Basisboek rekenen

Ook verschenen bij Pearson Education:

Jan van de Craats en Rob Bosch, *Basisboek wiskunde*

Jan van de Craats, *Vervolgboek wiskunde*

Mariëlle Bovenhoff, Willem Zeijl en Gerard Latjes, *Basisboek taal*

Yvonne Halink, *Basisboek grammatica*

Aafke Moons, Mariëlle Bovenhoff en Gerard Latjes, *Basisboek spelling*

BASISBOEK REKENEN

Jan van de Craats en Rob Bosch

Tweede editie

PEARSON Education

ISBN: 978-90-430-2104-3
NUR: 123
Trefw: rekenen, rekenonderwijs

Dit is een uitgave van Pearson Education Benelux bv,
Postbus 75598, 1070 AN Amsterdam
Website: www.pearsoneducation.nl – e-mail: amsterdam@pearson.com

Website bij dit boek: www.pearsoneducation.nl/vandecraats

Illustraties en LaTeX-opmaak: Jan van de Craats
Omslag: Inkahootz, Amsterdam

Prof. dr. J. van de Craats is hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam, dr. R. Bosch is universitair hoofddocent wiskunde aan de Nederlandse Defensie Academie.

Dit boek is gedrukt op een papiersoort die niet met chloorhoudende chemicaliën is gebleekt. Hierdoor is de productie van dit boek minder belastend voor het milieu.

Inhoudsopgave

Leeswijzer

Rekenen leer je door te oefenen. Elk hoofdstuk van dit boek begint daarom op de linkerpagina met opgaven. Je kunt er direct mee aan de slag, want de eerste opgaven zijn altijd gemakkelijk. Geleidelijk worden ze moeilijker. Zodra je een opgave gemaakt hebt, kun je je antwoord achterin controleren.

Op de rechterbladzijden staat, heel beknopt, een toelichting bij de opgaven links. Je kunt die naar behoefte gebruiken. Kom je termen of begrippen tegen die daar niet verklaard worden, dan kun je via het trefwoordenregister dat achter in het boek staat, de plaats vinden waar die uitleg wél staat.

Tenzij anders is aangegeven, mag je bij de opgaven geen rekenmachine gebruiken.

Dankbetuiging

Rini Arnouts, Jan Brinkhuis, Gery Gorter, Louis Oortman en Harald Theunissen hebben voorlopige versies van de tekst van dit boek van opbouwend commentaar voorzien. We zijn ze daarvoor zeer erkentelijk. Uiteraard zijn wij voor alle eventuele tekortkomingen die er nog in de tekst zitten, volledig verantwoordelijk. Na de verschijning van de eerste editie van dit boek hebben we veel reacties van lezers gehad. Tim Boormans, Arthur Schut, Tessa Franken, Michiel Duijkers en Jeroen Kerstholt signaleerden een aantal fouten. Die zijn inmiddels hersteld. Voor reacties (via de uitgever of rechtstreeks) houden we ons aanbevolen!

De auteurs

Voorwoord

Dit boek is geschreven voor iedereen die wil leren rekenen of weggezakte rekenvaardigheden wil bijspijkeren. Het is vooral ook bedoeld voor studenten aan de pabo en de technische, economische en zorgopleidingen in het mbo en het hbo. Het boek begint met eenvoudige optelsommen en werkt dan het gehele repertoire af van optellen en aftrekken, vermenigvuldigen en delen (inclusief de staartdeling), rekenen met decimale breuken ('kommagetallen'), andere breuken, negatieve getallen en machtsverheffen. Daarnaast zijn er toepassingen in het rekenen met geldbedragen, procenten, wisselkoersen, maten en gewichten.

Oefenen staat centraal

In de didactische opzet van dit boek staat oefenen centraal. De stof is opgedeeld in korte hoofdstukken die allemaal op de linkerbladzijde beginnen met opgaven waar je direct mee aan de slag kunt. Op de rechterbladzijden staat uitleg, vaak aan de hand van voorbeelden. De antwoorden vind je achterin zodat je telkens zelf je resultaten kunt controleren. Raadpleeg de tekst op de rechterbladzijden naar behoefte. De inhoudsopgave en het trefwoordenregister maken het snel opzoeken van weggezakte kennis gemakkelijk.

Geen basisschoolboek

Het *Basisboek rekenen* is niet bedoeld als leer- of werkboek voor de basisschool. Daar zal de docent die de stof beheerst elke keer weer in de dagelijkse praktijk inspiratie vinden om de rekenles te verlevendigen met actuele voorbeelden, puzzels, projecten en leuke toepassingen. Maar daarbij mogen de basisoefeningen niet vergeten worden. Leerlingen moeten juist daardoor rekenvaardigheid en zelfvertrouwen opbouwen. Voor die oefeningen kunnen de opgaven uit *Basisboek rekenen* wél model staan. Denk trouwens niet dat leerlingen het maken van rijtjes sommen vervelend vinden. Mits goed opgebouwd en goed gedoseerd is het nog steeds de meest effectieve onderwijsvorm. Het is net als met voetballen, pianospelen of het leren van een vreemde taal: oefening baart kunst. En als je merkt dat je er wat van leert, is oefenen juist een stimulans om door te gaan. Elke goede docent weet hoe stimulerend het ook voor zwakke leerlingen is wanneer zij erin slagen goed oefenmateriaal onder de knie te krijgen.

