de afbeelding  $\mathbf{Vec}_K \rightarrow \mathbf{Vec}_K$  die aan een vectorruimte  $V$  zijn duale vectorruimte

$$V^* = \{f: V \rightarrow K, f \text{ lineair en continu}\}$$

toevoegt. Gegeven een lineaire afbeelding tussen vectorruimten  $L: V \rightarrow W$  verkrijgen we op natuurlijke wijze een afbeelding  $L^*$  tussen de duale vectorruimten door voor  $f \in W^*$  te definiëren  $L^*(f) = f \circ L$ . Echter,  $L^*$  is nu een afbeelding van  $W^*$  naar  $V^*$  in plaats van een

afbeelding  $V \rightarrow W$ , dus volgens bovenstaande defintie kunnen we hier niet van een functor spreken. Dergelijke constructies waarbij er pijlen worden omgekeerd komen echter regelmatig voor, dus we willen dit soort functors graag toelaten.

**Definitie I.1.4.** Laat  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{D}$  categorieën zijn. Een *contravariante functor*  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  is een afbeelding die aan ieder object  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  een object  $F(X) \in \text{Ob } \mathcal{D}$  toevoegt en aan ieder morfisme  $\phi \in \text{Hom}(X, Y)$  een morfisme  $F(\phi) \in \text{Hom}(F(Y), F(X))$  toevoegt zodat

1.  $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$  voor alle  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$
2.  $F(\phi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\phi)$  voor alle morfismen  $\psi \in \text{Hom}(X, Y)$   $\phi \in \text{Hom}(Y, Z)$ .

**Opmerking I.1.5.** We kunnen functoren samenstellen op de voor de hand liggende manier en hiermee geven functoren ons morfismen tussen categorieën. Dit betekent echter niet dat we kunnen spreken over een categorie van alle categorieën. Immers, zoals eerder gezegd vormen de meeste categorieën zelf geen verzamelingen meer en daarom kunnen we niet zonder meer de collectie van alle categorieën vormen — klassen kunnen geen elementen van klassen zijn. Wel kunnen we ons beperken tot de categorieën waarvoor zowel de objecten als de morfismen wel een verzameling vormen, de zogenaamde *kleine categorieën*, en een categorie **Cat** van kleine categorieën vormen.

We gaan verder met het vergelijken van categorieën.

**Definitie I.1.6.** De *identiteitsfunctor*  $\text{id}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  wordt gegeven door  $\text{id}_{\mathcal{C}}(X) = X$  voor alle objecten  $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$  en  $\text{id}_{\mathcal{C}}(\phi) = \phi$  voor alle morfismen  $\phi \in \text{Hom}(X, Y)$ . Twee categorieën  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{D}$  heten *isomorf* als er een tweetal functoren  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  en  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  bestaat zodat  $F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}$  en  $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}}$ .

Met dit begrip kunnen we aangeven wanneer twee categorieën praktisch hetzelfde zijn. In de praktijk blijkt dit echter een minder nuttig begrip. Immers, bij deze isomorfismen moet  $(F \circ G)(X)$  altijd precies gelijk aan  $X$  zijn, terwijl we in een categorie vaak een verfijnder begrip van “gelijkheid van objecten” hebben, zoals homeomorfismen in topologische ruimten en isomorfismes van groepen. Dit begrip kunnen we ook in een algemene categorie definiëren:

**Definitie I.1.7.** Een morfisme  $\phi \in \text{Hom}(X, Y)$  in een categorie  $\mathcal{C}$  heet een isomorfisme als er een  $\psi \in \text{Hom}(Y, X)$  bestaat zodat  $\phi \circ \psi = \text{id}_Y$  en  $\psi \circ \phi = \text{id}_X$ .

We zijn nu geïnteresseerd in paren functoren  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  met de eigenschap dat de objecten  $(F \circ G)(X)$  en  $(G \circ F)(Y)$  isomorf zijn met de orginelen. Om dit te formaliseren, introduceren we een derde centraal begrip uit de categorieëentheorie, een transformatie tussen functoren.

**Definitie I.1.8.** Zij  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  en  $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  functoren. Een *natuurlijke transformatie* of *morfisme van functoren*  $\zeta: F \rightarrow G$  is een collectie morfismen  $\zeta_X: F(X) \rightarrow G(X)$  zodat voor alle  $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$  en ieder morfisme  $\phi: X \rightarrow Y$  het volgende diagram commuteert:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(\phi)} & F(Y) \\ \zeta_X \downarrow & & \downarrow \zeta_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(\phi)} & G(Y) \end{array}$$

Voor een eenvoudig voorbeeld van een morfisme van functoren gaan we terug naar de functor  $\mathbf{Vec}_K \rightarrow \mathbf{Vec}_K$  die aan een vectorruimte  $V$  zijn duale  $V^*$  toevoegt. De samenstelling van deze functor met zichzelf voegt aan  $V$  de vectorruimte  $(V^*)^*$  toe. Noem deze samengestelde functor  $F$ . Voor een vectorruimte  $V$  kunnen we een afbeelding  $\zeta_V: V \rightarrow (V^*)^*$  definiëren door  $\zeta_V(x) = (f \mapsto f(x))$ . Men kan eenvoudig nagaan dat dit een morfisme van functoren tussen de identiteitsfunctor op  $\mathbf{Vec}_K$  en  $F$  geeft. Merk op dat de afbeelding  $\zeta_V$  over het algemeen geen isomorfisme is, want deze afbeelding is niet noodzakelijk surjectief als  $V$  oneindig-dimensionaal is.

De naam suggereert dat de “morfismen van functoren” de morfismen in een categorie vormen: de categorie van alle functoren  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . De samenstelling van morfismen van functoren en het identiteitsmorfisme zijn op de voor de hand liggende manier gedefinieerd. Echter, net als bij de categorie van alle categorieën moeten we ook bij deze categorie voorzichtig zijn – zijn functoren verzamelingen?

In ieder geval kunnen we nu spreken van een *isomorfisme van functoren* en dit geeft aanleiding tot een praktischere begrip van “gelijkheid” van categorieën dan isomorfisme:

**Definitie I.1.9.** Een paar functoren  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  heet een *equivalentie van categorieën* als er isomorfismen van functoren  $F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$  en  $G \circ F \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$  bestaan.

Merk op dat voor een morfisme van functoren  $\zeta: F \rightarrow G$  de conditie dat er een inverse morfisme bestaat, vervangen kan worden door de conditie dat  $\zeta_X: F(X) \rightarrow G(X)$  een isomorfisme is voor alle  $X$ .

In dit hoofdstuk hebben we een overzicht gegeven van de basisbegrippen van de categorieëentheorie. Het is nog niet af.

## Hoofdstuk II

# Banach-algebra's en compacte Hausdorffruimten

In dit hoofdstuk bewijzen we de volgende stelling, een equivalentie van categorieën uit de theorie van commutatieve Banach-algebra's. Dit resultaat maakt het mogelijk om topologische begrippen te vertalen naar de algebra en andersom.

**Stelling II.** *Zij **Haus** de categorie van alle compacte Hausdorffruimten met continue afbeeldingen en **Ban** de categorie van alle Banach-algebra's met involutie, waarbij de morfismen algebra-homomorfismen zijn. De functor die een compacte Hausdorffruimte afbeeldt op de Banach-algebra van continue  $\mathbb{C}$ -waardige functies geeft een equivalentie van categorieën tussen **Ban** en **Haus**.*

### II.1 Banach-algebra's

Om te beginnen geven we een korte introductie in de theorie van Banach-algebra's, waarbij enkele definities en resultaten langskomen die we nodig zullen hebben om het bovenstaande resultaat te bewijzen.

**Definitie II.1.1.** Een *commutatieve Banach-algebra* is een volledige genormeerde vectorruimte over  $\mathbb{C}$  met

- een bewerking  $\cdot : A \times A \rightarrow A$  die commutatief, associatief, distributief is en voldoet aan  $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|$ ; en
- een eenheidselement  $1$  dat voldoet aan  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$  voor alle  $a \in A$ .

Merk op dat uit de eigenschap  $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|$  volgt dat  $\cdot$  continu is op  $A$  in de topologie afkomstig van de norm. Een commutatieve Banach-algebra is zowel een commutatieve ring als een vectorruimte. We kunnen dan ook op de gebruikelijke wijze spreken over lineaire deelruimten en idealen. Een ideaal  $I$  is in het bijzonder een lineaire deelruimte, dus de quotiëntruimte  $A/I$  is weer zowel een ring als vectorruimte. Als  $I$  ook gesloten is wordt het quotiënt weer een Banach-algebra met de *quotiëntnorm*  $\|x + I\| = \inf_{y \in I} \|x + y\|$ . Een morfisme van Banach-algebra's respecteert de gehele structuur (met uitzondering van de norm, die slechts gedeeltelijk wordt gerespecteerd):

**Definitie II.1.2.** Een homomorfisme  $\phi: A \rightarrow B$  van commutatieve Banach-algebra's  $A$  en  $B$  is een continue lineaire afbeelding met  $\phi(a \cdot a') = \phi(a) \cdot \phi(a')$  en  $\phi(1) = 1$ .

We bekijken eerst hoe we, gegeven een compacte Hausdorffruimte, een Banach-algebra kunnen construeren.

**Definitie II.1.3.** Zij  $X$  een compacte topologische ruimte. We schrijven  $C(X)$  voor de algebra van continue  $\mathbb{C}$ -waardige functies op  $X$ . De norm op  $C(X)$  is de *supremumnorm*  $\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$  voor  $f \in C(X)$ . Merk op dat  $\|f\|$  eindig is vanwege de compactheid van  $X$ .

**Lemma II.1.4.** *Zij  $X$  een compacte Hausdorffruimte. Dan is  $C(X)$  met deze norm een Banach-algebra.*

*Bewijs.* Zij  $f_n$  een Cauchyrij in  $C(X)$ . Dan is voor iedere  $x \in X$  de rij  $f_n(x)$  ook Cauchy, dus vanwege de volledigheid van  $\mathbb{C}$  convergeert  $f_n(x)$  naar een  $f(x) \in \mathbb{C}$ . Dit geeft een functie  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ . We bewijzen nu dat  $f$  continu is en dat  $f_n \rightarrow f$  in de supremumnorm. Voor iedere  $x \in X$  geldt

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)|,$$

dus als  $f$  continu is, geldt zeker  $f_n \rightarrow f$ . Neem nu  $U \subset \mathbb{C}$  open en  $y \in f^{-1}(U)$ . Dan is  $f(y) \in U$  en  $U$  is open, dus er is een  $\delta > 0$  zodat  $B(f(y), \delta) \subset U$ . Dan bestaat er een  $N$  zodat voor  $n \geq N$  geldt  $|f_n(x) - f(x)| < \delta/3$  voor alle  $x \in X$ . In het bijzonder geldt  $f_n(y) \in B(f(y), \delta/3)$  en  $V = f_n^{-1}(B(f_n(y), \delta/3))$  is open in  $X$ . Neem nu  $x \in V$ , dan is  $f_n(x) \in B(f_n(y), \delta/3)$ , dus  $f(x) \in B(f_n(y), 2\delta/3) \subset U$ . We concluderen dat  $y \in V \subset f^{-1}(U)$ , dus  $f^{-1}(U)$  is open.  $\square$

We zullen zien dat dit ons een functor **Haus**  $\rightarrow$  **Ban** levert. Echter, om van een equivalentie van categorieën te kunnen spreken, hebben we ook een functor **Ban**  $\rightarrow$  **Haus** nodig. Dit vergt iets meer werk.

**Definitie II.1.5.** Het *Gelfand spectrum*  $\text{Spec}(A)$  van een commutatieve Banach-algebra  $A$  is de verzameling van alle homomorfismen  $A \rightarrow \mathbb{C}$ . We maken hiervan een topologische ruimte door deze uit te rusten met de grofste topologie zodat voor  $a \in A$  de afbeelding  $f_a = \phi \mapsto \phi(a): \text{Spec}(A) \rightarrow \mathbb{C}$  continu is. We noemen deze topologie de  $\tau^*$ -topologie.

Merk op dat de ruimte  $\text{Spec}(A)$  een deelruimte van de duale vectorruimte  $A^*$  van  $A$  is. De duale vectorruimte is zelf een topologische ruimte met de topologie afkomstig van de operatornorm. Ook is  $f_a = \phi \mapsto \phi(a)$  een continue afbeelding in de topologie afkomstig van deze norm. Immers, als  $\phi, \psi \in \text{Spec}(A)$  dan is  $|f_a(\phi) - f_a(\psi)| = |\phi(a) - \psi(a)| \leq \|\phi - \psi\| \|a\|$  en dit is klein als de operatornorm  $\|\phi - \psi\|$  klein is. De topologie  $\tau^*$  is dus zwakker dan de normtopologie.

We zullen nu aantonen dat het Gelfand spectrum in de  $\tau^*$ -topologie een compacte Hausdorffruimte is. Hiervoor hebben we nog enig gereedschap nodig, waaronder een alternatieve representatie van het Gelfand spectrum, gegeven door onderstaande propositie.

**Lemma II.1.6.** *Zij  $A$  een commutatieve Banach-algebra en  $m$  een maximaal ideaal in  $A$ . Dan is  $A/m \cong \mathbb{C}$ .*

*Bewijs.* Merk op dat  $A/m$  een lichaam is en ook een commutatieve Banach-algebra vanwege Gevolg A.2.3. In het bijzonder bevat  $A/m$  een eenheidselement 1, en daarmee ook  $\mathbb{C} = 1 \cdot \mathbb{C}$ . Definieer  $\phi: \mathbb{C} \rightarrow A/m$  met  $\phi(1) = 1$ , dit is een injectief homomorfisme. Stel dat  $x \in A/m$  niet in het beeld van  $\phi$  ligt. Vanwege de Stelling van Gelfand A.2.5 bestaat er  $\lambda \in \mathbb{C}$  zodat  $x - \lambda$  niet inverteerbaar is. Maar dan is  $x - \lambda = 0$  want  $A/m$  is een lichaam. Er volgt  $x = \lambda = \phi(\lambda)$ , een tegenspraak. Dus  $\phi$  is surjectief en daarmee een isomorfisme van Banach-algebra's.  $\square$

**Propositie II.1.7.** *Zij  $A$  een commutatieve Banach-algebra. Zij  $\mathcal{M}(A)$  de verzameling van alle maximale idealen in  $A$ . Dan is de afbeelding  $M = \phi \mapsto \ker \phi: \text{Spec}(A) \rightarrow \mathcal{M}(A)$  een bijectie.*

*Bewijs.* Merk op dat  $M$  goedgedefinieerd is, want  $\phi \in \text{Spec}(A)$  is surjectief en dus vanwege de isomorfiestelling voor ringen  $A/\ker \phi \cong \mathbb{C}$ . Omdat  $\mathbb{C}$  een lichaam is, volgt dat  $\ker \phi$  een maximaal ideaal is. Voor  $m \in \mathcal{M}(A)$  geldt  $A/m \cong \mathbb{C}$ , dus er bestaat een isomorfisme  $\psi: A/m \rightarrow \mathbb{C}$ . We kunnen hiermee een afbeelding  $N: \mathcal{M}(A) \rightarrow \text{Spec} A$  definiëren door  $N(m) = a \mapsto \psi([a])$ , waarbij  $[a]$  de klasse van  $a$  in  $A/m$  is. Dan is

$$\begin{aligned}(M \circ N)(m) &= \ker(a \mapsto [a]) = m \\ (N \circ M)(\phi) &= a \mapsto \phi([a]) = \phi.\end{aligned}$$

Deze afbeeldingen zijn dus elkaars inverse en  $M$  is een bijectie.  $\square$

**Gevolg II.1.8.** *Voor  $\phi \in \text{Spec}(A)$  geldt  $\|\phi\| = 1$ , met  $\|\cdot\|$  de operatornorm op de ruimte van begrensde lineaire afbeeldingen  $A \rightarrow \mathbb{C}$ .*

*Bewijs.* De afbeelding  $\phi$  induceert een afbeelding  $\bar{\phi}: A/\ker \phi \rightarrow \mathbb{C}$  met  $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$ , waarbij  $\pi: A \rightarrow A/\ker \phi$  de quotiëntafbeelding is. Dan is  $\|\phi\| \leq \|\bar{\phi}\| \|\pi\| \leq 1$ , want  $\bar{\phi}$  is een unitaire afbeelding van eendimensionale Banach-algebra's en  $\|\pi(x)\| = \inf_{y \in I} \|x + y\| \leq x$ . Ook geldt  $\phi(1) = 1$ , dus  $\|\phi\| = 1$ .  $\square$

Hiermee hebben we alle benodigde ingrediënten om de volgende propositie te bewijzen.

