

Paul Friedel

Het Noethertheorema

Welke natuurkundestudent heeft er niet van het Noethertheorema gehoord? Er wordt op geheimzinnige toon over gesproken door docenten die, als het erop aankomt, nooit vertellen hoe het nu precies zit. In de serie Scoop vult de gaten in je kennis deze keer de ins and outs van het Noethertheorema. Om maar meteen met de deur in huis te vallen geef ik hier het theorema:

Noethertheorema:

Iedere symmetrie van een fysisch systeem correspondeert met een behouden grootheid, en voor iedere behouden grootheid is er een symmetrie van het systeem te vinden.

Een voorbeeld

Dit is natuurlijk volstrekt onbegrijpelijk, maar het wordt duidelijker aan de hand van een voorbeeld. Stel nu dat we een systeem hebben dat translatie-invariantie heeft, denk bijvoorbeeld aan een spelletje tafelfoetbal dat door militairen op een vliegdekschip gespeeld wordt. Als het schip rustig vaart, maakt het voor het spelletje niets uit hoe hard het schip gaat, het zou evengoed in de haven kunnen liggen als met 50 knopen richting de Perzische Golf stomen. Het schip als geheel kun je eenparig laten bewegen zonder dat de mechanica op het schip verandert. De behouden grootheid die hiermee correspondeert, is impuls. Dit is eenvoudig in te zien. Als het schip met constante snelheid (constante impuls) voortbeweegt is er geen netto kracht die op het schip werkt. Maar een frame waarop geen kracht werkt, is 'ontkoppeld' van de omgeving. In zo'n *inertiaalframe* zijn de drie wetten van Newton geldig. Nu weten we ook dat het onmogelijk is vast te stellen wat de absolute positie van zo'n frame is, want dan zou je immers een referentiepunt moeten hebben dat buiten het frame ligt, maar welk referentiepunt zou daarvoor in aanmerking komen? Je kunt bijvoorbeeld de positie ten opzichte van de noordpool bepalen, maar er is geen objectieve reden te bedenken waarom juist dat een referentiepunt zou moeten zijn. Het zou net zo logisch zijn om Zutphen of de Bermudadriehoek als referentie te nemen. We kunnen dus concluderen dat voor een eenparig bewegend frame, alleen de afstanden binnen dat frame relevant zijn. De positie van het frame ten opzichte van de rest van het heelal doet niet ter zake.

Het bovenstaande voorbeeld is niet echt bevredigend. Eigenlijk is de argumentatie een cirkelredenering (huiswerk: zoek de logische fouten in bovenstaand stukje, het wringt bij de definitie van een inertiaalframe). Maar ook zonder al dit redeneren en interpreteren is de stelling van Noether te begrijpen. Het is dan wel nodig om het *Lagrangeformalisme* te gebruiken.

Lagrangeformalisme

We definiëren een functie, de Lagrangiaan, als volgt:

$$L = E_{kin} - E_{pot} = L(q, \dot{q}, t).$$

De Lagrangiaan is een functie van de positie q , de snelheid \dot{q} en de tijd t . Het is ook mogelijk om nog hogere orde tijdsafgeleiden te gebruiken, maar dit is meestal niet nodig en maakt de zaak er voor ons niet helderder op, dus vergeten we dat maar even. Verder definiëren we de *actie* als:

$$S = \int L dt.$$

We gebruiken nu een duivelse truc: het variatieprincipe. Dit principe stelt dat de evolutie van een systeem altijd zodanig is dat de actie extremaal is. We zullen dit nu nader bekijken. De Lagrangiaan is een functie van q , die op zichzelf weer een functie van t is. Stel nu dat de juiste oplossing voor $q(t)$ gegeven wordt door q_c . Dat de actie extremaal is, wil zeggen dat de actie niet verandert onder een kleine verandering in q , ofwel

$$q_c \rightarrow q_c + dq \Rightarrow dS = 0.$$

Als we dit uitwerken, vinden we de bewegingsvergelijking voor de plaats q :

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0.$$

Deze vergelijking heet de *Euler-Lagrange vergelijking*, voor een afleiding hiervan, kijk in [1]. Het is eigenlijk niet duidelijk waarom een systeem nu voldoet aan het variatieprincipe, maar het blijkt erg goed te werken. Een soortgelijke truc kun je ook toepassen om de brekingswet van Snellius af te leiden. Als je de tijd uitrekent die licht nodig heeft om van de ene plaats naar de andere te komen, terwijl de brekingsindex niet overal gelijk is, volgt licht altijd het pad dat de minste tijd kost. Dit principe levert, als je even doorrekent, de wet van Snellius op. De actie S speelt hier de rol van totale tijd en het 'pad' is gegeven door de waarde van $q(t)$ op ieder tijdstip.