Hoofdrekenen

In het vroegere rekenonderwijs was hoofdrekenen heel belangrijk. Tegenwoordig hechten we daar wat minder waarde aan, ook al omdat er voor het echt lastige en omvangrijke rekenwerk computers zijn. Maar bij alle exacte, technische en economische vakken moet je toch ook zelf een behoorlijke hoofd- en handrekenvaardigheid hebben. In elk geval moet je eenvoudige berekeningen met kleine getallen, zoals $6+9$, $15-8$, 8×7, $63 : 7$ zonder nadenken, als het ware op de automatische piloot, kunnen uitvoeren. Je moet ze gewoon paraat hebben. In dit boek zeggen we bij zulke sommen dat je ze *uit je hoofd moet kennen*. Dat bereik je op den duur vanzelf omdat je ze zo vaak gebruikt, maar in het begin moet je dit soort kennis domweg in je hoofd stampen, net zoals je woordjes in je hoofd moet stampen als je een vreemde taal wilt leren.

Rekenmachines

Alle opgaven uit dit boek kunnen gemakkelijk met een rekenmachine worden gemaakt. Waarom leren we leerlingen dan niet alleen maar hoe ze de knoppen van zo'n apparaat moeten bedienen? Dat is in een paar lessen gebeurd, en je bent overal vanaf. De reden is duidelijk: zo werkt het niet. Op die manier krijgen leerlingen zelf geen rekenvaardigheid en vertrouwen in het werken met getallen. Natuurlijk zijn er veel beroepen waarin je dat zelfvertrouwen niet mist en waarin je zelf ook maar nauwelijks hoeft te kunnen rekenen. Maar het beroep van docent aan een basisschool hoort daar niet bij, want leerlingen die later te maken krijgen met techniek, economie en exacte vakken moeten wél goed kunnen rekenen. Anders wordt het met de wiskunde en met ingewikkelde formules helemaal niets. Elke basisschooldocent heeft zulke leerlingen in de klas, en hij of zij zal dus ook zelf vlot en foutloos moeten kunnen rekenen. Met pen en papier wel te verstaan, en bij eenvoudige opgaven uit het hoofd. Het is daarnaast natuurlijk goed als leerlingen ook al vroeg leren om een eenvoudige rekenmachine te gebruiken. Dat is trouwens in een paar minuten geleerd; niemand heeft daar moeite mee. Maar alleen als je ook zonder zo'n ding goed kunt rekenen, blijf jij het apparaat de baas en kun je hem laten doen wat jij wilt.

Rekenprogramma's op de computer

Op het internet en in de handel zijn veel programma's beschikbaar waarmee je zelf je rekenvaardigheden kunt verbeteren. Bij gebruik op school zijn de resultaten daarvan echter nogal eens teleurstellend, en dat ligt vaak niet aan de kwaliteit van die programma's. Daar is meestal niets mis mee, en als je het écht wilt, kun je er ook veel van leren. Maar als je met zo'n computerprogramma werkt, ben je snel geneigd te denken dat je genoeg hebt geoefend. Bovendien gokken veel leerlingen vaak het antwoord, vooral bij meerkeuzesommen. Maar daar leer je niets van. En omdat je meestal met één muisklik het goede antwoord of een aanwijzing krijgt, ga je niet zelf eerst een tijdje zitten piekeren wat de oplossing zou kunnen zijn. En dat is nu juist zo leerzaam!

Veel oefenopgaven

Rekenprogramma's op de computer hebben zeker hun verdienste, maar in onze ervaring is een van de meest effectieve methodes nog steeds het geconcentreerd werken met pen en papier. Het is ook daarom dat wij een overvloed aan oefenopgaven (met antwoorden achterin) in ons boek hebben opgenomen. Controleer na elk rijtje dat je gemaakt hebt, je antwoorden achterin. Probeer te leren van je fouten! Juist door veel opgaven te maken leer je het meest. En wie behoefte heeft aan nog meer oefenmateriaal kan zelf direct extra sommen bedenken volgens de gegeven voorbeelden. Als je jezelf nog niet vertrouwt, dan kun je je antwoorden met een rekenmachine controleren, maar we hopen eigenlijk dat je inmiddels zo veel eigen controlemogelijkheden in je methodes hebt ingebouwd, dat je dat ook zonder rekenmachine kunt doen. Ook het uitvoeren van zulke controles is erg leerzaam! Nogmaals, het is niet dat we een hekel hebben aan rekenmachines of computers, integendeel, maar wel willen we dat je eerst zelf een stevige basis aan rekenvaardigheden bereikt.