**Propositie II.1.9.** *De ruimte  $\text{Spec}(A)$  is een compacte Hausdorffruimte in de  $\tau^*$ -topologie.*

*Bewijs.* Stel  $\phi, \psi \in \text{Spec}(A)$  met  $\phi \neq \psi$ . Dan is er een  $a \in A$  zodat  $\phi(a) \neq \psi(a)$ . Omdat  $\mathbb{C}$  Hausdorff is, bestaan er  $U \ni \phi(a)$ ,  $V \ni \psi(a)$  met  $U \cap V = \emptyset$ . Dan zijn  $f_a^{-1}(U)$  en  $f_a^{-1}(V)$  disjuncte open omgevingen van  $\phi$  en  $\psi$ . We bewijzen nu compactheid. Volgens de Stelling van Banach-Alaoglu A.1.2 is de eenheidsbal  $B$  in  $A^*$ , de duale vectorruimte van  $A$  met de operatornorm, compact in de  $\tau^*$ -topologie op  $A^*$ . Vanwege Gevolg II.1.8 geldt  $\text{Spec}(A) \subset B$ . Het is nu voldoende te laten zien dat  $\text{Spec}(A)$  gesloten is in  $B$ . Dit is eenvoudig in te zien, want  $\text{Spec}(A)$  bestaat precies uit die elementen  $\phi$  van  $A^*$  die voldoen aan  $\phi(1) = 1$  en  $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$  voor alle  $x, y \in A$ . Daaruit volgt

$$\text{Spec}(A) = f_1^{-1}(\{1\}) \cap \bigcap_{x,y \in A} (f_x \cdot f_y - f_{x \cdot y})^{-1}(\{0\})$$

en iedere verzameling in deze doorsnede is gesloten per definitie van de topologie.  $\square$

## II.2 Equivalentie van categorieën

We beschikken nu over een manier om aan een compacte Hausdorffruimte een commutatieve Banach-algebra toe te kennen en ook andersom. In deze paragraaf tonen we aan dat deze toekenningen (contravariante) functoren zijn en dat zij een equivalentie van categorieën tussen **Ban** en **Haus** geven.

### Propositie II.2.1.

1. *Definieer  $F: \mathbf{Haus} \rightarrow \mathbf{Ban}$  door  $F(X) = C(X)$  voor een compacte Hausdorffruimte  $X$  en  $F(\phi) = f \mapsto f \circ \phi: C(Y) \rightarrow C(X)$  voor een continue afbeelding  $\phi: X \rightarrow Y$ . Dan is  $F$  een contravariante functor.*
2. *Definieer  $G: \mathbf{Ban} \rightarrow \mathbf{Haus}$  door  $G(A) = \text{Spec}(A)$  voor een commutatieve Banach-algebra  $A \in \text{Ob } \mathbf{Ban}$  en  $G(\alpha) = m \mapsto m \circ \alpha$  voor een homomorfisme  $\alpha: A \rightarrow B$ . Dan is  $G$  een contravariante functor.*

*Bewijs.* Beide beweringen zijn eenvoudig na te gaan:

1. Het is duidelijk dat voor  $\phi \in \text{Hom}(X, Y)$  de afbeelding  $G(\phi): C(Y) \rightarrow C(X)$  gegeven door  $f \mapsto f \circ \phi$  een homomorfisme van algebra's is. Ook geldt

$$F(\phi \circ \psi) = f \mapsto f \circ (\phi \circ \psi) = (f \mapsto f \circ \psi) \circ (f \mapsto f \circ \phi) = F(\psi) \circ F(\phi).$$

2. We gaan na dat voor  $\alpha \in \text{Hom}(A, B)$  de afbeelding  $Z = m \mapsto m \circ \alpha$  een continue afbeelding  $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  is. Neem een element  $\mathcal{B}_A(a, U) = \{\phi \in \text{Spec}(A) : \phi(a) \in U\}$  in de basis van de topologie op  $\text{Spec}(A)$  voor zekere  $a \in A$  en  $U \subset \mathbb{C}$  open. Dan is

$$Z^{-1}(\mathcal{B}_A(a, U)) = \{\phi \in \text{Spec}(B) : \phi(\alpha(a)) \in U\} = \mathcal{B}_B(\alpha(a), U). \quad \square$$

De volgende twee stellingen geven de benodigde isomorfismen  $G \circ F \cong \text{id}_{\mathbf{Haus}}$  en  $F \circ G \cong \text{id}_{\mathbf{Ban}}$  om de equivalentie aan te tonen.

**Stelling II.2.2.** *De functor  $G \circ F: \mathbf{Haus} \rightarrow \mathbf{Haus}$  met  $G$  en  $F$  zoals boven gedefinieerd is isomorf met  $\text{id}_{\mathbf{Haus}}$ .*

*Bewijs.* Zij  $X$  een topologische ruimte. We zullen aantonen dat  $X$  en  $G(F(X)) = \text{Spec}(C(X))$  homeomorf zijn. Bekijk de afbeelding  $X \rightarrow \text{Spec}(C(X))$  gegeven door  $\zeta_X(x) = f \mapsto f(x)$ . Neem nu  $\phi \in \text{Spec}(C(X))$  en schrijf  $m = \ker \phi$ . We beweren dat  $\bigcap_{f \in m} Z(f)$  precies één element bevat.

Om te beginnen tonen we aan dat  $\bigcap_{f \in m} Z(f) \neq \emptyset$ . Omdat  $X$  compact is en de verzamelingen  $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$  gesloten zijn voor alle  $f$ , is het voldoende te bewijzen dat  $Z(f_1) \cap \dots \cap Z(f_n) \neq \emptyset$  voor iedere eindige deelverzameling  $\{f_1, \dots, f_n\} \subset m$ . Stel dat dit wel zo is. Definieer  $g = \overline{f_1}f_1 + \dots + \overline{f_n}f_n \in m$ , dan is  $g$  nergens nul op  $X$ . Maar dan is  $1/g$  een continue functie op  $X$ , dus  $1 = gg^{-1} \in m$ . Dit is een tegenspraak. Stel nu  $a, b \in \bigcap_{f \in m} Z(f)$  met  $a \neq b$ . Dan geldt  $m \subset \{f \in C(X) : f(a) = 0\}$  en dit is een ideaal strikt groter dan  $m$  wegens het Lemma van Urysohn, immers er bestaat  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  met  $f(a) = 0$  en  $f(b) = 1$ . Dit is in tegenspraak met het feit dat  $m$  maximaal is.

Definieer nu  $\xi_X(\phi)$  als dit unieke element van  $\bigcap_{f \in \ker \phi} Z(f)$ . We laten zien dat  $\xi_X$  en  $\zeta_X$  elkaars inversen zijn. Voor  $x \in X$  is  $(\xi_X \circ \zeta_X)(x)$  gelijk aan het element van  $\bigcap_{g \in \ker(f \mapsto f(x))} Z(g)$ .

Functionen in  $\ker(f \mapsto f(x))$  zijn duidelijk 0 in  $x$ , dus dit element kan niets anders zijn dan  $x$ . Andersom vinden we voor  $\phi \in \text{Spec}(C(X))$  dat  $(\zeta_X \circ \xi_X)(\phi)$  gelijk is aan de afbeelding  $f \mapsto f(z)$ , waarbij  $z$  het unieke element van  $X$  is waar alle elementen uit de kern van  $\phi$  gelijk aan 0 zijn. Als  $f(z) = 0$  geldt  $f \in \ker \phi$  vanwege de maximaliteit van  $\ker \phi$ . Vanwege Propositie II.1.7 wordt een element van  $\text{Spec}(A)$  geheel bepaald door zijn kern, dus er volgt dat deze afbeelding gelijk is aan  $\phi$ . Dit bewijst de bewering en hiermee hebben we vastgesteld dat  $\zeta_X$  een bijectie is.

We tonen aan dat  $\zeta_X$  zelfs een homeomorfisme is. De afbeelding  $\zeta_X$  is continu per definitie van de topologie op  $\text{Spec}(C(X))$ , immers verzamelingen uit de basis van deze topologie zijn van de vorm  $\mathcal{B}(a, U) = \{\phi \in \text{Spec}(C(X)) : \phi(f) \in U\}$  voor zekere  $f \in C(X)$  en  $U \subset \mathbb{C}$  open. Dan is  $\zeta_X^{-1}(\mathcal{B}(a, U)) = \{x \in X : f(x) \in U\}$  en dit is open vanwege de continuïteit van  $f$ . Verder is  $X$  compact en  $\text{Spec}(C(X))$  Hausdorff, dus er volgt dat  $\zeta_X$  een homeomorfisme is.

Tenslotte gaan we na dat  $\zeta$  inderdaad een natuurlijke transformatie  $G \circ F \rightarrow \text{id}_{\mathbf{Haus}}$  geeft, dat wil zeggen dat voor alle  $\phi: X \rightarrow Y$  het volgende diagram commuteert:

$$\begin{array}{ccc} (G \circ F)(X) & \xrightarrow{(G \circ F)(\phi)} & (G \circ F)(Y) \\ \zeta_X \uparrow & & \uparrow \zeta_Y \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array}$$

We hebben  $F(\phi) = f \mapsto (f \circ \phi)$  en

$$G(F(\phi)) = m \mapsto (m \circ (f \mapsto (f \circ \phi))),$$

dus

$$\begin{aligned} (G \circ F)(\phi)(\zeta_X(x)) &= G(F(\phi))(g \mapsto g(x)) = (g \mapsto g(x)) \circ (f \mapsto (f \circ \phi)) \\ &= f \mapsto (f \circ \phi)(x) = f \mapsto f(\phi(x)) = \zeta_Y(\phi(x)). \end{aligned} \quad \square$$

Om te bewijzen dat  $F \circ G$  ook isomorf is met de identiteit hebben we een extra structuur nodig op de Banach-algebra:

**Definitie II.2.3.** Een *involutie* op een commutatieve Banach-algebra  $A$  is een afbeelding  $x \mapsto x^*: A \rightarrow A$  die voldoet aan  $\|x^* \cdot x\| = \|x\|^2$ ,  $(x^*)^* = \overline{x}$ ,  $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$ ,  $(x + y)^* = x^* + y^*$  en  $(x \cdot y)^* = y^* \cdot x^*$  voor alle  $x, y \in A$  en  $\lambda \in \mathbb{C}$ . De involutie op de Banach-algebra van continue functies wordt gegeven door complexe conjugatie.

**Stelling II.2.4.** De functor  $F \circ G: \mathbf{Ban} \rightarrow \mathbf{Ban}$  is isomorf met  $\text{id}_{\mathbf{Ban}}$ .

*Bewijs.* Neem  $A \in \text{Ob } \mathbf{Ban}$ . We zullen aantonen dat  $A$  en  $C(\text{Spec}(A))$  isomorf zijn als Banach algebra's. Definieer  $\zeta_A: A \rightarrow C(\text{Spec}(A))$  door  $\zeta_A(a) = f_a = \phi \mapsto \phi(a)$ . De afbeeldingen  $f_a$  zijn continu per definitie van de topologie op  $\text{Spec}(A)$ , dus dit is goedgedefinieerd.

We laten zien dat voor  $\phi \in \text{Spec}(A)$  geldt dat  $\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$ . Neem daartoe eerst  $x \in A$  met  $x = x^*$  en bekijk  $z = x + it$  voor  $t \in \mathbb{R}$ . Schrijf  $\phi(x) = \alpha + i\beta$ , dan geldt

$$\phi(z) = \alpha + i\beta + it = \alpha + i(\beta + t).$$

Nu is

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |\phi(z)|^2 \leq \|z\|^2 = \|z \cdot z^*\| = \|(x + it)(x - it)\| = \|x^2 + t^2\| \leq \|x^2\| + t^2,$$

oftewel  $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|x^2\|$ . Dit geldt voor alle  $t \in \mathbb{R}$ , dus  $\beta = 0$  en hieruit volgt  $\phi(x) \in \mathbb{R}$ . Neem nu  $x \in A$  willekeurig, dan kunnen we  $x$  schrijven als  $x = (x + x^*)/2 + (x - x^*)/2$ , waarbij  $u := (x + x^*)/2$  en  $v := -i(x - x^*)/2$  voldoen aan  $u^* = u$  en  $v^* = v$ . Dan is  $x = u + iv$ ,  $x^* = u - iv$ , dus  $\phi(x^*) = \phi(u) - i\phi(v) = \overline{\phi(x)}$ .

Zij  $V = \{\zeta_A(a) : a \in A\}$ . Dan is  $V$  gesloten onder complexe conjugatie en  $V$  bevat alle constante functies, immers voor  $\lambda \in \mathbb{C}$  is de functie  $f_\lambda$  constant vanwege het feit dat de  $\phi \in \text{Spec}(A)$  unitair zijn. Ook geldt als twee functies  $\phi, \psi$  verschillend zijn dat er een  $a \in A$  bestaat zodat  $\phi(a) \neq \psi(a)$ . Dus uit Stone-Weierstrass (A.1.1) volgt dat  $V$  dicht ligt in  $C(\text{Spec}(A))$ .

We tonen nu aan  $\zeta_A$  een isometrie is. Hieruit kunnen we concluderen dat het beeld van  $\zeta_A$  gesloten is en dus gelijk is aan  $C(\text{Spec}(A))$ . Neem  $a \in A$ . Vanwege Stelling A.2.6 en Stelling A.2.7 geldt

$$\begin{aligned} \|f_a\|_\infty &= \sup\{|f_a(\phi)| : \phi \in \text{Spec}(A)\} = \sup\{|\phi(a)| : \phi \in \text{Spec}(A)\} \\ &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \rho(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}, \end{aligned}$$

dus het is voldoende om te laten zien dat deze limiet gelijk is aan  $\|a\|$ . Er geldt

$$\|a^2\| = \sqrt{\|(a^2)^* \cdot a^2\|} = \sqrt{\|a^* \cdot a^* \cdot a \cdot a\|} = \sqrt{\|(a^* \cdot a)^*(a^* \cdot a)\|} = \|a^* \cdot a\| = \|a\|^2$$

en met inductie vinden we  $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$ . Er volgt dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} = \|a\|$  zoals gewenst.

