

Vincent van der Noort

Is democratie wiskundig onmogelijk?

Een verschillende kiessysteem levert soms een verschillende uitslag. Dit wordt in de wiskunde een verkiezingsparadox genoemd. In dit artikel zullen een aantal verkiezingsparadoxen worden besproken.

Jullie herinneren je vast de laatste presidentsverkiezingen in Amerika wel. Naast de eindeloze hertellingen in Florida, trad er een nog veel merkwaardiger verschijnsel op: hoewel Gore landelijk meer stemmen had dan Bush, won Bush de verkiezingen, dankzij het idiote districtenstelsel. Dit is een goed voorbeeld van wat in de wiskunde een verkiezingsparadox genoemd wordt: door de manier waarop de verkiezingen georganiseerd zijn, kan de uitkomst van de verkiezingen anders zijn dan je logischerwijze zou verwachten. In deze tekst zal ik voorbeelden geven hoe verschillende kiessystemen tot verschillende uitslagen kunnen leiden, en welke verkiezingsparadoxen daarbij kunnen optreden. In 1951 bewees ene Kenneth Arrow dat geen enkel kiessysteem helemaal eerlijk is, en dat volmaakte democratie dus wiskundig onmogelijk is. Dit schokkende feit was goed voor een Nobelprijs economie. Ik zal hier niet vertellen hoe het bewijs eruit ziet, maar wel wat hij bedoelt met 'volmaakte democratie'.

Verschillend kiessysteem, verschillende uitslag

Drie vrienden (die zoals de meeste vrienden in wiskunderaadsels Anna, Bob en Charles heten) hebben na jaren zoeken eindelijk een mooi huis in Amsterdam gevonden waar ze kunnen gaan wonen. Ze zijn nu bezig met de inrichting van hun gemeenschappelijke woonkamer en zoeken op de meubelboulevard in Beverwijk naar een stoel. Anna is helemaal weg van een rotanstoel, Bob gaat voor een lederen fauteuil en Charles is zeer gecharmeerd van een multifunctionele klapstoel. Ze zijn het erover eens dat het één van deze stoelen moet worden, want alle andere stoelen zijn of te lelijk of te duur. Bob wil echter absoluut niet de rotanstoel, omdat hij als driejarige zijn vinger aan zo'n soort stoel heeft opengehaald. Anna heeft ernstige bezwaren tegen de multifunctionele klapstoel, omdat die helemaal geen sfeer in huis geeft. Charles is fanatiek tegen de lederen fauteuil omdat hij dan zijn kat de hele dag krampachtig in zijn eigen kleine kamertje opgesloten zou moeten houden.

Omdat ze het niet eens worden besluiten ze te stemmen. De voorkeuren zijn dus als volgt verdeeld:

	1e keus	2e keus	3e keus
Anna	rotan	leer	klapstoel
Bob	leer	klapstoel	rotan
Charles	klapstoel	rotan	leer

Gewoon per stoel stemmen heeft geen zin: voor iedere stoel is precies één stem. Daarom stelt Anna voor eerst tussen de lederen fauteuil en de multifunctionele klapstoel te stemmen, en dan tussen de winnaar en de rotanstoel. Bij iedere stemronde moet de uitslag 2 tegen 1 of 3 tegen 0 zijn, dus is er in elk geval een uitslag.

Bob is hier fanatiek op tegen (waarom?). Hij doet een ander voorstel: eerst stemmen tussen de multifunctionele klapstoel en de rotanstoel en dan tussen de winnaar en de lederen fauteuil. Waarom is dit voordeliger voor Bob?

Als je Charles was, wat voor stem-methode zou je dan voorstellen?

Uiteindelijk krijgt Anna haar zin. Er wordt eerst gestemd tussen de fauteuil en de klapstoel en dan tussen de winnaar en de rotanstoel. Bob voelt de bui al hangen, en omdat zijn rotantrauma zo sterk is dat hij liever verhuist dan op een rotanstoel te moeten zitten, besluit hij in de eerste stemronde niet op zijn eerste keus (de lederen fauteuil) maar op zijn tweede keus (de multifunctionele klapstoel) te stemmen. Wie wint nu de eerste ronde? En de hele verkiezingen? Is iedereen hiermee gelukkig?