Het is niet zo heel erg dat de werking van het actieprincipe niet duidelijk is, want vaak kun je aantonen dat de Lagrangeformulering equivalent is met de 'originele' formulering. Voor een bewijs dat dit geldt voor systemen die voldoen aan de Newtoniaanse mechanica, zie [1].

Stel nu dat we een specifieke variatie van q kiezen,

$$q \rightarrow q + dq = q + \mathbf{x} d\mathbf{q},$$

met \mathbf{x} infinitesimaal. De grootheid $d\mathbf{q}$ hoeft niet klein te zijn. We nemen nu aan dat deze transformatie een symmetrie is, ofwel: de bewegingsvergelijking van het systeem verandert niet als we $\mathbf{x} d\mathbf{q}$ toevoegen. Dit is het geval als de verandering in L nul is. Deze verandering in L kunnen we uitrekenen:

$$\begin{aligned}
 dL &= \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} \\
 &= \mathbf{x} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \mathbf{d}q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}q \right) \\
 &= \mathbf{x} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \mathbf{d}q - \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \mathbf{d}q + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \mathbf{d}q \right) \right) \\
 &= \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \mathbf{d}q \right)
 \end{aligned}$$

In de laatste stap gebruikten we de bewegingsvergelijking. Als we nu willen dat $dL=0$ dan moet gelden:

$$\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \mathbf{d}q \right) = \mathbf{x} \frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

Deze definitie van Q , laat zien dat Q behouden is. We noemen Q vaak de *lading*. De elektrische lading van een systeem is inderdaad behouden onder bepaalde voorwaarden en dan kunnen we die vinden met behulp van het Noethertheorema, maar in het algemeen kan Q van alles zijn.

Een ingewikkelder voorbeeld

Misschien ben je onderhand de draad een beetje kwijt, maar aan de hand van een voorbeeld wordt duidelijk wat de verschillende begrippen betekenen. Stel, we hebben een planeet die om de zon draait. We gaan ervan uit dat de zon zo zwaar is dat we de beweging hiervan mogen verwaarlozen. De Lagrangiaan is nu

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{mMG}{|q|},$$

met M de massa van de zon en m de massa van de planeet. Deze Lagrangiaan is invariant onder rotaties in het bewegingsvlak (xy) van de planeet

$$q \rightarrow R(q) \Rightarrow dL = 0$$

Een infinitesimale rotatie om de z -as kunnen we schrijven als

$$dq_j = \mathbf{x} \mathbf{e}_{ijz} q_i.$$

We hebben het Levi-Cevita-symbool gebruikt, dit is gedefinieerd als

$$\mathbf{e}_{xyz} = \mathbf{e}_{yzx} = \mathbf{e}_{zxy} = +1$$

$$\mathbf{e}_{zyx} = \mathbf{e}_{yxz} = \mathbf{e}_{xzy} = -1$$

$$\mathbf{e}_{xxz} = \mathbf{e}_{yyy} = \dots = 0$$

We sommeren over iedere index die dubbel voorkomt (in dit geval i). Voor de x -component van dq hebben we bijvoorbeeld:

$$dq_x = \mathbf{x}(q_x - q_y).$$

(huiswerkgave 2: controleer dat de formule voor dq_j inderdaad klopt)

De behouden lading is nu gemakkelijk te vinden.

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} dq_j = m \dot{q}_j \mathbf{e}_{ijz} q_i = (\mathbf{q} \times \mathbf{p})_z$$

Het Levi-Cevita-symbool levert precies het uitproduct op en Q is dus niets anders dan de draaiimpuls in de z -richting!