Ten slotte gaan we na dat voor  $z : A \rightarrow B$  het volgende diagram commuteert:

$$\begin{array}{ccc} (F \circ G)(A) & \xrightarrow{(F \circ G)(z)} & (F \circ G)(B) \\ \uparrow \zeta_A & & \uparrow \zeta_B \\ A & \xrightarrow{z} & B \end{array}$$

We hebben  $G(z) = \phi \mapsto \phi \circ z$  en

$$F(G(z)) = f \mapsto f \circ (\phi \mapsto \phi \circ z) = f \mapsto (\phi \mapsto f(\phi \circ z)),$$

dus

$$(F \circ G)(z)(\zeta_A(a)) = (F \circ G)(z)(f_a) = f_a(\phi \circ z) = \phi(z(a)) = f_{z(a)}(\phi) = \zeta_B(z(a)). \quad \square$$

Met deze stelling hebben we bewezen dat er een correspondentie is tussen Banach-algebra's en topologische ruimten. Dit betekent dat we iedere bewering over compacte Hausdorffruimten om kunnen zetten in een bewering over Banach-algebra's en andersom. Zo kunnen we bijvoorbeeld bekende resultaten uit de topologie gebruiken om een bewering over Banach-algebra's te bewijzen:

**Propositie II.2.5.** *Zij  $f: A \rightarrow B$  een morfisme van Banach-algebra's. Dan is  $\text{im} f$  weer een Banach-algebra.*

*Bewijs.* Het corresponderende resultaat voor compacte Hausdorffruimten is bekend: het beeld van een continue afbeelding tussen compacte Hausdorffruimten is weer een compacte Hausdorffruimte. Het is dus voldoende om aan te tonen dat het beeld wordt behouden onder de equivalentie. Neem daartoe een continue afbeelding van compacte Hausdorffruimten  $f: X \rightarrow Y$  en schrijf  $f^*$  voor de corresponderende afbeelding  $C(Y) \rightarrow C(X)$ . We bewijzen dat  $C(f(X)) \cong \text{im} f^*$ . Een lineaire afbeelding  $\zeta: C(f(X)) \rightarrow \text{im} f^*$  wordt gegeven door  $\zeta = \phi \mapsto \phi \circ f$ . Deze afbeelding is duidelijk injectief en surjectief vanwege Tietze's extensiestelling. Ook is  $\|\zeta(\phi)\| = \|\phi\|$ , dus dit is een isometrisch isomorfisme van genormeerde algebra's. Dus  $C(f(X)) \cong \text{im} f^*$  en in het bijzonder is  $\text{im} f^*$  Banach. Omdat iedere afbeelding van Banach-algebra's overeenkomt met een continue afbeelding van Hausdorffruimten volgt de stelling.  $\square$

# Hoofdstuk III

## Fundamentealgroep

Zoals in het eerste hoofdstuk al werd vermeld, is de fundamentealgroep een functor van de categorie **Top**\* van topologische ruimten met een uitgekozen punt naar de categorie **Grp** van groepen. Deze functor voegt aan een topologische ruimte  $(X, x_0)$  de groep  $\pi_1(X, x_0)$  van homotopieklassen van lussen met basispunt  $x_0$  toe, waarbij de groepsbewerking  $*$  wordt gegeven door samenstelling van lussen. Aan een afbeelding  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  voegt deze functor de afbeelding  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  gegeven door  $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$  toe. In dit hoofdstuk bewijzen we een equivalentie tussen overdekkingen en verzamelingen waar de fundamentealgroep op werkt, eerst voor ruimten met een universele overdekking en daarna in het algemeen.

### III.1 Overdekkingen

De eerste berekening van een fundamentealgroep die men in een tekst over algebraïsche topologie tegenkomt is die van de cirkel  $S^1$ . Om hiervan de fundamentealgroep te berekenen wordt gebruikt dat de cirkel overdekt wordt door de reële lijn  $\mathbb{R}$  met behulp van de afbeelding  $x \mapsto e^{2\pi ix}$ . Voor deze overdekking geldt dat afbeeldingen naar de cirkel op een zekere (unieke) manier “opgetild” kunnen worden naar de reële lijn en hiermee kan bewezen worden dat  $\pi_1(S^1, s_0) = \mathbb{Z}$ . De volgende definities maken dit precies en generaliseren dit naar een willekeurige topologische ruimte<sup>1</sup>.

**Definitie III.1.1.** Zij  $X$  een topologische ruimte. Een *overdekkingsruimte*  $(Y, p)$  van  $X$  is een topologische ruimte  $Y$  en een continue surjectieve afbeelding  $p: Y \rightarrow X$  met de eigenschap dat er een open overdekking  $\{U_\alpha\}$  van  $X$  is zodat voor iedere  $\alpha$  geldt dat  $p^{-1}(U_\alpha)$  een disjuncte vereniging van open verzamelingen  $V_\beta$  in  $Y$  is, waarbij voor iedere  $\beta$  de beperking  $p|_{V_\beta}$  een homeomorfisme  $V_\beta \rightarrow U_\alpha$  is.

**Definitie III.1.2.** Zij  $(Y, p)$  een overdekkingsruimte van  $X$  en  $f: Z \rightarrow X$  een continue afbeelding. Een afbeelding  $\tilde{f}: Z \rightarrow Y$  heet een *lift* van  $f$  als  $p \circ \tilde{f} = f$ .

Analoog aan het geval van de cirkel kan voor een willekeurig topologische ruimte bewezen worden dat lifts van lussen en homotopieën bestaan en uniek zijn. Hierbij is het volgende lemma handig:

---

<sup>1</sup>Hierbij, en in het vervolg van deze paragraaf, volgen we grotendeels [5]

**Lemma III.1.3.** *Zij  $f: Z \times [0, 1] \rightarrow X$  een continue afbeelding en  $\{U_\alpha\}$  een open overdekking van  $X$ . Neem  $z \in Z$ , dan is er een partitie  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$  van  $[0, 1]$  en een open omgeving  $V \subset Z$  van  $z$  zodat voor iedere  $i$  geldt  $f(V \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_{\alpha_i}$  voor zekere  $\alpha_i$ .*

*Bewijs.* De verzamelingen  $f^{-1}(U_\alpha)$  vormen een open overdekking van  $Z \times [0, 1]$  en ieder van deze verzamelingen is een vereniging van omgevingen van de vorm  $U \times (a, b)$ , want deze omgevingen vormen een basis van de producttopologie op  $Z \times [0, 1]$ . Vanwege de compactheid van  $\{z\} \times [0, 1]$  zijn er dus eindig veel verzamelingen van de vorm  $U_i \times (a_i, b_i)$  die  $\{z\} \times [0, 1]$  overdekken, waarbij iedere  $U_i$  een open omgeving van  $z$  is en  $U_i \times (a_i, b_i) \subset f^{-1}(U_{\alpha_i})$  voor zekere  $\alpha_i$ . De  $(a_i, b_i)$  overdekken  $[0, 1]$ , dus er bestaan  $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$  zodat voor elke  $j$  er een  $i$  is zodat  $[t_j, t_{j+1}] \subset (a_i, b_i)$ . In het bijzonder geldt dan  $U_i \cap [t_j, t_{j+1}] \subset f^{-1}(U_{\alpha_i})$  voor zekere  $i$ , dus als we  $V = \bigcap_i U_i$  kiezen, voldoen de verzamelingen  $V \times [t_i, t_{i+1}]$  aan  $f(V \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_{\alpha_i}$ .  $\square$

We passen dit eerst toe om paden te liften en daarna gebruiken we de uniciteit van een lift van een pad om een algemenere afbeelding te liften.

**Lemma III.1.4.** *Zij  $(Y, p)$  een overdekkingsruimte van  $X$  en  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  een continue functie met  $\gamma(0) = x_0$ . Dan bestaat er voor iedere  $y_0 \in p^{-1}(x_0)$  een unieke lift  $\tilde{\gamma}: I \rightarrow Y$  met  $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ .*

*Bewijs.* Het vorige lemma toepassen met  $Z$  gelijk aan een punt geeft een partitie  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$  van  $[0, 1]$  zodat voor iedere  $i$  geldt  $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_{\alpha_i}$  voor zekere  $\alpha_i$ . Dan is er een  $V_0 \subset Y$  met  $y_0 \in V_0$  zodat  $p|_{V_0}: V_0 \rightarrow U_{\alpha_0}$  een homeomorfisme is. Hiermee kunnen we op  $[t_0, t_1]$  definiëren  $\tilde{\gamma} = p|_{V_0}^{-1} \circ \gamma$ . Stel nu dat we een (andere) lift  $\tilde{\gamma}'$  van  $\gamma$  met  $\tilde{\gamma}'(0) = y_0$  hebben. Dan is  $\tilde{\gamma}'([t_0, t_1])$  samenhangend, dus geheel bevat in  $V_0$ , want  $\tilde{\gamma}'(t_0) = y_0 \in V_0$  en  $(p \circ \tilde{\gamma}')([t_0, t_1]) = \gamma([t_0, t_1]) \subset U_{\alpha_0}$ . Er volgt dat  $\tilde{\gamma}' = p|_{V_0}^{-1} \circ \gamma$ , dus  $\tilde{\gamma}'$  komt overeen met  $\tilde{\gamma}$  op  $[t_0, t_1]$ . Zo gaan we inductief verder: er is een  $V_1 \subset Y$  met  $\tilde{\gamma}(t_1) \in V_1$  zodat  $p|_{V_1}: V_1 \rightarrow U_{\alpha_1}$  een homeomorfisme is, en hiermee kunnen we  $\tilde{\gamma}$  definiëren op  $[t_1, t_2]$  door  $\tilde{\gamma} = p|_{V_1}^{-1} \circ \gamma$ . Analoog geldt er weer dat alle lifts op  $[t_1, t_2]$  overeenkomen, dus na eindig veel stappen is  $\tilde{\gamma}$  uniek gedefinieerd op heel  $[0, 1]$ .  $\square$

**Propositie III.1.5.** *Zij  $(Y, p)$  een overdekkingsruimte van  $X$  en  $f: Z \times [0, 1] \rightarrow X$  een continue functie. Stel dat een lift  $\tilde{f}_0$  van  $z \mapsto f(z, 0)$  gegeven is. Dan bestaat er een unieke lift  $\tilde{f}: Z \times [0, 1] \rightarrow Y$  die  $\tilde{f}_0$  uitbreidt.*

*Bewijs.* Neem  $z \in Z$ , dan vinden we weer een partitie  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$  van  $[0, 1]$  en een open omgeving  $V \subset Z$  van  $z$  zodat  $f(V \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_{\alpha_i}$  voor elke  $i$ . We construeren analoog aan het bewijs van het vorige lemma een lift van  $f$  op  $V \times [0, 1]$ . Er bestaat een  $V_0 \subset Y$  met  $\tilde{f}_0(z) \in V_0$  zodat  $p|_{V_0}: V_0 \rightarrow U_{\alpha_0}$  een homeomorfisme is. We mogen aannemen dat  $\tilde{f}_0(V) \subset V_0$ , immers als dit niet zo is, vervangen we  $V$  door een kleinere omgeving van  $z$ . Dan kunnen we  $\tilde{f}$  op  $V \times [t_0, t_1]$  definiëren door  $\tilde{f} = p|_{V_0}^{-1} \circ f$ . We gaan weer inductief verder: we vinden  $V_1 \subset Y$  met  $\tilde{f}(V \times \{t_1\}) \subset V_1$  en zodat  $V_1$  homeomorf op  $U_{\alpha_1}$  wordt afgebeeld door  $p$ . Hiermee definiëren we  $\tilde{f}$  op  $V \times [t_1, t_2]$ . Na eindig veel stappen hebben we  $\tilde{f}$  gedefinieerd op heel  $V \times [0, 1]$ .

Dit proces kunnen we voor iedere  $z \in Z$  uitvoeren. Stel dat  $\tilde{f}^1: V^1 \times [0, 1] \rightarrow Y$  en  $\tilde{f}^2: V^2 \times [0, 1]$  twee lifts zijn die op deze manier zijn verkregen en stel  $z \in V^1 \cap V^2$ . Dan zijn  $\tilde{f}^1|_{\{z\} \times [0, 1]}$  en  $\tilde{f}^2|_{\{z\} \times [0, 1]}$  beide lifts van het pad  $f|_{\{z\} \times [0, 1]}$ , dus wegens het vorige lemma

gelijk. Hiermee verkrijgen we een goedgedefinieerde lift  $\tilde{f}$  van  $f$  op heel  $Z \times [0, 1]$ . Deze is continu omdat er voor iedere  $z \in Z$  een open omgeving  $V$  van  $z$  is zodat de afbeelding continu is op  $V \times [0, 1]$  en uniek omdat hij voor iedere  $z \in Z$  uniek is op  $\{z\} \times [0, 1]$ .  $\square$

**Gevolg III.1.6.** *Als twee paden  $\gamma, \gamma': [0, 1] \rightarrow X$  homotoop zijn relatief  $\{0, 1\}$  en  $\tilde{\gamma}$  en  $\tilde{\gamma}'$  lifts zijn naar overdekking  $Y$ , dan zijn  $\tilde{\gamma}$  en  $\tilde{\gamma}'$  homotoop relatief  $\{0, 1\}$ .*

*Bewijs.* Zij  $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  een homotopie van  $\gamma$  naar  $\gamma'$  relatief  $\{0, 1\}$ , dan is er een lift  $\tilde{F}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$  vanwege de propositie. Omdat  $F$  de eindpunten vastlaat, zijn  $F|_{\{0\} \times [0, 1]}$  en  $F|_{\{1\} \times [0, 1]}$  constant, dus  $\tilde{F}|_{\{0\} \times [0, 1]}$  en  $\tilde{F}|_{\{1\} \times [0, 1]}$  zijn lifts van een constant pad. Duidelijk is de constante lift een mogelijke lift van een constant pad, dus vanwege de uniciteit zijn deze lifts constant en is  $\tilde{F}$  weer een homotopie relatief  $\{0, 1\}$ .  $\square$

Verder merken we nog op dat lifts van willekeurige afbeeldingen naar samenhangende overdekkingen altijd uniek zijn.

**Lemma III.1.7.** *Zij  $f: Z \rightarrow X$  een continue afbeelding en  $(Y, p)$  een samenhangende overdekking van  $X$ . Zij  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2: Z \rightarrow Y$  twee lifts van  $f$  en stel dat  $\tilde{f}_1(x_0) = \tilde{f}_2(x_0)$  voor zekere  $x_0 \in Z$ . Dan geldt  $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ .*

*Bewijs.* Schrijf  $A = \{z \in Z : \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2\}$ . We tonen aan dat  $A$  zowel open als gesloten is in  $Z$ . Neem  $z \in Z$ , dan bestaat er een open omgeving  $U_\alpha$  van  $f(z)$  zodat  $p^{-1}(U_\alpha)$  een disjuncte vereniging is van open verzamelingen  $V_\beta$  die onder  $p$  homeomorf op  $U_\alpha$  worden afgebeeld. Dan is er een  $\beta$  zodat  $\tilde{f}_1(z) \in V_\beta$  en een  $\beta'$  zodat  $\tilde{f}_2(z) \in V_{\beta'}$ . Verder bestaat er een open omgeving  $N$  van  $z$  zodat  $\tilde{f}_1(N) \subset V_\beta$  en  $\tilde{f}_2(N) \subset V_{\beta'}$ . Als nu  $z \in A$ , dan is  $\beta = \beta'$ , maar dan volgt dat  $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$  op  $N$ , want  $p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_2$  en  $p$  is hier homeomorfisme  $V_\beta \rightarrow U_\alpha$ . Als  $z \notin A$  dan is  $\beta \neq \beta'$  en is duidelijk  $\tilde{f}_1(z') \neq \tilde{f}_2(z')$  voor alle  $z' \in N$ .  $\square$

**Definitie III.1.8.** Zij  $X$  een topologische ruimte. Een *universele overdekking* van  $X$  is een overdekkingsruimte  $\tilde{X}$  die enkelvoudig samenhangend is, dat wil zeggen  $\tilde{X}$  is wegsamenhangend en  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = 0$  voor alle  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ .

**Stelling III.1.9.** *Zij  $X$  een wegsamenhangende en lokaal wegsamenhangende topologische ruimte. Stel dat voor alle  $x \in X$  er een open omgeving  $U$  van  $x$  is zodat de door de inclusie geïnduceerde afbeelding  $\pi_1(U, x) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x)$  triviaal is, dan bestaat er een universele overdekking van  $X$ .*

*Bewijs.* Kies  $x_0 \in X$ . Definieer  $\tilde{X} = \{[\gamma] \mid \gamma: [0, 1] \rightarrow X, \gamma(0) = x_0\}$ , waarbij  $[\gamma]$  een homotopieklasse van paden ten opzichte van homotopieën relatief  $\{0, 1\}$  is. We hebben nu een goedgedefinieerde afbeelding  $\tilde{X} \rightarrow X$  gegeven door  $p([\gamma]) = \gamma(1)$ . We tonen aan dat de volgende collectie een basis is voor de topologie op  $X$ :

$$\mathcal{U} = \{U \subset X \text{ open} : U \text{ is wegsamenhangend en de afbeelding } \pi_1(U) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X) \text{ is triviaal}\}, \quad (\text{III.1})$$

waarbij we basispunten weg mogen laten omdat  $U$  wegsamenhangend is. Merk op dat als  $V \subset U$  dan is de inclusie  $i: V \rightarrow X$  gelijk aan de samenstelling van de inclusies  $V \rightarrow U$  en  $U \rightarrow X$ , dus  $i_*$  is triviaal als de inclusie  $U \rightarrow X$  dat is. Hieruit volgt dat als  $U \in \mathcal{U}$  dan ook  $V \in \mathcal{U}$  voor iedere  $V \subset U$ . Omdat per aanname voor iedere  $x \in X$  er een  $U \in \mathcal{U}$  is met  $x \in U$  volgt hieruit dat  $\mathcal{U}$  inderdaad een basis vormt voor de topologie van  $X$ .

Definieer nu voor  $U \in \mathcal{U}$  en  $[\gamma] \in \tilde{X}$  met  $\gamma(1) \in U$  de verzameling

$$U_{[\gamma]} = \{[\gamma * \eta] \mid \eta: [0, 1] \rightarrow U, \eta(0) = \gamma(1)\}. \quad (\text{III.2})$$

Dit is goedgedefinieerd want als  $\gamma$  en  $\gamma'$  homotoop zijn dan zijn  $\gamma * \eta$  en  $\gamma' * \eta$  dit ook. Verder geldt  $U_{\gamma'} = U_{[\gamma]}$  als  $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$ . Immers, als  $[\gamma'] = [\gamma * \eta]$  dan geldt voor iedere  $[\gamma' * \mu] \in U_{\gamma'}$  dat  $[\gamma' * \mu] = [\gamma * \eta * \mu] \in U_{[\gamma]}$  en andersom voor  $[\gamma * \mu] \in U_{[\gamma]}$  geldt  $[\gamma * \mu] = [\gamma * \eta * \bar{\eta} * \mu] \in U_{\gamma'}$ , waarbij  $\bar{\eta}$  het omgekeerde pad  $t \mapsto \eta(1 - t)$  is. Hieruit volgt dat de collectie

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{U_{[\gamma]} : U \in \mathcal{U}; [\gamma] \in \tilde{X}, \gamma(1) \in U\}$$

een basis vormt voor een topologie op  $\tilde{X}$ : immers, stel  $U_{[\gamma]}, V_{[\gamma']} \in \tilde{\mathcal{U}}$  en  $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$ , dan is  $U_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]}$  en  $V_{[\gamma'']} = V_{[\gamma']}$ . Omdat  $\mathcal{U}$  een basis voor de topologie op  $X$  is, bestaat er een  $W \in \mathcal{U}$  met  $W \subset U \cap V$  en  $\gamma''(1) \in W$ . Dan is  $W_{[\gamma'']} \subset U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$ , want ieder pad  $\eta$  in  $W$  ligt ook in  $U$  en  $V$ . Ook geldt  $[\gamma''] \in W_{[\gamma'']}$ , want  $[\gamma''] = [\gamma'' * e]$ , waarbij  $e$  het constante pad is.

We tonen nu aan dat de afbeelding  $p|_{U_{[\gamma]}}$  een homeomorfisme  $U_{[\gamma]} \rightarrow U$  geeft. Deze afbeelding is surjectief, want  $U$  is wegsamenhangend. Hij is injectief, want als  $\eta, \eta'$  paden in  $U$  zijn met  $\eta(1) = \eta'(1)$  dan is  $\eta * \bar{\eta}'$  een lus in  $U$ , en omdat  $\pi_1(U) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X)$  triviaal is, zijn alle lussen in  $U$  samentrekbaar in  $X$ , dus in het bijzonder is  $[\eta * \eta'] = [\eta * \eta']$ . Verder geldt voor  $V \in \mathcal{U}$  met  $V \subset U$  dat  $(p|_{U_{[\gamma]}})^{-1}(V) = V_{[\gamma]}$  voor willekeurige  $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$  met eindpunt in  $V$ . Immers, duidelijk is  $V_{[\gamma']} \subset p^{-1}(V) \cap U_{[\gamma]} = p^{-1}(V) \cap U_{[\gamma]} = (p|_{U_{[\gamma]}})^{-1}(V)$  en  $p|_{V_{[\gamma]}}$  is een bijectie  $V_{[\gamma']} \rightarrow V$ . Ook geldt voor  $V_{[\gamma']} \subset U_{[\gamma]}$  dat  $p(V_{[\gamma']}) = V$ , dus  $p|_{U_{[\gamma]}}$  is open.

Omdat  $p$  continu is op ieder element van  $\tilde{\mathcal{U}}$ , is  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  een continue afbeelding. Ook is  $(\tilde{X}, p)$  een overdekkingsruimte met  $\mathcal{U}$  als overdekking van  $X$ , want voor  $U \in \mathcal{U}$  zijn de verschillende  $U_{[\gamma]} \subset p^{-1}(U)$  disjunct. Immers, als  $[\gamma''] \in U_{[\gamma]}$  en  $[\gamma'''] \in U_{[\gamma']}$  dan geldt  $U_{[\gamma]} = U_{[\gamma'']} = U_{[\gamma']}$ .

Ten slotte tonen we aan dat  $\tilde{X}$  enkelvoudig samenhangend is. Neem  $[\gamma] \in \tilde{X}$  en definieer paden  $\gamma_t = u \mapsto \gamma(tu)$ . Dan is  $t \mapsto [\gamma_t]$  een pad in  $\tilde{X}$  tussen de equivalentieklasse  $[c]$  van het constante pad  $c = t \mapsto x_0$  en  $[\gamma]$ . Deze constructie is mogelijk voor iedere  $[\gamma] \in \tilde{X}$ , dus  $\tilde{X}$  is wegsamenhangend. We tonen nu aan dat de afbeelding  $p_*: \pi_1(\tilde{X}, [c]) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  triviaal is. Voor een lus  $\tilde{\gamma}$  in  $\tilde{X}$  geldt  $p_*([\tilde{\gamma}]) = [p \circ \tilde{\gamma}]$ , dus  $\tilde{\gamma}$  is een lift van  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ . Maar ook  $\eta = t \mapsto [\gamma_t]$  is een lift van  $\gamma$ , dus vanwege de uniciteit van lifts is deze gelijk aan  $\tilde{\gamma}$  en dus ook een lus. Maar dan is  $[c] = \eta(0) = \eta(1) = [\gamma_1] = [\gamma]$ , dus  $\gamma$  is homotoop met het constante pad  $c$ . Er volgt  $p_*([\tilde{\gamma}]) = 0$ , dus  $p$  is triviaal. Merk op dat  $p_*$  injectief is vanwege het feit dat we homotopieën kunnen liften naar een overdekkingsruimte, dus er volgt dat  $\pi_1(\tilde{X}, [c])$  triviaal is.  $\square$

In het vervolg zullen we nodig hebben dat de fundamentealgroep van  $X$  op  $\tilde{X}$  werkt via  $[\eta] \cdot [\gamma] = [\eta * \gamma]$ , voor  $[\eta] \in \pi_1(X)$  en  $[\gamma] \in \tilde{X}$ .

**Propositie III.1.10.** *De universele overdekking  $\tilde{X}$  die in bovenstaande stelling is geconstueerd is “universeel” in de volgende zin: voor iedere samenhangende overdekking  $(Y, p)$  van  $X$  en iedere keuze van  $y \in p^{-1}(x_0)$  is er een unieke continue surjectieve afbeelding  $p_y: \tilde{X} \rightarrow Y$  zodat  $p \circ p_y = \tilde{p}$  en  $p_y(\tilde{x}_0) = x_0$ , waarbij  $\tilde{x}_0$  het constante pad  $x_0$  is.*

*Bewijs.* Definieer  $p_y([\gamma]) = \tilde{\gamma}(1)$ , waarbij  $\tilde{\gamma}$  de lift van  $\gamma$  is met  $\tilde{\gamma}(0) = y$ . Er geldt  $(p \circ \tilde{\gamma})(1) = \gamma(1) = \tilde{p}([\gamma])$  en  $p$  is continu omdat  $\tilde{p}$  continu is en  $p$  lokaal een homeomorfisme is. Verder is

$p_y$  surjectief, want  $Y$  is lokaal homeomorf met  $X$ , dus lokaal wegsamenhangend en dus ook wegsamenhangend. Dus een voor  $y' \in Y$  is er een pad  $\tilde{\gamma}$  van  $y$  naar  $y'$  en dit is een lift van het pad van  $x_0$  naar  $p(y)$ . De uniciteit volgt direct uit Lemma III.1.7:  $p_y$  is een lift van  $p$ .  $\square$

## III.2 Fundamenteaalgroep via overdekkingen

In het vervolg van dit hoofdstuk is  $X$  een (vast gekozen) samenhangende topologische ruimte met basispunt  $x_0$ . In deze paragraaf bewijzen we de volgende stelling:

**Stelling III.** *Zij  $(X, x_0)$  een topologische ruimte die voldoet aan de eisen van Stelling III.1.9. Dan is de categorie  $\mathbf{Cov}_X$  van overdekkingsruimten van  $X$  equivalent met de categorie  $\pi_1(X, x_0)$ -**Set** van verzamelingen met een  $\pi_1(X, x_0)$ -werking via de functor die aan een overdekking  $(Y, p)$  de vezel  $p^{-1}(x_0)$  toevoegt.*

In de categorie  $\pi_1(X, x_0)$ -**Set** zijn de morfismen afbeeldingen die met de groepswerking commuteren, dus een morfisme  $\phi: S \rightarrow T$  voldoet aan  $\phi([\gamma] \cdot s) = [\gamma] \cdot \phi(s)$ . De morfismen in de categorie  $\mathbf{Cov}_X$  worden gegeven door continue afbeeldingen die met de overdekkingsafbeeldingen commuteren, dus een morfisme  $f: (Y, p) \rightarrow (Y', p')$  is een continue afbeelding  $f: Y \rightarrow Y'$  die voldoet aan  $p' \circ f = p$ . Over deze morfismen zullen we de volgende feiten nodig hebben:

**Lemma III.2.1.** *Zij  $f: (Y, p) \rightarrow (Y', p')$  een bijectief morfisme van overdekkingen. Dan is  $f$  een isomorfisme.*

*Bewijs.* Het is voldoende aan te tonen dat  $f$  open is. Zij  $U \subset Y$  open en samenhangend. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat  $U$  onder  $p$  homeomorf wordt afgebeeld op  $V \subset X$  en dat  $p'^{-1}(V)$  een disjuncte vereniging van open verzamelingen  $U_\alpha$  is, zodat iedere  $U_\alpha$  onder  $p'$  homeomorf op  $V$  wordt afgebeeld. Omdat  $U$  samenhangend is geldt dan  $f(U) \subset U_\alpha$  voor zekere  $\alpha$ . Maar  $(p' \circ f)(V) = p(V) = U$  en  $U_\alpha$  wordt homeomorf op  $U$  afgebeeld onder  $p'$ , dus er volgt  $f(V) = p'|_{U_\alpha}^{-1}(U) = U_\alpha$ . We concluderen dat  $f$  open is.  $\square$

**Lemma III.2.2.** *Definieer de afbeelding  $F: \mathbf{Cov}_X \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ -**Set** door  $F((Y, p)) = p^{-1}(x_0)$  voor  $(Y, p) \in \text{Ob } \mathbf{Cov}_X$ , waarbij de werking wordt gegeven door  $[\gamma] \cdot s = \tilde{\gamma}(1)$  met  $\tilde{\gamma}$  de lift van  $\gamma$  naar  $Y$  met  $\tilde{\gamma}(0) = s$ . Definieer verder  $F(f) = f|_{p^{-1}(x_0)}$  voor  $f \in \text{Hom}((Y, p), (Y', p'))$ . Dan is  $F$  een functor.*

*Bewijs.* We gaan eenvoudig na dat  $F(f)$  goedgedefinieerd is, immers als  $s \in p^{-1}(x_0)$  dan is  $p'(f(s)) = p(s) = x_0$ , dus  $f(s) \in (p')^{-1}(x_0)$ . We gaan na dat  $F(f)$  inderdaad een morfisme in  $\pi_1(X, x_0)$ -**Set** is. Neem  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$  en  $s \in p^{-1}(x_0)$ . Dan is  $f([\gamma] \cdot s) = f(\tilde{\gamma}(1))$  waarbij  $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow Y$  een lift van  $\gamma$  is met  $\tilde{\gamma}(0) = s$ . Dan is  $f \circ \tilde{\gamma}$  een lift van  $\gamma$  naar  $Y'$  met  $(f \circ \tilde{\gamma})(0) = f(s)$ , want  $p' \circ f \circ \tilde{\gamma} = p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ . Dus  $[\gamma] \cdot f(s) = (f \circ \tilde{\gamma})(1) = f([\gamma] \cdot s)$ .  $\square$

**Lemma III.2.3.** *Definieer de afbeelding  $G: \pi_1(X, x_0)$ -**Set**  $\rightarrow \mathbf{Cov}_X$  door  $G(S) = \tilde{X} \times S / \sim$  met  $\sim$  de equivalentierelatie gegeven door  $(\tilde{x}, s) \sim (g \cdot \tilde{x}, g^{-1} \cdot s)$  voor  $g \in \pi_1(X, x_0)$  en met de discrete topologie op  $S$ . De overdekkingsafbeelding  $p: G(S) \rightarrow X$  wordt gegeven door  $p = [(\tilde{x}, s)] \mapsto \tilde{p}(\tilde{x})$ , waarbij  $\tilde{p}$  de overdekkingsafbeelding van de universele overdekking  $\tilde{X}$  is. Definieer verder  $G(\phi) = [(\tilde{x}, s)] \mapsto [\tilde{x}, \phi(s)]$  voor  $\phi \in \text{Hom}(S, T)$ . Dan is  $G$  een functor.*

*Bewijs.* Ten eerste tonen we aan dat dit inderdaad een overdekkingsruimte geeft. De afbeelding  $p$  is goedgedefinieerd, want  $\tilde{p}([\gamma]) = \gamma(1)$  en  $\gamma(1) = (\eta * \gamma)(1)$  voor  $[\eta] \in \pi_1(X, x_0)$ . Ook is  $p$  duidelijk continu. Neem nu  $U \in \mathcal{U}$  (zie (III.1)), dan is  $\tilde{p}^{-1}(U)$  een disjuncte vereniging van verzamelingen  $U_{[\gamma]}$  uit (III.2). Merk op dat  $[\eta] \cdot U_{[\gamma]} = U_{[\eta * \gamma]}$  voor  $[\eta] \in \pi_1(X, x_0)$ , dus in het quotiënt identificeren we  $U_{[\gamma]} \times \{s\}$  met  $U_{[\eta * \gamma]} \times \{s'\}$ . Wat we overhouden is dus nog steeds een disjuncte vereniging van open verzamelingen die door  $p$  homeomorf op  $U$  worden afgebeeld.