Op zoek naar het perfecte kiessysteem

Nu we weten dat verschillende kiessystemen tot verschillende uitslagen leiden, kunnen we ons afvragen: wat is het beste kiessysteem? Bij welk kiessysteem komt de uitslag het best overeen met de meningen van de kiezers? Deze vraag is nogal moeilijk te beantwoorden omdat 'de mening van de kiezers' een onduidelijk begrip is. We kunnen bijvoorbeeld wel zeggen dat het Nederlandse kiessysteem geen rekening houdt met wat de kiezers vinden van de partijen waar ze niet op stemmen. Als de meerderheid van de kiezers liever partij A heeft dan partij B, dan zouden we willen dat A ook meer zetels haalt dan B. Ook als een groot deel van de kiezers op partij C stemt. In het Nederlandse systeem is dit niet altijd het geval. Laten we kijken naar het volgende vereenvoudigde voorbeeld.

Een pasopgerichte politieke partij, moet een kleur kiezen. rood, blauw en groen zijn al geclaimd, paars is ook geen optie, dus gaat de keus tussen geel, oranje en turquoise. Op het congres dat deze belangrijke beslissing moet nemen zijn 31 leden aanwezig. De voorkeuren zijn als volgt verdeeld:

1e keus	2e keus	3e keus	Aantal
geel	turquoise	oranje	5 leden
geel	oranje	turquoise	7 leden
turquoise	geel	oranje	3 leden
turquoise	oranje	geel	7 leden
oranje	geel	turquoise	3 leden
oranje	turquoise	geel	6 leden

Net als bij de echte verkiezingen mogen de leden hun eerste keus op een briefje schrijven. De uitslag is dus:

1. geel met 12 stemmen
2. turquoise met 10 stemmen
3. oranje met 9 stemmen

Als we echter de kleuren twee-aan-twee zouden vergelijken krijgen we een heel andere uitslag: meer dan de helft van de leden (16 namelijk) heeft liever oranje dan turquoise, en ook meer dan de helft (ook 16) heeft liever oranje dan geel. Het lijkt er dus op dat oranje veruit de populairste kleur is. Bovendien hebben 16 leden liever turquoise dan geel en 16 leden liever oranje dan geel. Geel kunnen we dus wel aanmerken als de grote verliezer.

1. oranje (want populairder dan zowel turquoise als geel)
 2. turquoise (want populairder dan geel, maar minder populair dan oranje)
 3. geel (want minder populair dan zowel oranje als turquoise)
- Deze uitslag is echter precies tegengesteld aan de vorige. Welke is nou eerlijker?

Meeste-stemmen-gelden vs twee-aan-twee vergelijken

Over het algemeen wordt twee-aan-twee vergelijken (de tweede uitslag) eerlijker gevonden dan meeste-stemmen-gelden (de eerste uitslag). De reden hiervoor is dat twee-aan-twee vergelijken aan een aantal redelijke eisen voldoet, waaraan de meeste-stemmen-gelden helaas niet altijd kan voldoen. De eerste eis is al besproken: als een meerderheid van de kiezers liever A dan B heeft, dan willen we dat A ook hoger eindigt dan B. En in het extreme geval dat alle kiezers liever partij A dan partij B hebben, willen we natuurlijk helemaal dat A meer zetels haalt dan B. Zelfs hieraan is in het Nederlandse kiessysteem niet altijd voldaan (bedenk zelf hoe).