Het omgekeerde geval

De stelling van Noether zegt ook dat het mogelijk is om bij een gegeven behouden grootheid de bijbehorende symmetrie te vinden. In de quantummechanica is dit mooi te zien. Stel, we hebben een systeem met impulsbehoud. We weten dat in de quantummechanica iedere grootheid met een operator correspondeert. In dit geval hebben we:

$$\hat{P}_x \Leftrightarrow \frac{\hbar}{i} \partial_x$$

We gaan nu de operator in een complexe e -macht zetten en de Taylorreeks bepalen: (het wordt zo meteen duidelijk waarom we dit doen)

$$e^{ib\hat{P}_x} = \sum_n \frac{1}{n!} (ib\hat{P}_x)^n = \sum_n \frac{1}{n!} (\hbar b)^n (\partial_x)^n,$$

met b gewoon een getal. Niets bijzonders. Maar kijk nu eens naar een translatie, $x \rightarrow x + \mathbf{a}$. Voor de golf functie van het systeem geldt dan, als we weer de Taylorreeks opschrijven,

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi(x + \mathbf{a}) = \sum_n \frac{1}{n!} \mathbf{a}^n (\partial_x)^n \Psi(x).$$

Deze uitdrukking is hetzelfde als de e -macht die we net uitschreven, met $\mathbf{a} = \hbar b$. We zien dus dat de translatie wordt gegenereerd door de impulsoperator in een e -macht te zetten en te laten werken op de golf functie:

$$e^{ib\hat{P}_x} \Psi(x) = \Psi(x + \hbar b).$$

Er is dus een duidelijke correspondentie tussen translaties en impuls. Dit komt natuurlijk over als gegoochel, maar het is mogelijk om aan te tonen dat deze procedure de juiste symmetrie oplevert voor alle quantummechanische grootheden die behouden zijn. Het bewijs is echter te ingewikkeld om hier te kunnen behandelen. Kijk bijvoorbeeld in [2].

Voor de echte *diehards*, quantumveldentheorie

In de klassieke natuurkunde is het Lagrange-formalisme een mooi hulpmiddel om op een geünificeerde manier over dynamica te praten, maar we kennen over het algemeen ook de onderliggende vergelijkingen van het systeem. De bewegingsvergelijking kan ook worden gevonden zonder het formalisme te gebruiken, in ons voorbeeld door gewoon Newtoniaanse mechanica toe te passen. In de quantumveldentheorie (QFT, quantummechanica voor gevorderden) kan dit niet. De actie is niet slechts een hulpmiddel, maar een uitgangspunt voor de theorie. Er is wellicht niet eens een onderliggende mechanica. Een gemiddeld model in de QFT doorloopt de volgende stadia

1. Men neme een actie, eventueel gemotiveerd door fysische intuïtie.
2. Bereken de bewegingsvergelijking.
3. De waarde van alle fysische parameters die uit de actie volgen, is oneindig (zogenaamde *divergenties* zijn een standaard probleem in de QFT, maar ze kunnen worden opgelost, zie stap 4).
4. Trek oneindig van deze waarden af, de theorie is nu *gerenormaliseerd*. (Zo rücksichtslos gaat het er niet echt aan toe in de QFT, maar echt netjes gaat alles ook niet in zijn werk, wiskundig gezien.)
5. Vergelijk de gerenormaliseerde parameters met de meetwaarden.
6. Herhaal stap 1 t/m 5 totdat het gewenste resultaat is bereikt.

De actie is dus alles wat er bekend is van het systeem. Onderliggende wetten (zoals de Newtoniaanse mechanica) zijn niet bekend. Toch leidt QFT tot mooie resultaten.

Een van de belangrijkste eigenschappen van de moderne QFT is dat alle modellen verenigbaar zijn met de speciale relativiteitstheorie, in tegenstelling tot de 'klassieke' quantummechanica. Dit zorgt ervoor dat de Lagrange-theorie er iets anders uitziet dan het klassieke geval, maar het principe blijft hetzelfde. We vervangen alleen de Lagrangiaan door een Lagrangedichtheid ℓ , die vaak ook weer gewoon Lagrangiaan wordt genoemd. De actie is dan gegeven door

$$S = \int \ell d^4 x.$$

We integreren over de ruimte- en tijdcoördinaten. Dit is eigenlijk hetzelfde als de klassieke Lagrangiaan, alleen werken we hier met energiedichtheden, die we vervolgens weer over de ruimte integreren. De kinetische term in de Lagrangiaan wordt vervangen door een term met afgeleiden, zoals

$$-\partial_m \mathbf{j} \partial^m \mathbf{j}.$$

We sommeren weer over de index, maar dit keer loopt \mathbf{m} over de ruimtecoördinaten en over de tijdcoördinaten met een minteken. Hierboven staat dus

$$\frac{\partial^2 \mathbf{j}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{j}.$$