We gaan na dat  $G(\phi)$  goedgedefinieerd is. Stel  $(\tilde{x}, s) \sim (\tilde{x}', s)$ , dan is er  $g \in \pi_1(X, x_0)$  met  $(g \cdot \tilde{x}, g^{-1} \cdot s) = (\tilde{x}', s')$ . Dan geldt  $(\tilde{x}', \phi(s')) = (g \cdot \tilde{x}, \phi(g^{-1} \cdot s)) = (g \cdot \tilde{x}, g^{-1} \cdot \phi(s))$ , dus  $(\tilde{x}', \phi(s')) \sim (\tilde{x}, \phi(s))$ . Verder is  $G(\phi)$  duidelijk continu, want  $S$  en  $T$  zijn uitgerust met de discrete topologie. Ook is het eenvoudig in te zien dat  $G(\phi)$  een morfisme van overdekkingsruimten geeft, want  $G(\phi)$  doet niets met de eerste coördinaat.  $\square$

**Stelling III.2.4.** *De functor  $F \circ G: \pi_1(X, x_0)\text{-Set} \rightarrow \pi_1(X, x_0)\text{-Set}$  met  $F$  en  $G$  zoals boven gedefinieerd is isomorf met  $\text{id}_{\pi_1(X, x_0)\text{-Set}}$ .*

*Bewijs.* Zij  $S \in \pi_1(X, x_0)\text{-Set}$ . We zullen bewijzen dat  $(F \circ G)(S) = p^{-1}(x_0)$  isomorf is met  $S$ , waarbij  $p: \tilde{X} \times S / \sim \rightarrow X$ . Merk op dat  $p^{-1}(x_0)$  bestaat uit equivalentieclasses  $[[[\gamma], s]]$  zodat  $\gamma(1) = x_0$ , dus  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ . Er volgt dat iedere klasse in  $p^{-1}(x_0)$  een unieke representant heeft van de vorm  $(e, s_e)$  met  $e$  het eenheidselement van  $\pi_1(X, x_0)$ . Definieer nu  $\zeta_S: p^{-1}(x_0) \rightarrow S$  door  $\zeta_S([[e, s_e]]) = s_e$ . Dit is duidelijk injectief en ook surjectief, want voor iedere  $s \in S$  is  $[[e, s]] \in p^{-1}(x_0)$ .

We gaan na dat  $\zeta_S$  een morfisme in  $\pi_1(X, x_0)\text{-Set}$  is. Er geldt  $[\eta] \cdot [[e, s_e]] = \tilde{\eta}(1)$  met  $\tilde{\eta}$  een lift van  $\eta$ . We beweren dat zo'n lift gegeven wordt door  $\tilde{\eta}(t) = [[[\eta_t], s_e]]$ , waarbij  $\eta_t = u \mapsto \eta(tu): [0, 1] \rightarrow X$ . Immers, er geldt  $p([[ [\eta_t], s_e ]]) = \eta_t(1) = \eta(t)$ . Er volgt  $[\eta] \cdot [[e, s_e]] = [[[\eta], s_e]] = [[e, [\eta] \cdot s_e]]$ , dus  $\zeta_S([\eta] \cdot [[e, s_e]]) = [\eta] \cdot s_e = [\eta] \cdot \zeta_S([[e, s_e]])$ . Dan is  $\zeta_S^{-1}$  ook een morfisme, want

$$\zeta_S^{-1}(g \cdot s) = \zeta_S^{-1}(g \cdot \zeta_S(\zeta_S^{-1}(s))) = \zeta_S^{-1}(\zeta_S(g \cdot \zeta_S^{-1}(s))) = g \cdot \zeta_S^{-1}(s). \quad \square$$

**Stelling III.2.5.** *De functor  $G \circ F: \mathbf{Cov}_X \rightarrow \mathbf{Cov}_X$  is isomorf met  $\text{id}_{\mathbf{Cov}_X}$ .*

*Bewijs.* Zij  $(Y, p) \in \mathbf{Cov}_X$ . We zullen bewijzen dat  $(Y, p)$  als overdekking isomorf is met quotiënt  $(G \circ F)((Y, p)) = \tilde{X} \times p^{-1}(x_0) / \sim$ . Definieer  $\xi_Y: \tilde{X} \times p^{-1}(x_0) \rightarrow Y$  door  $\xi_Y([\gamma], s) = \tilde{\gamma}(1)$  waarbij  $\tilde{\gamma}$  de lift van  $\gamma$  naar  $Y$  is met  $\tilde{\gamma}(0) = s$ . Dit is surjectief, want  $X$  is wegsamenhangend, dus er is een pad tussen  $p(x)$  en  $x_0$  in  $X$  en dit kunnen we liften naar een pad tussen  $y$  en een punt  $s \in p^{-1}(x_0)$ . Verder is  $\xi_Y$  continu vanwege eenzelfde argument als in het bewijs van Stelling III.1.9, dus een isomorfisme volgens Lemma III.2.1.

We gaan na dat  $\xi_Y$  factoriseert over  $\sim$ . Stel  $\xi_Y([\gamma], s) = \xi_Y([\gamma'], s')$  en zij  $\tilde{\gamma}$  en  $\tilde{\gamma}'$  lifts van  $\gamma, \gamma'$  met de juiste beginpunten. Er geldt  $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$ , dus  $[\gamma * \gamma'] \in \pi_1(X, x_0)$ . Ook is  $([\gamma * \gamma'] \cdot [\gamma'], [\gamma * \gamma']^{-1} \cdot s') = ([\gamma], s)$ , want een lift van  $[\gamma * \gamma']^{-1}$  is  $\tilde{\gamma}' * \tilde{\gamma}$  en dit is een pad van  $s'$  naar  $s$ . Andersom bekijken we  $\xi_Y([\eta * \gamma], [\eta]^{-1} \cdot s)$ . Zij  $\tilde{\eta}$  een lift van  $\eta$  met eindpunt  $s$  en  $\tilde{\gamma}$  een lift van  $\gamma$  met beginpunt  $s$ . Dan is  $[\eta]^{-1} \cdot s = \tilde{\eta}(0)$  en  $\xi_Y([\eta * \gamma], [\eta]^{-1} \cdot s) = (\tilde{\eta} * \tilde{\gamma})(1) = \tilde{\gamma}(1) = \xi_Y([\gamma], s)$ .

We hebben nu een goedgedefinieerd homeomorfisme  $\zeta_Y: \tilde{X} \times p^{-1}(x_0) / \sim \rightarrow Y$ . Er geldt  $p \circ \xi_Y = \tilde{p}$ , met  $\tilde{p}$  de overdekkingsafbeelding  $\tilde{X} \times p^{-1}(x_0) \rightarrow X$ . Immers,  $\xi_Y([\gamma], s) = \tilde{\gamma}(1)$  waarbij  $\tilde{\gamma}$  een lift is van  $\gamma$ , dus  $p \circ \xi_Y([\gamma]) = p(\tilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = \tilde{p}([\gamma])$ . Dan geldt ook  $p \circ \zeta_Y = p'$  met  $p'$  de overdekkingsafbeelding  $\tilde{X} \times p^{-1}(x_0) / \sim \rightarrow X$  en eveneens  $p = p' \circ \zeta_Y^{-1}$ .  $\square$

### III.3 Fundamentealgroep als automorfismengroep

We bekijken nu een alternatieve beschrijving van de fundamentealgroep voor het geval dat  $X$  een universele overdekking heeft:

**Propositie III.3.1.** *Stel dat  $(X, x_0)$  een topologische ruimte is die voldoet aan de eisen van Stelling III.1.9. Zij  $F: \mathbf{Cov}_X \rightarrow \mathbf{Set}$  gegeven door  $F((Y, p)) = p^{-1}(x_0)$ . Schrijf  $\text{Aut}(F)$  voor de groep van isomorfismen  $F \rightarrow F$ . Dan is  $\text{Aut}(F_{x_0}) \cong \pi_1(X, x_0)$ .*

*Bewijs.* We definiëren een afbeelding  $\phi: \text{Aut}(F) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ . Neem  $\zeta \in \text{Aut}(F)$  en bekijk  $\zeta_{\tilde{X}}: \tilde{p}^{-1}(x_0) \rightarrow \tilde{p}^{-1}(x_0)$ . Merk op dat  $\tilde{p}^{-1}(x_0) = \pi_1(\tilde{X}, x_0)$  en definieer  $\phi(\zeta) = \zeta_{\tilde{X}}(e)^{-1}$ . Voor  $[\eta] \in \pi_1(X, x_0)$  definieert de afbeelding  $[\gamma] \mapsto [\eta * \gamma]: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  een morfisme van overdekkingen. We hebben dus een commutatief diagram:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{[\gamma] \mapsto [\eta * \gamma]} & \pi_1(X, x_0) \\ \zeta_{\tilde{X}} \downarrow & & \downarrow \zeta_{\tilde{X}} \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{[\gamma] \mapsto [\eta * \gamma]} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Maar dit betekent dat  $g \cdot \zeta_{\tilde{X}}(h) = \zeta_{\tilde{X}}(g \cdot h)$ , dus  $\zeta_{\tilde{X}}(g) = \zeta_{\tilde{X}}(g \cdot e) = g \cdot \zeta_{\tilde{X}}(e) = g \cdot \phi(\zeta)^{-1}$ . Dus  $\zeta_{\tilde{X}}$  is niets anders dan rechtsvermenigvuldiging met  $\phi(\zeta)^{-1}$ . Hieruit volgt dat  $\phi$  een groepshomomorfisme is, immers

$$\phi(\zeta \circ \xi) = (\zeta_{\tilde{X}} \circ \xi_{\tilde{X}})(e)^{-1} = (\zeta_{\tilde{X}}(\phi(\xi)^{-1}))^{-1} = (\phi(\xi)^{-1} \cdot \phi(\zeta)^{-1})^{-1} = \phi(\zeta) \cdot \phi(\xi).$$

Zij nu  $(Y, p)$  een samenhangende overdekkingsruimte van  $X$ . Er is een surjectieve afbeelding  $f: \tilde{X} \rightarrow Y$  met  $p \circ f = \tilde{p}$ , dus we hebben weer een commutatief diagram

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f} & p^{-1}(x_0) \\ \zeta_{\tilde{X}} \downarrow & & \downarrow \zeta_Y \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f} & p^{-1}(x_0) \end{array}$$

Voor  $y = f(x) \in p^{-1}(x_0)$  geldt dus  $\zeta_Y(y) = \zeta_Y(f(x)) = f(\zeta_{\tilde{X}}(x)) = f(x \cdot \phi(\zeta)^{-1}) = \phi(\zeta) \cdot f(x)$ . We concluderen dat  $\zeta$  geheel wordt bepaald door  $\phi(\zeta)$ , oftewel  $\phi$  is een injectieve afbeelding. We laten ten slotte zien dat  $\phi$  surjectief is. Neem  $g \in \pi_1(X, x_0)$ , dan definiëren we voor een overdekkingsruimte  $(Y, p)$  de afbeelding  $\zeta_Y = y \mapsto g^{-1} \cdot y: p^{-1}(x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0)$ . Dit geeft een automorfisme van  $F$  en  $\phi(\zeta) = \zeta_{\tilde{X}}(e)^{-1} = g$ . Dit bewijst de surjectiviteit van  $\phi$ , dus  $\phi$  is een isomorfisme.  $\square$

In dit geval is dus sprake van een equivalentie tussen de categorie van  $\text{Aut}(F)$ -verzamelingen en de categorie van overdekkingen. We kunnen ons nu afvragen of er nog steeds een dergelijke

equivalentie is voor topologische ruimtes  $X$  zonder universele overdekking. We onderzoeken deze vraag voor eindige overdekkingen, dus overdekkingen  $(Y, p)$  zodat  $p^{-1}(x_0)$  eindig is. Zij  $\mathbf{Cov}_X^*$  de categorie van eindige overdekkingen van  $X$  en schrijf  $F_{x_0}: \mathbf{Cov}_X^* \rightarrow \mathbf{Set}$  voor de functor  $(Y, p) \mapsto p^{-1}(x_0)$ . We onderzoeken eerst wat de automorfismengroep van deze functor is. Hiervoor hebben we enige definities nodig:

**Definitie III.3.2.** Zij  $(I, \leq)$  een gerichte verzameling en zij  $(G_i)_{i \in I}$  een rij groepen. Stel dat voor iedere  $i, j \in I$  met  $i \leq j$  er een homomorfisme  $f_{ij}: G_j \rightarrow G_i$  gegeven is zodat  $f_{ii} = \text{id}_{G_i}$  en  $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$ . Dan definiëren we de *inverse limiet* van het *inverse systeem*  $(G_i, f_{ij})$  als

$$\varprojlim G_i = \left\{ (g_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i \mid \forall i, j (i \leq j \Rightarrow g_i = f_{ij}(g_j)) \right\}.$$

Merk op dat dit een ondergroep is van het product  $\prod_i G_i$ . In het bijzonder hebben we projectieafbeeldingen  $\varprojlim G_i \rightarrow G_j$  voor elke  $j \in I$ . Een belangrijk voorbeeld van een inverse systeem is het volgende:

**Lemma III.3.3.** Zij  $G$  een groep en schrijf  $I = \{N \subset G : N \text{ normaaldeeler, } G/N \text{ eindig}\}$  met  $N \leq M$  als  $N \supset M$ . Dan is  $I$  een gerichte verzameling.

*Bewijs.* We gaan na dat voor twee normaaldelers  $N, M$  er een derde normaaldeeler bestaat die in beide bevat is en zodat het quotiënt nog steeds eindig is. De logische keuze is  $N \cap M$ . Dit is een normaaldeeler, dus we moeten alleen nagaan dat  $G/(N \cap M)$  eindig is als  $G/N$  en  $G/M$  dat zijn. Dit volgt uit de isomorfieën van de algebra:

$$G/N \cong (G/(N \cap M))/(N/(N \cap M)) \cong (G/(N \cap M))/(NM/M).$$

Omdat  $G/N$  en  $NM/M$  beide eindig zijn moet ook  $G/(N \cap M)$  eindig zijn.  $\square$

**Definitie III.3.4.** Zij  $G$  een groep en zij  $I$  als in bovenstaand lemma. Dan definiëren we de *pro-eindige completering*  $\hat{G}$  van  $G$  als  $\varprojlim G/N$ , waarbij de afbeelding tussen  $G/N$  en  $G/M$  wordt gegeven door  $[g] \mapsto [g]$  als  $M \supset N$ .

Merk op dat  $\hat{G} \cong G$  als  $G$  eindig. Immers in dit geval is  $\{e\}$  een normaaldeeler met  $G/\{e\}$  eindig en  $N \supset \{e\}$  voor alle normaaldelers  $N \subset G$  en we hebben afbeeldingen  $f_N: G/\{e\} \rightarrow G/N$  voor iedere  $N$ . Dan is  $g \mapsto (f_N(g))_{N \subset G}$  een isomorfisme.

Als een minder triviaal voorbeeld bekijken we de pro-eindige completering van  $\mathbb{Z}$ . De normaaldelers van  $\mathbb{Z}$  zijn van de vorm  $n\mathbb{Z}$  en met uitzondering van  $n = 0$  geven ze allemaal een eindig quotiënt. We hebben  $m\mathbb{Z} \supset n\mathbb{Z}$  als  $m|n$ . Dan is

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{ (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \forall n, m (m | n \Rightarrow g_m = g_n \pmod{m}) \right\}.$$

We hebben duidelijk een injective afbeelding  $\mathbb{Z} \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}$  door  $n$  te sturen naar  $(n \pmod{m})_{m \in \mathbb{N}}$ , dus  $\mathbb{Z}$  ligt in  $\hat{\mathbb{Z}}$ , maar deze laatste groep is groter.