De tweede eis wordt duidelijk uit het volgende voorbeeld. Stel dat de zeven kiezers die als volgorde 1. geel; 2. oranje; 3. turquoise hadden, zich op het laatste moment bedenken en besluiten dat ze turquoise eigenlijk mooier vinden dan oranje (maar geel nog steeds mooier dan de andere twee). Je zou redelijkerwijs mogen verwachten

dat zo'n aardverschuiving in 'de mening van de kiezers' van grote invloed is op de uitslag van de verkiezingen. Dit is bij de meeste-stemmen-gelden echter helemaal niet het geval!

De nieuwe voorkeuren:

1e keus	2e keus	3e keus	Aantal
geel	turquoise	oranje	12 leden
turquoise	geel	oranje	3 leden
turquoise	oranje	geel	7 leden
oranje	geel	turquoise	3 leden
oranje	turquoise	geel	6 leden

Wat is met de nieuwe voorkeuren de 'nieuwe' uitslag als ieder lid zijn 1e keus op een briefje schrijft? En wat is de 'nieuwe' uitslag bij twee-aan-twee vergelijken? 'Uw mening telt' geldt dus meer bij twee-aan-twee vergelijken dan bij meeste-stemmen-gelden.

Iets meer in het algemeen is het bezwaar tegen het systeem dat in Nederland gebruikt wordt, dat het geen rekening houdt met wat de kiezers vinden van de partijen waar ze niet op stemmen. Twee-aan-twee vergelijken is niet de enige manier om hier wat aan te doen. Er zijn talloze andere kiessystemen te bedenken en bedacht die op dit punt 'eerlijker' lijken dan het gewone Nederlandse systeem. Ik roep jullie ook allemaal op zo'n systeem te bedenken.

Twijfel over België

Er is zelfs nog een derde punt waarop twee-aan-twee vergelijken beter scoort dan de meeste-stemmen-gelden, genaamd onafhankelijkheid van irrelevante alternatieven. Bekijk het volgende voorbeeld.

Een schoolklas gaat een weekje op kamp en mag kiezen uit drie bestemmingen: China, Japan en België.

De meningen van de 20 leerlingen zijn als volgt verdeeld:

1e keus	2e keus	3e keus	Aantal
België	China	Japan	16 leerlingen
België	Japan	China	3 leerlingen
Japan	België	China	1 leerling (Piet)

Er wordt gestemd op de gebruikelijke manier en de uitslag is als volgt:

1. België (met 16 stemmen)
2. Japan (met 1 stem)

3. China (met 0 stemmen)

De klas besluit naar België te gaan. 's Avonds is echter op het nieuws dat in België oorlog is uitgebroken. De ouderraad acht het niet verantwoordelijk om in deze omstandigheden naar België te gaan en de klas kiest voor zijn tweede keus: Japan. Dit is natuurlijk niet helemaal eerlijk. Als de oorlog een dag eerder was uitgebroken en er meteen alleen tussen China en Japan gestemd was, had China overtuigend met 16 tegen 4 gewonnen. Dit mankement van het kiessysteem nodigt natuurlijk uit tot vreselijke fraude. Stel dat de keus oorspronkelijk alleen tussen China en Japan ging. Piet voelde al aankomen dat hij vreselijk ging verliezen en zat danig met de handen in het haar. Toen hoorde hij opeens een piepje in zijn broekzak. Zijn sms-nieuwsdienst vertelde hem als eerste en als enige over de oorlog in België die zojuist begonnen was. Prompt lanceerde hij het irrelevante alternatief België als derde vakantiebestemming. Hij gaf hoog op van de goede keuken en de frisse boslucht en al zijn klasgenoten gingen voor de bijl. België won de verkiezingen als hierboven, met als goede tweede Japan. 's Avonds zag iedereen het nieuws en de volgende dag besloot de klas naar Japan te gaan, in plaats van het logischer lijkende China. We zeggen dat dit de meeste-stemmen-gelden-systeem niet onafhankelijk van irrelevante alternatieven is.

Ga na dat twee-aan-twee vergelijken wel onafhankelijk van irrelevante alternatieven is: d.w.z. het toevoegen en achteraf weer weghalen van een extra keuzemogelijkheid verandert niks aan de verhoudingen tussen de andere mogelijkheden.