De variabele \mathbf{j} is de waarde van het quantumveld. Dat is vergelijkbaar met een elektrisch of een magnetisch veld, alleen is de interpretatie veel lastiger, maar daar hoeven we ons niet druk om te maken. Het veld \mathbf{j} speelt de rol die q in het klassieke geval speelde. Een typische QFT Lagrangiaan (deze beschrijft elektronen en positronen) ziet er zo uit:

$$\ell = -\bar{\Psi}_a (\mathbf{g}_{ab}^m \partial_{\mathbf{m}} + m \mathbf{1}_{ab}) \Psi_b.$$

\mathbf{y}_a is een vector met 4 componenten, \mathbf{g}_{ab}^m is een 4x4 matrix (voor iedere \mathbf{m} een andere matrix), $\mathbf{1}_{ab}$ is de eenheidsmatrix en de vector $\bar{\Psi}_a$ is gedefinieerd door

$$\bar{\Psi}_b = i \Psi_a^\dagger \mathbf{g}_{ab}^0.$$

Deze vectoren leven niet in de normale vierdimensionale ruimte, het zijn zogenaamde *spinoren*. Die lijken wel op vectoren, maar gedragen zich anders onder rotaties en dat is precies wat elektronen ook blijken te doen. Dit vreemde gedrag wordt veroorzaakt door het feit dat elektronen *fermionen* zijn. Bosonen zijn veel gemakkelijker te beschrijven in de QFT.

We hebben nu twee paar indices, een stel voor de spinorruimte (ab) en een ander stel voor de 'gewone' ruimte (\mathbf{m}). Omdat de vectoren imaginaire getallen kunnen bevatten, heeft deze Lagrangiaan een bijzondere invariantie. Stel nu dat we \mathbf{y}_a vermenigvuldigen met een imaginaire e -macht

$$\Psi_a \rightarrow e^{ia} \Psi_a, \quad \bar{\Psi}_a \rightarrow \bar{\Psi}_a e^{-ia},$$

Met \mathbf{a} een constante. We noemen dit een $U(1)$ -transformatie. In plaats van een behouden lading, vinden we een 'behouden' stroom:

$$j^m = \frac{\partial \ell}{\partial (\partial_{\mathbf{m}} \Psi_a)} d\Psi_a, \quad \partial_{\mathbf{m}} j^m = \partial_x j^x + \partial_y j^y + \partial_z j^z - \partial_t j^t = 0.$$

De lading is dan

$$Q = \int j^t d^3x,$$

(huiswerkopgave 3: laat zien dat de tijdsafgeleide van Q inderdaad nul is, gebruik de stelling van Gauss). De stroom wordt in dit geval gegeven door (geen afleiding)

$$j^m = -i \bar{\Psi}_a \mathbf{g}_{ab}^m \Psi_b.$$

en de lading is

$$Q = \int d^3x \Psi_a^\dagger \Psi_a.$$

Je ziet, in de QFT is het niet altijd direct duidelijk wat je je nu precies fysisch moet voorstellen. Het blijkt dat deze lading het aantal elektronen min het aantal positronen telt. Q is dus evenredig met de elektrische lading van het systeem, want elektronen hebben lading -1 en positronen lading $+1$. In dit voorbeeld is het nog precies te zeggen wat de interpretatie van de lading Q is, maar over het algemeen is dat heel moeilijk. Het Noethertheorema helpt ja dan bij het vinden van die ladingen en symmetrieën.

Het is duidelijk dat we nog wel even door kunnen gaan met het behandelen van voorbeelden van toepassingen van het Noethertheorema en symmetrie (zie illustratie), maar waarschijnlijk is je uithoudingsvermogen inmiddels afdoende op de proef gesteld. In elk geval kun je nu zelf de beweringen van je docenten over het Noethertheorema narekenen, als je wilt...