Hiermee zijn we in staat  $\text{Aut}(F_{x_0})$  te bepalen voor het geval dat er een universele overdekking is:

**Stelling III.3.5.** Zij  $(X, x_0)$  een topologische ruimte met universele overdekking en zij  $\mathbf{Cov}_X^*$  de categorie van alle eindige overdekkingen van  $X$ , dus overdekkingsruimten  $(Y, p)$  zodat  $p^{-1}(x_0)$  eindig is. Zij  $F_{x_0}: \mathbf{Cov}_X^* \rightarrow \mathbf{Set}$  de functor die  $(Y, p)$  naar  $p^{-1}(x_0)$  stuurt. Dan is  $\text{Aut}(F_{x_0}) \cong \pi_1(\widehat{X}, x_0)$ .

*Bewijs.* Neem  $(g_N) \in \pi_1(\widehat{X}, x_0)$  en zij  $(Y, p)$  een overdekkingsruimte van  $X$ . Definieer

$$N_p = \{g \in \pi_1(X, x_0) : \forall (s \in p^{-1}(x_0))(g \cdot s = s)\},$$

dan is  $N_p$  een normaaldeler van  $\pi_1(X, x_0)$ . Merk op dat  $\pi_1(X, x_0)/N_p$  eindig is, want als  $g, h \in \pi_1(X, x_0)$  met  $g \neq h$  dan is er een  $s \in p^{-1}(x_0)$  met  $g \cdot s = h \cdot s$ , dus er is een injectieve afbeelding van  $\pi_1(X, x_0)/N_p$  naar de symmetrische groep op  $p^{-1}(x_0)$ , een eindige verzameling. Ook werkt  $\pi_1(X, x_0)/N_p$  op  $p^{-1}(x_0)$ , dus we kunnen definiëren  $\zeta_p(s) = g_{N_p} \cdot s$ . We gaan na dat dit een morfisme van  $F$  definieert. Zij  $(\bar{Y}, \bar{p})$  een andere overdekkingsruimte en  $\phi: Y \rightarrow \bar{Y}$  een morfisme. We laten zien dat het volgende diagram commuteert:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(x_0) & \xrightarrow{\phi} & \bar{p}^{-1}(x_0) \\ \zeta_p \downarrow & & \downarrow \zeta_{\bar{p}} \\ p^{-1}(x_0) & \xrightarrow{\phi} & \bar{p}^{-1}(x_0) \end{array}$$

Vanwege Lemma III.3.3 bestaat er een normaaldeler  $M$  zodat  $\pi_1(X, x_0)/M$  eindig is en  $M$  bevat is in zowel  $N_p$  als  $N_{\bar{p}}$ . Ook geldt dan  $g_M \cdot s = g_{N_p} \cdot s = g_{N_{\bar{p}}} \cdot s$ , dus

$$\phi(\zeta_p(s)) = \phi(g_{N_p} \cdot s) = \phi(g_M \cdot s) = g_M \cdot \phi(s) = g_{N_{\bar{p}}} \cdot \phi(s) = \zeta_{\bar{p}}(\phi(s)).$$

We hebben nu een groepshomomorfisme  $\Lambda = (g_N) \mapsto \zeta: \pi_1(\widehat{X}, x_0) \rightarrow \text{Aut}(F)$  met  $\zeta$  zoals boven. Om te bewijzen dat dit een isomorfisme is, hebben we nodig dat voor iedere normaaldeler  $N \subset \pi_1(X, x_0)$  zodat  $\pi_1(X, x_0)/N$  eindig is er een overdekkingsruimte  $(Y_N, p_N)$  bestaat met  $N_{p_N} = N$ . Immers, definieer  $Y_N = \tilde{X}/\sim$  met  $x \sim x' \iff x = nx'$  voor zekere  $n \in N$ . Merk op dat de overdekkingsafbeelding van  $\tilde{X}$  goedgedefinieerd is op equivalentieklassen, dus dit is een overdekkingsruimte en we zien eenvoudig in dat  $N_{p_N} = N$ . Ook is  $p_N^{-1}(x_0) = \pi_1(X, x_0)/N$  en dit is eindig.

Zij nu  $\zeta$  een morfisme van  $F$  en definieer  $g_N = \zeta_{p_N}(e)$ , waarbij  $e$  het eenheidselement van  $\pi_1(X, x_0)/N$  is. We gaan na dat  $(g_N) \in \pi_1(\widehat{X}, x_0)$ . Stel dat  $N \subset M$ , dan willen we aantonen  $g_M = g_N \pmod{M}$ . Dit volgt uit een commutatief diagram:

$$\begin{array}{ccc} p_N^{-1}(x_0) & \xrightarrow{i} & p_M^{-1}(x_0) \\ \zeta_{p_N} \downarrow & & \downarrow \zeta_{p_M} \\ p_N^{-1}(x_0) & \xrightarrow{i} & p_M^{-1}(x_0) \end{array}$$

waarbij  $i: Y_N \rightarrow Y_M$  de afbeelding  $[\tilde{x}] \mapsto [\tilde{x}]$  is. Nu kunnen we analoog aan Propositie III.3.1 concluderen dat  $\Lambda$  een isomorfisme is.  $\square$

### III.4 Zonder universele overdekking

We zullen nu zien dat we zonder een universele overdekking nog steeds een equivalentie van categorieën hebben, hoewel we slechts eindige overdekkingen beschouwen en een extra eis opleggen aan de  $\text{Aut}(F_{x_0})$ -verzamelingen.

**Stelling IV.** *Zij  $X$  een samenhangende topologische ruimte en  $\mathbf{Cov}_X^*$  de categorie van eindige overdekkingen van  $X$ . Zij verder  $F_{x_0}: \mathbf{Cov}_X^* \rightarrow \mathbf{Set}$  de functor die aan een overdekking de vezel toevoegt en  $\text{Aut}(F_{x_0})\text{-Set}^*$  de categorie van eindige continue  $\text{Aut}(F_{x_0})$ -verzamelingen. Dan geeft  $F_{x_0}: \mathbf{Cov}_X^* \rightarrow \text{Aut}(F_{x_0})\text{-Set}^*$  een equivalentie van categorieën.*

Hierbij is het volgende belangrijke feit over morfismen van overdekkingen nodig:

**Lemma III.4.1.** *Zij  $(Z, p)$  een samenhangende overdekking,  $(Y, p')$  een overdekking en  $f, g: Z \rightarrow Y$  morfismen van overdekkingen. Stel dat er een  $z \in Z$  is met  $f(z) = g(z)$ . Dan is  $f = g$ .*

*Bewijs.* Dit volgt direct uit Lemma III.1.7:  $f$  en  $g$  zijn beide lifts van de afbeelding  $p' \circ f$ .  $\square$

**Definitie III.4.2.** Een werking van een groep  $G$  op een verzameling  $X$  heet *enkelvoudig transitief* als er voor ieder paar  $x, x' \in X$  er precies één  $g \in G$  is met  $g \cdot x = x'$ .

Vanwege bovenstaand lemma geldt er dat als de automorfismengroep van een overdekking transitief op de vezel werkt, deze werking ook enkelvoudig transitief is.

**Propositie III.4.3.** *(Galoiscorrespondie van overdekkingen) Zij  $(\tilde{X}, \tilde{p})$  een overdekking van  $X$  zodat  $\text{Aut}(\tilde{X})$  enkelvoudig transitief werkt op de vezel  $\tilde{p}^{-1}(x_0)$ . Dan is er een bijectie tussen de verzameling ondergroepen van  $\text{Aut}(\tilde{X})$  en de tussenliggende overdekkingen  $\tilde{X} \rightarrow Y \rightarrow X$ .*

*Bewijs.* Voor een ondergroep  $H \subset \text{Aut}(\tilde{X})$  definiëren we  $X_H = \tilde{X} / \sim_H$  met  $x \sim_H y$  als  $x = \phi(y)$  voor zekere  $\phi \in H$ . Dit is nog steeds een overdekking, want  $\tilde{p}$  factoriseert over  $\sim_H$ . Dit geeft ons een surjectieve afbeelding  $p: X_H \rightarrow X$ . Als nu voor een samenhangende open  $U \subset X$  geldt dat  $\tilde{p}^{-1}(U)$  een disjuncte vereniging van verzamelingen  $V_\beta$  is, dan is  $p^{-1}(U)$  nog steeds een disjuncte vereniging van dit soort verzamelingen, waarbij alleen  $V_\beta$  en  $V'_\beta$  op elkaar worden geplakt als er een automorfisme van  $\tilde{X}$  is dat  $V_\beta$  overvoert in  $V'_\beta$ . De afbeelding  $H \mapsto X_H$  is injectief, immers voor vaste  $\tilde{x} \in \tilde{p}^{-1}(x_0)$  legt de klasse van  $\tilde{x}$  de groep  $H$  volledig vast, aangezien  $\text{Aut}(\tilde{X})$  enkelvoudig transitief werkt op deze vezel. Ook is deze afbeelding surjectief, want voor een overdekking  $\tilde{X} \rightarrow Y \rightarrow X$  kunnen we  $H = \text{Aut}(\tilde{X}/Y)$  nemen. Zij  $p$  de overdekkingsafbeelding  $\tilde{X} \rightarrow Y$ , dan geldt dat  $p(x) = p(y)$  dan en slechts dan als  $x \sim_H y$ .  $\square$

**Propositie III.4.4.** *(Galoisafsluiting van een overdekking) Voor iedere overdekkingsruimte  $(Y, p)$  bestaat er een overdekking  $(\tilde{Y}, \tilde{p})$  van  $Y$  zodat  $\text{Aut}(\tilde{Y})$  transitief op de vezel  $\tilde{p}: \tilde{Y} \rightarrow X$  werkt.*

*Bewijs.* Zij  $n$  het aantal elementen van de vezel  $p^{-1}(x_0)$  en definieer

$$Y^n = \underbrace{Y \times_X \cdots \times_X Y}_{n \text{ keer}} = \{(y_1, \dots, y_n) \in Y^n : p(y_1) = \cdots = p(y_n)\}.$$

Schrijf  $\tilde{Y} = \{(y_1, \dots, y_n) \in Y^n : \text{alle } y_i \text{ zijn verschillend}\}$ . Dan is  $\tilde{Y}$  een overdekking van  $Y$  door projectie op de eerste coördinaat. Ook bevat  $\text{Aut}(\tilde{Y})$  de permutatiegroep op  $n$  elementen  $S_n$ , die zeker transitief werkt op de vezel. Wellicht is  $\tilde{Y}$  niet samenhangend, maar dan nemen we weer een samenhangscomponent.  $\square$

**Propositie III.4.5.** *Zij  $\mathcal{X}$  de verzameling van alle eindige samenhangende overdekkingen  $(Y, p)$  van  $X$  met de eigenschap dat  $\text{Aut}(Y)$  transitief werkt op de vezel. Dit wordt een inverse systeem door te stellen  $(Y, p) \leq (Y', p')$  als  $Y'$  een overdekking is van  $Y$ . Definieer een automorfisme van  $\mathcal{X}$  als een rij automorfismen van de  $(Y, p) \in \mathcal{X}$  die compatibel zijn met alle overdekkingsafbeeldingen. De verzameling  $\{\text{Aut}(Y) : Y \in \mathcal{X}\}$  is een inverse systeem van groepen en  $\varprojlim \text{Aut}(Y) = \text{Aut}(\mathcal{X})$ .*

*Bewijs.* We laten eerst zien dat voor ieder tweetal samenhangende overdekkingen  $(Y, p), (Z, p')$  er altijd een grotere is die beiden overdekt. Definieer  $Y \times_X Z = \{(y, z) \in Y \times Z : p(y) = p'(z)\}$ . Dit overdekt  $Y$  en  $Z$ , maar is niet noodzakelijk samenhangend. Echter, omdat  $X$  samenhangend is kunnen we een willekeurige samenhangscomponent nemen; dit is altijd weer een overdekking, en deze overdekt nog steeds  $Y$  en  $Z$  aangezien deze ook samenhangend zijn.

Zij  $Y \xrightarrow{p} Z$  twee overdekkingen en zij  $\phi \in \text{Aut}(Y)$ . Neem  $y \in Y$ , dan is er een unieke  $\psi \in \text{Aut}(Y)$  zodat  $\psi(p(y)) = p(\phi(y))$ . Maar dan zijn  $\psi \circ p$  en  $p \circ \phi$  twee morfismen van overdekkingen die overeenkomen in  $y$ , dus gelijk. De gevonden  $\psi$  hangt dus niet af van  $Y$ , en dit definieert een afbeelding  $\text{Aut}(Y) \xrightarrow{p^*} \text{Aut}(Z)$ . Ook is dit een groepshomomorfisme, want als  $p^*(\phi) = \psi$  en  $p^*(\phi') = \psi'$  dan is  $p^*(\phi \circ \phi')$  het unieke automorfisme  $\zeta$  van  $Z$  met de eigenschap dat  $\zeta(p(y)) = p((\phi \circ \phi')(y))$  en er geldt  $(\psi \circ \psi')(p(y)) = \psi(p(\phi'(y))) = p((\phi \circ \phi')(y))$ . De laatste bewering is duidelijk, want  $\text{Aut}(\mathcal{X})$  bestaat per definitie uit rijen automorfismen die de afbeeldingen respecteren en dit zijn precies de elementen van de inverse limiet.  $\square$

We schrijven  $\phi_{Y,Z}$  voor de hier gevonden afbeelding  $\text{Aut} Y \rightarrow \text{Aut} Z$ .

**Gevolg III.4.6.** *Er geldt  $\text{Aut}(\mathcal{X}) \cong \text{Aut}(F_{x_0})$ . In het bijzonder werkt  $\text{Aut}(F_{x_0})$  op iedere overdekking in  $\mathcal{X}$ .*

*Bewijs.* Voor een willekeurige overdekking  $(Y, p)$  bestaat er altijd een overdekking  $\tilde{Y} \rightarrow Y$  zodat  $\tilde{Y} \in \mathcal{X}$ . We hebben dus een homomorfisme  $\text{Aut}(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Aut}(F_{x_0})$  gegeven door  $\zeta \mapsto \phi_{\tilde{Y}, Y}(\zeta_{\tilde{Y}})$ . Deze afbeelding is injectief, want als twee automorfismen van een samenhangende overdekkingsruimte gelijk zijn op de vezel zijn ze overal gelijk. Ook is hij surjectief, want voor iedere  $Y \in \mathcal{X}$  werkt  $\text{Aut}(Y)$  op de vezel en ieder automorfisme van  $F_{x_0}$  bestaat uit een rij automorfismen van de vezels die in het bijzonder commuteren met alle overdekkingsafbeeldingen tussen overdekkingen van  $\mathcal{X}$ .  $\square$

**Propositie III.4.7.** *Zij  $Y \in \mathcal{X}$ . Schrijf  $\pi_Y$  voor de projectieafbeelding  $\prod_{Z \in \mathcal{X}} \text{Aut}(Z) \rightarrow \text{Aut}(Y)$  en  $\phi_Y = \pi_Y|_{\text{Aut}(\mathcal{X})}$ . Dan is  $\phi_Y$  surjectief.*