Twee-aan-twee vergelijken in de praktijk

Dit alles roept twee vragen op: 'merken we nou ook wat van in het echt?' en 'als twee-aan-twee vergelijken dan zoveel beter is dan de meeste-stemmen-gelden, waarom doen we dat dan niet?'

Het antwoord op de eerste vraag is waarschijnlijk ja. Op grond van opiniepeilingen is dit berekend voor een aantal Nederlandse Tweede Kamerverkiezingen. Zie hiervoor A. van Deemen en N. Vergunst, *Emperical evidence of paradoxes of voting in Dutch elections*. In: *Public Choice*, 97, blz 475-490, 1998. In de verkiezingen van 1994 won D66 bij twee-aan-twee vergelijken van de PvdA, het CDA en de VVD, maar al deze partijen behaalden meer zetels dan D66.

Dan de vraag waarom twee-aan-twee vergelijken niet wordt toegepast. De reden is vrij eenvoudig: er is niet altijd een uitslag. Kijk nog eens naar het voorbeeld van de stoelen. Bij twee-aan-twee vergelijken wint de rotanstoel van de lederen fauteuil, de lederen

fauteuil op zijn beurt wint weer van de multifunctionele klapstoel, maar de multifunctionele klapstoel wint van de rotanstoel. Twee-aan-twee vergelijken geeft misschien het best de ‘mening van de samenleving als geheel’ weer, maar de samenleving als geheel denkt niet altijd logisch na.

We zouden natuurlijk (zoals Anna voorstelt in het voorbeeld van de stoelen) een van de drie vergelijkingen niet kunnen uitvoeren, maar in dat geval worden de stoelen niet gelijkwaardig behandeld. Als extra eis aan volmaakte democratie zouden we willen toevoegen dat alle partijen of dingen waartussen gekozen moet worden, gelijk worden behandeld.

Eisen aan je kiessysteem

Dan hebben we in totaal vijf eisen waaraan een volmaakte democratie zou moeten voldoen:

- **Neutraliteit:** alle partijen worden gelijk behandeld
- **Meerderheidsprincipe:** als de meerderheid partij A boven partij B verkiest moet A ook boven B eindigen
- **Monotonie:** als iemand van gedachten verandert en partij A hoger waardeert dan eerst, dan moet A er ook in de uitslag op vooruit gaan.
- **Onafhankelijkheid van irrelevante alternatieven:** toevoegen en weer verwijderen van partijen heeft geen invloed
- **Transitiviteit:** als A eindigt boven B en B boven C dan eindigt A automatisch ook boven C. Dit is dus niet haalbaar bij twee-aan-twee vergelijken.

De uitdaging is nu: kunnen we een kiessysteem bedenken dat aan alle vijf eisen voldoet?

Het antwoord is nee. Dit neemt echter niet weg dat je het niet kunt proberen. Er zijn een hoop kiessystemen te bedenken die een stuk eerlijker lijken dan meeste-stemmen-gelden, maar weer andere paradoxen hebben. Bijvoorbeeld dat sommige kiezers hun eerste keus meer helpen door thuis te blijven dan door te gaan stemmen (dit is het geval in het systeem van Ierland en Malta).

Je kan ook zeggen dat het meerderheidsprincipe en monotonie gewoon te veel gevraagd zijn. Laten we monotonie gewoon afschaffen als eis en het meerderheidsprincipe vervangen door de (onbetwistbaar redelijke) ‘Pareto eis’: Als iedereen partij A boven B verkiest moet A ook boven B eindigen in de verkiezingen.

Is er een systeem dat aan deze eis voldoet, transitief is, onafhankelijk van irrelevante alternatieven en alle partijen gelijk behandeld? Het

antwoord is ja, en dit systeem heet dictatuur. Dit wil niet zeggen dat dictatuur wiskundig het meest democratische systeem is. We kunnen namelijk gewoon een eis aan onze volmaakte democratie toevoegen, bijvoorbeeld dat alle stemmen even zwaar moeten meetellen. Ga na dat in een districtensysteem zoals in Engeland ook niet aan deze eis voldoet.