Emmy Noether

Emmy Amalie Noether werd in 1882 geboren in Erlangen, Duitsland. Haar vader (Max Noether) was een gewaardeerd wiskundige aan de universiteit van Erlangen. In 1900 kreeg ze haar diploma als lerares Frans en Engels. Ze besloot echter geen les te gaan geven, maar wiskunde te gaan studeren. Het probleem was dat ze een vrouw was. Vrouwen mochten in Duitsland wel studeren, maar voor ieder college moest de betreffende professor persoonlijk toestemming geven. Haar studie liep goed en in 1903 vertrok ze naar Göttingen, waar op dat moment vele grote wetenschappers werkten, zoals Hilbert, Klein en Minkowski. Nadat ze haar doctorstitel had behaald (in Erlangen) kon ze formeel niet verder werken in de wiskunde. Een 'postdoc'-plaats was aan vrouwen niet toegestaan. Ze bleef daarom in Erlangen om haar vader te helpen. Haar talent viel echter op: ze werd uitgenodigd lid te worden van de *Deutsche Mathematiker Vereinigung* en in 1913 gaf ze colleges in Wenen. In 1915 vroegen Hilbert en Klein of ze weer naar Göttingen wilde komen. Ze mocht daar geen college geven, maar dat probleem werd opgelost door de colleges onder de naam van Hilbert te laten plaatsvinden. Noether was slechts assistent, maar in de praktijk deed ze al het werk.

De afleiding van het *theorema van Noether* was één van de eerste dingen die ze deed in Göttingen. In 1918 werd een artikel over de afleiding gepubliceerd [3]. Later heeft ze nog belangrijk werk verricht in de theorie van idealen en ringen, maar haar precieze bijdragen zijn moeilijk te achterhalen, omdat ze vaak niet onder haar eigen naam kon publiceren. Veel van de resultaten die ze boekte zijn daarom verschenen onder de naam van mannelijke professoren of zelfs studenten.

In 1933 werd Noether door de Nazi's gedwongen om haar positie in Göttingen op te geven vanwege haar Joodse achtergrond. Ze vertrok naar Noord-Amerika, waar ze ondermeer aan het *Institute for advanced Study* heeft gewerkt. In 1935 stierf ze.

Meer lezen

- [1] J.B Marion & S.T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Saunders College Publishing, 1995
- [2] H.F. Jones, *Groups, Representations and Physics*, Institute of Physics, 1998
- [3] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. v.d. Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1918, p. 235-357
Het artikel is in het Duits geschreven, maar vrij goed te volgen. Het is te vinden in de Artisbibliotheek, maar bij de auteur van dit artikel is ook een kopie te krijgen. Mail hiervoor naar scoop@science.uva.nl
- [4] http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Noether_Emma.html
Op de website van St. Andrews University in Schotland is een mooie verzameling biografieën van wiskundigen te vinden en een hoop leuke informatie er omheen. Een echte aanrader.
- [5] <http://www.emmynoether.com>
Niet echt geweldige informatie, maar wel makkelijk te onthouden en de website linkt zelf weer door naar andere sites.



De algemene relativiteitstheorie (ART) is af te leiden als je de eis stelt dat alle fysica door middel van één formalisme beschreven moet kunnen worden, onafhankelijk van het frame waarin dat plaatsvindt. Zo moet bijvoorbeeld de beschrijving in bolcoördinaten hier op aarde overeenkomen met die in een versnellend cartesisch coördinatensysteem met de oorsprong op Mars. Deze symmetrie (onder algemene coördinantentransformaties) is alles wat nodig is om de ART af te leiden.

Binnen het vakgebied van de kosmologie is de situatie helemaal mooi, het blijkt namelijk dat het heelal op grote schaal homogeen is (translatieinvariant) en isotroop (rotatieinvariant). Dit zorgt ervoor dat de Einsteinvergelijkingen van de ART een stuk vereenvoudigd kunnen worden.

Op dit plaatje is *gravitational lensing* te zien. Licht van sterrenstelsels wordt afgebogen in het gravitatieveld van dichterbij gelegen stelsels. Dit effect wordt door de ART voorspeld en is dus uiteindelijk slechts een symmetrie-effect.