*Bewijs.* Schrijf  $\mathcal{Z}$  voor de verzameling van alle overdekkingen uit  $\mathcal{X}$  die  $Y$  overdekken. Neem  $\phi \in \text{Aut}(Y)$  en definieer voor  $Z \in \mathcal{Z}$  de verzameling  $A_Z = \{\psi \in \text{Aut}(Z) : \phi_{Z,Y}(\psi) = \phi\}$ . De  $A_Z$  vormen een inverse systeem van niet-lege verzamelingen, waarbij de afbeeldingen worden gegeven door de beperkingen van de afbeeldingen tussen de automorfismengroepen. Het is nu voldoende om aan te tonen dat  $\varprojlim A_Z$  niet leeg is. Immers, als dit zo is dan definieert dit een element van  $\text{Aut}(\mathcal{X})$  waarbij op de  $Y$ -de plek een  $a$  staat. We vatten hiertoe iedere verzameling  $\text{Aut}(Z)$  op als een compacte topologische ruimte met de discrete topologie. Voor  $Z, Z' \in \mathcal{Z}$  definiëren we

$$D_{Z,Z'} = \{z \in \prod_{A \in \mathcal{Z}} \text{Aut}(A) : \phi_{Z,Z'}(\pi_Z(z)) = \pi_{Z'}(z)\} = \bigcup_{y \in \text{Aut}(Z')} (\pi_{Z'}^{-1}(\{y\}) \cap (\phi_{Z,Z'} \circ \pi_Z)(\{y\}));$$

dit is gesloten omdat  $\text{Aut}(Z')$  eindig is. Verder is  $\varprojlim A_Z = \bigcap D_{Z,Z'}$ , waarbij de doorsnede loopt over alle paren  $Z, Z'$  zodat  $Z$  een overdekking is van  $Z'$ . Stel nu dat  $\varprojlim A_Z = \emptyset$ , dan zijn er vanwege de compactheid van  $\prod_{A \in \mathcal{Z}} \text{Aut}(A)$  eindig veel  $Z_i, Z'_i$  zodat  $\bigcap_{i=1}^n D_{Z_i, Z'_i}$  leeg is. Echter, voor deze eindig veel  $Z_i$  en  $Z'_i$  is er een grotere overdekking  $Z \in \mathcal{Z}$  zodat  $Z$  iedere  $Z_i$  en iedere  $Z'_i$  overdekt. Neem  $\psi \in A_Z$ , dan geeft projecteren op de  $Z_i$  en  $Z'_i$  een rij compatibele automorfismen  $\psi_1, \dots, \psi_n, \psi'_1, \dots, \psi'_n$ . Als we nu een willekeurig element van het cartesisch product nemen waarbij de elementen op de plekken  $Z_i$  en  $Z'_i$  gelijk zijn aan  $\psi_i$  respectievelijk  $\psi'_i$ , dan is dit element bevat in iedere  $D_{Z_i, Z'_i}$ , in tegenspraak met de aanname dat de doorsnede hiervan leeg is. We concluderen dat  $\varprojlim A_Z$  niet leeg is.  $\square$

Een inverse limiet van groepen wordt een topologische groep door deze uit te rusten met de topologie afkomstig van de producttopologie, waarbij we op iedere factor de discrete topologie nemen. Dit geeft aanleiding tot de volgende definitie:

**Definitie III.4.8.** Zij  $G$  een topologische groep. Een *continue  $G$ -verzameling*  $X$  is een verzameling  $X$  met een  $G$ -werking zodat de afbeelding  $G \rightarrow \text{Aut}(X)$  continu is, met de discrete topologie op  $\text{Aut}(X)$ .

**Lemma III.4.9.** Zij  $M$  een continue  $\text{Aut}(F_{x_0})$ -verzameling. Dan is er een normaaldeeler  $N \subset \text{Aut}(F_{x_0})$  en een overdekking  $Y \in \mathcal{X}$  zodat  $\text{Aut}(Y) \cong \text{Aut}(F_{x_0})/N$  werkt op  $M$ .

*Bewijs.* Omdat de afbeelding  $\text{Aut}(F_{x_0}) \rightarrow M$  continu is volgt dat de kern  $K$  van deze afbeelding een open verzameling is in  $\text{Aut}(F_{x_0})$ . Omdat de topologie op  $\text{Aut}(F_{x_0})$  afkomstig is van de producttopologie betekent dit dat  $U_1 \times \dots \times U_n \times \prod \text{Aut}(Y) \subset K$  voor zekere overdekkingen  $X_i$  en  $U_i \subset \text{Aut}(X_i)$ , en waarbij het product loopt over alle overdekkingen in  $\mathcal{X}$  die niet gelijk zijn aan een van de  $X_i$ . Nu bestaat er een overdekking  $Y \in \mathcal{X}$  die elke  $X_i$  overdekt. De projectie  $\phi_Y: \text{Aut}(F_{x_0}) \rightarrow \text{Aut}(Y)$  is surjectief; schrijf  $N$  voor de kern van deze afbeelding. Dan  $N \subset K$  en dus werkt  $\text{Aut}(Y) \cong \text{Aut}(F_{x_0})/N$  op  $M$ .  $\square$

**Propositie III.4.10.** Zij  $M$  een continue  $\text{Aut}(F_{x_0})$ -verzameling en zij  $Y$  als in bovenstaand lemma. Definieer  $Y \times M / \sim_Y$ , waarbij  $\sim_Y$  de equivalentierelatie is gegeven door  $(y, s) \sim (gy, g^{-1}s)$  voor  $g \in \text{Aut}(Y)$ . Dit definieert een overdekking van  $X$  door projectie op de eerste coördinaat. De toekenning  $F: M \mapsto Y \times M / \sim_Y$  is een functor van de categorie van continue eindige  $\text{Aut}(F_{x_0})$ -verzamelingen naar  $\mathbf{Cov}_X^*$  die niet afhankelijk is van de keuze van  $Y$ .

*Bewijs.* Stel  $Y, Z \in \mathcal{X}$  zodat  $\text{Aut}(Y) = \text{Aut}(\mathcal{X})/N_Y$  en  $\text{Aut}(Z) = \text{Aut}(\mathcal{X})/N_Z$  werken op  $M$ . Dan is er een grotere overdekking  $\tilde{X}$  zodat  $\tilde{X}$  zowel  $Y$  als  $Z$  overdekt en  $\text{Aut}(\tilde{X}) = \text{Aut}(\mathcal{X})/N_{\tilde{X}}$  werkt op  $M$ . Het is nu voldoende om te laten zien dat  $\tilde{X} \times M / \sim_{\tilde{X}}$  isomorf is met  $Y \times M / \sim_Y$ . We hebben een afbeelding  $\tilde{X} \times M \rightarrow Y \times M / \sim_Y$  gegeven door  $(x, s) \mapsto [(\tilde{p}(x), s)]$  waarbij  $\tilde{p}$  de overdekkingsafbeelding  $\tilde{X} \rightarrow Y$  is. We moeten alleen inzien dat  $(\tilde{p}(x), s) \sim_Y (\tilde{p}(y), s') \iff (x, s) \sim_{\tilde{X}} (y, s')$ , oftewel dat

$$(\exists g \in \text{Aut}(Y)) [(\tilde{p}(x), s) = (g \cdot \tilde{p}(x), g^{-1} \cdot s')] \iff (\exists h \in \text{Aut}(\tilde{X})) [(x, s) = (h \cdot x, h^{-1} \cdot s)].$$

Maar dit is duidelijk waar, want gegeven  $h$  kiezen we  $g = \phi_{\tilde{X}, Y}(h)$  en andersom kiezen we voor een  $g$  een willekeurige  $h \in \phi_{\tilde{X}, Y}^{-1}(g)$ .  $\square$

**Stelling III.4.11.** De vezel  $S = \{[y, s] : y \in p^{-1}(x_0), s \in M\}$  van deze overdekking is als  $\text{Aut}(F_{x_0})$ -verzameling isomorf met  $M$ .

*Bewijs.* Neem  $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ . Omdat  $\text{Aut}(Y)$  enkelvoudig transitief werkt op de vezel van  $Y$  heeft iedere klasse in  $S$  een unieke representant van de vorm  $[(y_0, s_0)]$ . Dan geeft  $[(y_0, s_0)] \mapsto s_0$  een isomorfisme analoog aan Stelling III.2.4.  $\square$

Andersom

**Stelling III.4.12.** *Zij  $(Y, p)$  een overdekking van  $X$ . Dan is  $F(p^{-1}(x_0))$  isomorf met  $Z$ .*

*Bewijs.* Omdat  $F$  onafhankelijk is van gekozen overdekking geldt  $F(p^{-1}(x_0)) = \hat{Y} \times p^{-1}(x_0) / \sim_{\hat{Y}}$ , waarbij  $\hat{Y}$  de Galoisafsluiting van  $Y$  is. Schrijf  $p^{-1}(x_0) = \{y_1, \dots, y_n\}$  en schrijf  $\pi_i: \hat{Y} \rightarrow Y$  voor de projectie op de  $i$ -de coördinaat. Definieer  $f: \hat{Y} \times p^{-1}(x_0) \rightarrow Y$  door  $f(y, x_i) = \pi_i(y)$ . Deze afbeelding is continu, want hij is voor elke  $i$  continu op de verzameling  $\{(y, x_i) : y \in \hat{Y}\}$ . Nu geldt er  $f(y, x_i) = f(y', x_j) \iff \pi_i(y) = \pi_j(y') \iff (\sigma \cdot y, \sigma^{-1} \cdot x_i) = (y', x_j)$  voor zekere  $\sigma \in S_n \cong \text{Aut}(\hat{Y})$ . Dus  $f$  factoriseert over  $\sim_{\hat{Y}}$  en de zo verkregen afbeelding  $F(p^{-1}(x_0)) \rightarrow Y$  is een bijectie. Vanwege Lemma III.2.1 is dit dan een isomorfisme.  $\square$

Hiermee is de equivalentie bewezen voor iedere samenhangende topologische ruimte.

# Appendix A

## Functionaalanalyse

In deze appendix formuleren we enkele resultaten uit de functionaalanalyse die nodig zijn voor het bewijs van de equivalentie van categorieën in hoofdstuk 2. Ook geven we een korte inleiding in de spectraaltheorie die vereist is.

### A.1 Enkele stellingen

De volgende stellingen spelen een belangrijke rol in de functionaalanalyse. De bewijzen zullen we hier niet geven, maar zijn te vinden in [3] of [4].

**Stelling A.1.1** (Stone-Weierstrass). *Zij  $X$  een compacte Hausdorffruimte en  $C(X)$  de Banach-algebra van continue  $\mathbb{C}$ -waardige functies op  $X$ . Stel dat  $V \subset C(X)$  een deelalgebra is die de constante functies bevat, gesloten is onder complexe conjugatie en de eigenschap heeft dat voor  $x, y \in X$  met  $x \neq y$  er  $f \in V$  is met  $f(x) \neq f(y)$ . Dan ligt  $V$  dicht in  $C(X)$ .*

**Stelling A.1.2** (Banach-Alaoglu). *Zij  $X$  een topologische vectorruimte en*

$$B = \{\phi \in X^* : \|\phi\| \leq 1\}$$

*de gesloten eenheidsbal in de duale ruimte van  $X$  zijn. Dan is  $B$  compact in de topologie op  $X^*$  voortgebracht door de afbeeldingen  $f_x = \phi \mapsto \phi(x)$ ,  $x \in X$ .*

**Stelling A.1.3** (Hahn-Banach). *Zij  $X$  een Banachruimte en  $Y \subset X$  een lineaire deelruimte. Als  $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$  een begrensde lineaire afbeelding is dan bestaat er een  $\bar{f}: X \rightarrow \mathbb{C}$  met  $\bar{f}|_Y = f$  en  $\|\bar{f}\| = \|f\|$ .*

**Stelling A.1.4** (Banach-Steinhaus). *Zij  $\mathcal{L}$  een collectie van begrensde lineaire operatoren  $X \rightarrow Y$ . Als voor iedere  $x \in X$  geldt  $\sup_{L \in \mathcal{L}} \|L(x)\| < \infty$  dan is  $\sup_{L \in \mathcal{L}} \|L\| < \infty$ .*

*Bewijs.* Definieer  $E_n = \{x \in X : \sup_{L \in \mathcal{L}} \|L(x)\| \leq n\}$ . Dan is  $X = \bigcup_n E_n$ . Uit de Stelling van Baire volgt dat er minstens een  $n$  is zodat  $E_n$  niet leeg inwendig heeft, dus zodat  $B(y, \delta) \subset E_n$  voor zekere  $y \in E_n$  en  $\delta > 0$ . Dan geldt voor  $z \in X$  met  $\|z\| < \delta$  dat  $y + z \in E_n$ , dus  $\|Lz\| \leq n$  voor alle  $L \in \mathcal{L}$ . Maar dan geldt voor  $y$  met  $\|y\| = 1$  dat  $z = \delta y$  voldoet aan  $\|z\| < \delta$ , dus voor alle  $L \in \mathcal{L}$  geldt

$$\|Ly\| = \frac{1}{\delta} \|Lz\| \leq \frac{n}{\delta} < \infty. \quad \square$$

## A.2 Spectraaltheorie

De spectraaltheorie generaliseert het concept van eigenwaarden in de algebra van matrices naar een willekeurige Banach-algebra. We geven hier een korte introductie en enkele hoofdresultaten, zie [1] voor een uitgebreidere beschouwing.

**Definitie A.2.1.** Zij  $A$  een commutatieve Banach-algebra en  $x \in A$ . We definiëren

$$GL(A) := \{a \in A : a \text{ is inverteerbaar}\}.$$

Het *spectrum*  $\sigma(a)$  van  $a$  bestaat uit alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  zodat  $a - \lambda \notin GL(A)$ . De *spectraalstraal*  $\rho(a)$  van  $a$  is gedefinieerd als  $\rho(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$ .

**Lemma A.2.2.** Als  $a \in A$  met  $\|a\| < 1$  dan is  $1 - a$  inverteerbaar met inverse  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ .

*Bewijs.* De reeks  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$  is convergent, want  $\|a^n\| \leq \|a\|^n$ , dus  $\sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n$  convergeert in  $\mathbb{R}$ . Dan is

$$(1 - a) \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n - a \sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1. \quad \square$$

Merk op dat hieruit volgt dat  $\|(1 - a)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n = \frac{1}{1 - \|a\|}$  voor  $\|a\| < 1$ .

**Gevolg A.2.3.** Ieder maximaal ideaal in een commutatieve Banach-algebra is gesloten.

*Bewijs.* Zij  $I \subset A$  een maximaal ideaal. Dan is ook  $\bar{I}$  een ideaal vanwege de continuïteit van de vermenigvuldiging in  $A$ . Stel nu dat  $1 \in \bar{I}$ , dan kunnen we 1 goed benaderen met elementen van  $I$ , dus in het bijzonder is er een  $x \in I$  met  $\|1 - x\| < 1$ . Maar dan is  $1 - (x - 1) = x$  inverteerbaar, dus  $1 \in I$  en  $I = A$ , een tegenspraak met het feit dat  $I$  een echt ideaal is. Dus is  $\bar{I}$  een echt ideaal van  $A$  dat  $I$  bevat en vanwege maximaliteit van  $I$  volgt  $I = \bar{I}$ .  $\square$

**Gevolg A.2.4.** De verzameling  $GL(A)$  is open in  $A$  en de afbeelding  $a \mapsto a^{-1}: A \rightarrow A$  is continu. Het spectrum  $\sigma(a)$  is gesloten voor iedere  $a \in A$  en er geldt  $|\lambda| \leq \|a\|$  voor iedere  $\lambda \in \sigma(a)$ .