Wat nu in 1950 door Keneth Arrow bewezen is, is het volgende: er is geen systeem dat

- niet dictatoriaal is (niet iedereen hoeft gelijk behandeld te worden, maar je moet het niet te bond maken),
- neutraal (alle partijen worden gelijk behandeld),
- aan de Pareto eis voldoet (als iedereen A beter vindt dan B moet A ook beter uit de bus komen dan B)
- transitief is (Er is wel een uitslag).

Dit klinkt nogal schokkend. De (nog niet eens zo heel) Volmaakte Democratie is wiskundig bewezen (niet te verwarren met statistisch bewezen) onhaalbaar.

En nu?

De vraag is wat we daar mee aanmoeten in de praktijk. Ik zou zeggen dat we een keuze moeten maken welke eisen aan de democratie we belangrijker vinden dan andere. En dan een systeem zoeken dat het best aan die eisen voldoet.

Verschil tussen verkiezingen en referenda

In de Gemeente Zwaanhoven zijn twee partijen: Zwaanhoven Belangen en Leefbaar Zwaanhoven. Bovendien draaien de verkiezingen geheel om drie thema's: de bouw van een parkeergarage in een park, een fusie met de nabijgelegen gemeente Oest en de privatisering van het Zwaanhovens Vervoerbedrijf. Op al deze drie punten zijn de partijen het niet met elkaar eens. Als de één voor is, is de ander tegen, en andersom.

De meningen van de kiezers zijn verdeeld. Ze zijn in te delen in 4 groepen Hieronder staat aangegeven hoe deze groepen het per vraagstuk met de verschillende partijen eens zijn en hoe groot ze zijn. We gaan ervan uit dat alle kiezers alle drie de vraagstukken even belangrijk vinden en dus stemmen op de partij met wie ze het op minstens twee van de drie punten eens zijn.

Kiezers	parkeergarage	fusie	privatisering	gekozen partij
A: 20%	Leefbaar Z	Leefbaar Z	Z Belangen	Leefbaar Z
B: 20%	Leefbaar Z	Z belangen	Leefbaar Z	Leefbaar Z
C: 20%	Z Belangen	Leefbaar Z	Leefbaar Z	Leefbaar Z
D: 40%	Z Belangen	Z Belangen	Z Belangen	Z Belangen
Winnaar				
referendum:	Z Belangen 60%	Z Belangen 60%	Z Belangen 60%	

Bij de verkiezingen wint Leefbaar Zwaanhoven met 60 procent van de stemmen. Maar als er referenda gehouden zouden worden zou Zwaanhoven Belangen op alle drie de punten zijn zin krijgen en Leefbaar Zwaanhoven achter het net vissen.

Aanvullende literatuur:

Meer over verkiezingsparadoxen en nog talloze andere overtuigende bewijzen dat wiskunde in uitzonderlijke gevallen erg leuk, spannend en tot de verbeelding sprekend kan zijn, in De wraak van Archimedes ("Archimedes' revenge") van Paul Hoffman . Wat verder ook een ontzettend leuk boek is dat iedereen moet lezen: interessant, geestig en geschreven voor de spreekwoordelijke geïnteresseerde leek.

Nog meer over verkiezingsparadoxen in Verkiezingen een web van paradoxen van H. de Swart, A van Deemen, E van der Hout en P. Klop. (deel 8 uit de Zebrareeks van boekjes over interessante wiskunde die buiten de lesstof van de tweede fase valt). Hoewel het dus geschreven is voor middelbare scholieren, verraadt de stijl dat de auteurs de laatste jaren meer wiskundige dan gewone teksten geschreven en misschien ook wel gelezen hebben. Ik ben er dan ook beduidend minder enthousiast over dan de wraak van Archimedes, maar over verkiezingsparadoxen en kiessystemen in het algemeen staat er wel meer in.