*Bewijs.* Neem  $a \in GL(A)$  en  $h \in A$  met  $\|h\| < \|a^{-1}\|$ . Dan is  $a + h = a(1 + a^{-1}h)$  waarbij  $\|a^{-1}h\| < 1$ , dus  $a + h$  is inverteerbaar. Hieruit volgt dat  $GL(A)$  open is. Ook is

$$\begin{aligned} \|(a + h)^{-1} - a^{-1}\| &= \|(a(1 + a^{-1}h))^{-1} - a^{-1}\| \leq \|(1 + a^{-1}h)^{-1} - 1\| \|a^{-1}\| \\ &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}h)^n - 1 \right\| \|a^{-1}\| \leq \|a^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} (\|a^{-1}\| \|h\|)^n = \frac{\|a^{-1}\|^2 \|h\|}{1 - \|a^{-1}\| \|h\|}, \end{aligned}$$

en dit is klein als  $\|h\|$  klein is. Verder is  $\mathbb{C} \setminus \sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \in GL(A)\}$  en dit is open want de afbeelding  $\lambda \rightarrow a - \lambda$  is continu. Neem nu  $\lambda \in \sigma(a)$  en stel dat  $|\lambda| > \|a\|$ . Dan is  $a - \lambda = -\lambda(1 - \lambda^{-1}a)$  waarbij  $\|\lambda^{-1}a\| < 1$ , dus  $a - \lambda$  is inverteerbaar in tegenspraak met de aanname dat  $\lambda \in \sigma(a)$ .  $\square$

**Stelling A.2.5 (Gelfand).** Voor iedere  $a \in A$  is  $\sigma(a)$  niet leeg.

*Bewijs.* Stel dat  $\sigma(a) = \emptyset$ . Neem een begrensde lineaire afbeelding  $\phi: A \rightarrow \mathbb{C}$  en definieer  $f(\lambda) = \rho((a - \lambda)^{-1})$ . Dit is een functie  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . We gaan na dat  $f$  complex-differentieerbaar is. Vanwege de continuïteit van  $\phi$  is het voldoende te kijken naar

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} ((a - \lambda)^{-1} - (a - \lambda_0)^{-1}) &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} (a - \lambda)^{-1} ((a - \lambda_0) - (a - \lambda)) (a - \lambda_0)^{-1} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (a - \lambda)^{-1} (a - \lambda_0)^{-1} = (a - \lambda)^{-2}, \end{aligned} \tag{A.1}$$

waarbij we continuïteit van de inverse gebruiken. Er volgt dat  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(\lambda)$  bestaat voor iedere  $\lambda_0$ , dus  $f$  is een gehele functie. Ook is  $f$  begrensd, immers voor  $\lambda$  groot geldt

$$\|(a - \lambda)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \|(1 - \lambda^{-1}a)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - |\lambda|^{-1}\|a^{-1}\|} = \frac{1}{\lambda - \|a^{-1}\|}$$

en dit gaat naar 0 als  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Omdat  $\phi$  begrensd is, volgt dat  $f$  een begrensde gehele functie is. Volgens de Stelling van Liouville is  $f$  constant. Omdat  $f(\lambda) \rightarrow 0$  voor  $|\lambda| \rightarrow \infty$  moet deze constante ook gelijk aan 0 zijn, dus  $f \equiv 0$ . Dus voor iedere begrensde functionaal  $\phi$  is  $\phi((a - \lambda)^{-1}) = 0$ . Maar hieruit volgt dat  $(a - \lambda)^{-1} = 0$ , immers volgens de Stelling van Hahn-Banach bestaat er voor iedere  $a \neq 0$  in  $A$  een  $\phi: A \rightarrow \mathbb{C}$  met  $\phi(a) = 1$ . Dit is een tegenspraak, want  $(a - \lambda)^{-1}$  is inverteerbaar en kan dus niet 0 zijn.  $\square$

**Stelling A.2.6** (Gelfand-Mazur). *Voor iedere  $a \in A$  geldt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} = \rho(a).$$

*Bewijs.* Neem  $\lambda \in \sigma(a)$ . Dan geldt  $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ , immers  $\lambda^n - z^n$  is een polynoom met nulpunt  $\lambda$ , dus er bestaat een polynoom  $g$  met  $\lambda^n - z^n = (\lambda - z)g(z)$ . Maar dit kan niet inverteerbaar zijn, want anders is ook  $(\lambda - z)$  inverteerbaar. Dus  $|\lambda|^n \leq \|a^n\|$ , oftewel  $|\lambda| \leq \|a^n\|^{1/n}$  voor alle  $n$ . Er volgt  $\liminf \|a^n\|^{1/n} \geq |\lambda|$  en dus  $\liminf \|a^n\|^{1/n} \geq \rho(a)$ .

We bewijzen nu  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} \leq \rho(a)$ . Neem een lineaire afbeelding  $\phi: A \rightarrow \mathbb{C}$  en definieer  $f(\lambda) = \phi((1 - \lambda a)^{-1})$  voor  $\lambda \in B(0, 1/\rho(a)) \subset \mathbb{C}$ . Voor  $|\lambda| < 1/\|a\|$  geldt  $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(a^n)\lambda^n$ , maar vanwege (A.1) is  $f(\lambda) = \lambda^{-1}\phi((\lambda^{-1} - a)^{-1})$  analytisch op heel  $B(0, 1/\rho(a))$  (want  $\lambda^{-1} > \rho(a)$ ), dus ook gelijk aan  $\sum_{n=0}^{\infty} \phi(a^n)\lambda^n$ . In het bijzonder convergeert deze reeks als  $|\lambda| < 1/\rho(a)$ . Hieruit volgt dat de rij  $(\phi(a^n)\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$  begrensd is voor iedere  $\phi$ . Definieer nu lineaire afbeeldingen  $\eta_n = \phi \mapsto \phi(a^n)\lambda^n$  op de ruimte van lineaire functionalen  $A \rightarrow \mathbb{C}$ . Dan is  $\{\eta_n(\phi) : n \in \mathbb{N}\}$  begrensd voor iedere  $\phi$ , dus vanwege Banach-Steinhaus bestaat er een  $M_\lambda$  zodat  $\|a^n\|\|\lambda\|^n \leq \|\eta_n\|M_\lambda$  voor alle  $n$ , dus

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{M_\lambda^{1/n}}{|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda|}.$$

Dit geldt voor alle  $\lambda$  met  $|\lambda| < 1/\rho(a)$ , dus in de limiet vinden we  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} \leq \rho(a)$  zoals gewenst.  $\square$

**Stelling A.2.7.** *Voor iedere  $x \in A$  geldt  $\sigma(x) = \{\phi(x) : \phi \in \text{Spec}(A)\}$ .*

*Bewijs.* We laten zien dat  $x$  inverteerbaar is dan en slechts dan als voor iedere  $\phi \in \text{Spec}(A)$  geldt  $\phi(x) \neq 0$ . Hieruit volgt

$$\lambda \in \sigma(x) \iff \exists \phi(\phi(x - \lambda) = 0) \iff \exists \phi(\phi(x) = \lambda).$$

Als  $x$  inverteerbaar is dan is er een  $y$  zodat  $xy = 1$ , dus  $\phi(x)\phi(y) = \phi(xy) = 1$  voor iedere  $\phi$ . Stel nu dat  $x$  niet inverteerbaar is. Bekijk de verzameling  $\{xa : a \in A\}$ . Dit is een ideaal in  $A$ , dus bevat in een maximaal ideaal  $M$ . Volgens Propositie II.1.7 bestaat er een  $\phi \in \text{Spec}(A)$  met  $\ker \phi = M$ . Omdat  $x \in M$  geldt  $\phi(x) = 0$ .  $\square$

# Bibliografie

- [1] W. Arveson. *A Short Course on Spectral Theory*, Springer-Verlag, 2002.
- [2] S.I. Gelfand en Y.I. Manin. *Methods of Homological Algebra*, Springer-Verlag, 1996.
- [3] W. Rudin. *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1991.
- [4] J. Wiegerinck, T.H. Koornwinder. *Syllabus Functionaalanalyse*, Universiteit van Amsterdam, 2007.
- [5] A. Hatcher. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [6] J.S. Wilson. *Profinite Groups*, Oxford University Press, 1998.

# Populaire samenvatting

Verzamelingen zijn overal aanwezig binnen de wiskunde. Ze vormen de onderliggende taal waarmee we wiskundige objecten kunnen vormgeven en bestuderen. Een verzameling is niets anders dan twee accolades en een aantal elementen; zo is  $\{\alpha, 4, x\}$  een verzameling met drie elementen. De gehele getallen  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  vormen ook een verzameling, waarvan het aantal elementen oneindig is. Als we nu een verzameling hebben, zoals  $\mathbb{Z}$ , kunnen we slechts beweringen formuleren van de vorm “4 is een element van  $\mathbb{Z}$ ” of “ $\pi$  is geen element van  $\mathbb{Z}$ ” (in symbolen:  $4 \in \mathbb{Z}$ ,  $\pi \notin \mathbb{Z}$ ). De structuur “verzameling” bevat simpelweg niet meer informatie dan deze. Echter, de gehele getallen hebben beduidend meer structuur. Zo willen we graag beweringen als “ $2 + 3 = 5$ ” en “ $4 > -2$ ” kunnen formuleren en toetsen. Om dit te kunnen doen moeten we deze extra structuur toevoegen aan de gehele getallen. We krijgen dan een *geordende verzameling*  $(\mathbb{Z}, \leq)$  als we ordening toevoegen en een *monoïde*  $(\mathbb{Z}, +)$  als we optelling toevoegen.

Een monoïde is een verzameling met daarop een binaire operatie, dat wil zeggen een operatie die voor iedere tweetal elementen uit de verzameling weer een element geeft. Optelling is hier een voorbeeld van, net als vermenigvuldiging. Een ander voorbeeld is de verzameling  $\mathbb{W}$  van woorden, hier rijtjes letters in het Latijnse alfabet. Een bewerking  $*$  hierop wordt gegeven door woorden aan elkaar te plakken:  $\text{valk} * \text{uil} = \text{valkuil}$ . Naast deze monoïden bestuderen we ook zogenaamde *morfismen* van monoïden, afbeeldingen die structuur behouden. Een voorbeeld van een morfisme van  $\mathbb{W}$  naar  $\mathbb{Z}$  is de afbeelding  $\ell$  die aan ieder woord zijn lengte toekent. Zo is  $\ell(\text{valk}) = 4$  en  $\ell(\text{uil}) = 3$ . Deze afbeelding behoudt de structuur van de monoïden, de binaire operatie, in de zin dat hij  $*$  overvoert in  $+$ :

$$\ell(\text{valk} * \text{uil}) = \ell(\text{valkuil}) = 7 = 4 + 3 = \ell(\text{valk}) + \ell(\text{uil}).$$

Merk op dat deze structuurbehoudende eigenschap een vrij grote beperking is op een afbeelding. De meeste afbeeldingen die we bedenken, zullen niet de structuur behouden. Zo hebben we een afbeelding  $v: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{W}$  die een getal uitdrukt in de Nederlandse taal, bijvoorbeeld  $v(3) = \text{drie}$  en  $v(-21) = \text{mineenentwintig}$ , maar dit is geen morfisme:

$$v(2 + 4) = v(6) = \text{zes} \neq \text{tweevier} = v(2) * v(4).$$

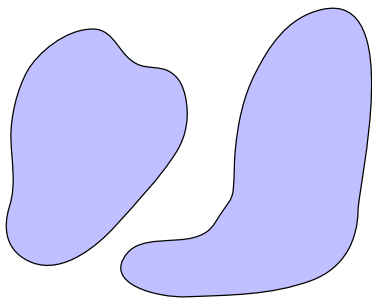
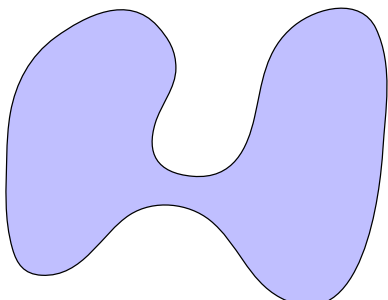
Door alle monoïden en alle structuurbehoudende afbeeldingen bij elkaar te verzamelen krijgen we de *categorie* van monoïden. Deze bestaat dus uit twee dingen: een collectie van alle monoïden en voor ieder tweetal monoïden een verzameling van alle morfismen tussen deze twee monoïden. Op dezelfde manier kunnen we ook een categorie van geordende verzamelingen definiëren, waarbij de morfismen afbeeldingen zijn die de ordening behouden.

Nu we over deze categorieën beschikken, kunnen we twee dingen doen: verbanden bestuderen tussen de objecten van een categorie en verbanden bestuderen tussen verschillende

categorieën. Deze twee concepten hangen nauw met elkaar samen. Binnen een categorie kunnen we ons ten eerste afvragen wanneer twee objecten “gelijk” zijn. We bekijken hierbij weer de monoïden. De meest voor de hand liggende definitie is dat twee monoïden gelijk zijn als zowel de verzameling als de bewerking exact overeenkomen (merk op dat de bewerking hierbij van belang is, zo zijn  $(\mathbb{Z}, +)$  en  $(\mathbb{Z}, \times)$  toch echt verschillende monoïden), maar in de praktijk is een verfijnder begrip van gelijkheid wenselijk. Immers, beschouw de monoïde  $\mathbb{W}'$  die bestaat uit rijtjes symbolen uit  $\{a_1, a_2, \dots, a_{25}, a_{26}\}$  met als bewerking  $*$  plakken:  $a_3a_1 * a_{22}a_8a_1 = a_3a_1a_{22}a_8a_1$ . Dit is niet exact hetzelfde als  $\mathbb{W}$ , want de symbolen zijn anders. Echter, we kunnen de elementen van  $\mathbb{W}'$  identificeren met de woorden van  $\mathbb{W}$  via een morfisme  $\mathbb{W}' \rightarrow \mathbb{W}$  dat  $a_i$  vervangt door de  $i$ -de letter van het alfabet. Dit morfisme heeft de eigenschap dat voor ieder element van  $\mathbb{W}$  er precies één element is in  $\mathbb{W}'$  dat erop af wordt gestuurd. Een morfisme met deze eigenschap noemen we een *isomorfisme* en twee monoïden waartussen er een isomorfisme bestaat heten *isomorf*. Hiermee hebben we een betere manier gevonden om monoïden te vergelijken dan gelijkheid. Twee monoïden die isomorf zijn, hebben dezelfde structuur en dezelfde eigenschappen, ze zijn dus “vrijwel identiek”.

Dit geeft ons een gereedschap om objecten binnen een categorie te classificeren en hiermee kunnen we ook verschillende categorieën vergelijken. Ook hierbij kijken we niet naar absolute gelijkheid, maar naar een overeenkomst in de structuur van de categorieën: we willen zeggen wanneer twee categorieën “vrijwel identiek” zijn. We zouden hierbij kunnen kijken naar een isomorfisme van categorieën, dus een afbeelding die aan ieder object van de ene categorie precies één object van de andere categorie toekent. Maar, mede omdat categorieën enorm groot zijn (alleen al voor  $\mathbb{W}$  zijn er oneindig vele representaties mogelijk, een voor ieder rijtje van 26 symbolen dat we kunnen bedenken), blijkt dit niet een praktisch begrip te zijn. Daarom voeren we een zwakker begrip in, een *equivalentie van categorieën*, waarbij we objecten die isomorf zijn identificeren. Een equivalentie van categorieën houdt dus in dat voor ieder object in de ene categorie er op isomorfie na precies één corresponderend object in de andere categorie is. Er kunnen dus meerdere objecten zijn die overeenkomen met 1 object, maar dan moeten deze wel allen isomorf zijn.

In deze scriptie worden de bovenstaande begrippen formeel gedefinieerd en worden enkele van deze equivalenties van categorieën geformuleerd en bewezen. Deze equivalenties vertalen begrippen van één wiskundige structuur naar een geheel andere; zo vertelt Stelling II ons dat we begrippen die iets zeggen over de structuur van een ruimte  $X$  kunnen vertalen naar zuiver algebraïsche concepten in een bijbehorende algebraïsche structuur  $C(X)$ , een zogenaamde Banach-algebra. De figuur op de volgende pagina geeft hiervan een voorbeeld: hier wordt de eigenschap “samenhang”, wat min of meer betekent dat een ruimte “uit één stuk bestaat”, vertaald naar het aantal oplossingen van de algebraïsche vergelijking  $x^2 = x$ .

<p>Topologische ruimte <math>X</math></p>	<p>Onsamenhangend</p> 	<p>Samenhangend</p> 
<p>Banach-algebra <math>C(X)</math></p>	<p>Precies 4 elementen <math>x</math> die voldoen aan <math>x^2 = x</math></p>	<p>Precies 2 elementen <math>x</math> die voldoen aan <math>x^2 = x</math></p>

Figuur 1: Vertaling van een topologische eigenschap naar een algebraïsche.