Rekenvaardigheid

Als je *Basisboek rekenen* hebt doorgewerkt, kun je goed rekenen. Je zult die rekenvaardigheid ook nooit meer kwijtraken. Ook bij het rekenen met een rekenmachine begrijp je dan wat je doet en waarom je het doet. Dat is iets waar je je hele leven plezier van zult hebben. Rekentechnisch ben je goed op je taken voorbereid als je op de basisschool zelf rekenonderwijs gaat geven of in andere beroepen met cijfermateriaal en berekeningen te maken krijgt. En je hebt de juiste voorkennis en vaardigheden om in vervolgopleidingen als economie, bedrijfskunde, gezondheidskunde, techniek of de exacte vakken met succes met getallen en formules te kunnen werken.

Bij de tweede editie

Van heel wat gebruikers van de eerste editie van dit boek hebben we positieve reacties ontvangen, soms met suggesties voor verbeteringen. Fouten in de antwoordenlijst konden we telkens al in een volgende druk verbeteren. De eerste auteur houdt op zijn homepage (zie http://staff.science.uva.nl/~craats) een erratalijst bij. In deze tweede editie konden we een meer ingrijpende uitbreiding realiseren: het oorspronkelijke hoofdstuk 7 met toepassingen van kommagetallen is gesplitst in twee hoofdstukken. Het nieuwe hoofdstuk 7 is nu geheel gewijd aan het metrieke stelsel, met een uitgebreidere uitleg en meer oefenmateriaal dan in de eerste editie. Het nieuwe hoofdstuk 8 bevat verdere toepassingen van kommagetallen: rekenen met tijd en snelheid, omrekenen van valuta en rekenen met verhoudingen en procenten. De andere hoofdstukken zijn in grote lijnen ongewijzigd gebleven.

Referentieniveaus rekenen

In 2007 publiceerde de *Expertgroep Doorlopende leerlijnen Taal en Rekenen* (de commissie Meijerink) het rapport *Over de drempels met taal en rekenen* (zie hiervoor www.taalenrekenen.nl). De eerste auteur van dit boek maakte deel uit van deze expertgroep. In dit rapport worden voor *rekenen en wiskunde* vier subdomeinen onderscheiden: 1. *Getallen*, 2. *Verhoudingen*, 3. *Meten en meetkunde* en 4. *Verbanden*. De commissie heeft bij rekenen en wiskunde voor elk van de leeftijdgroepen van 12, 16 en omstreeks 18 jaar twee *referentieniveaus* beschreven: een *fundamenteel niveau* (F) en een *streefniveau* (S). De fundamentele niveaus 1F, 2F en 3F richten zich op functioneel gebruik in praktische situaties, terwijl de streefniveaus 1S, 2S en 3S een meer abstract op de wiskunde gericht spoor volgen. Voor de pabo zal niveau 3S als ingangseis worden gesteld.
Basisboek rekenen behandelt alle stof van referentieniveau 3S voor zover die betrekking heeft op rekenen in strikte zin. Dat wil zeggen vrijwel het volledige subdomein *Getallen*, het volledige subdomein *Verhoudingen* en het onderdeel meten (rekenen in het metrieke stelsel) van het subdomein *Meten en meetkunde*. Het onderdeel meetkunde en het subdomein *Verbanden* van referentieniveau 3S vallen buiten het bestek van dit boek. Zij maken deel uit van de wiskunde van het voortgezet onderwijs. Dat geldt ook voor het onderdeel wortels binnen het subdomein *Getallen*.

Extra oefenmateriaal en oefentoetsen

Wie alle opgaven in *Basisboek rekenen* heeft gemaakt, kan rekenen. Als service voor de gebruikers hebben we op www.pearsoneducation.nl/vandecraats bij elk hoofdstuk een oefentoets met antwoorden gezet. Bij een aantal hoofdstukken staat op deze site ook nog extra oefenmateriaal. De tien modeltoetsen uit de eerste editie van *Basisboek rekenen* zijn uit de papieren editie gehaald en op de site geplaatst.

Wij hebben het *Basisboek rekenen* geschreven omdat er in het huidige onderwijs behoefte is aan zo'n boek en omdat we uit ervaring weten dat de in dit boek gevolgde didactische methode succesvol is. Voor op- en aanmerkingen van gebruikers en andere geïnteresseerden houden we ons aanbevolen!

Oosterhout en Breda, april 2010,
Jan van de Craats en Rob Bosch

I Natuurlijke getallen

Dit deel gaat over getallen waarmee je *aantallen* kunt weergeven: *vijf* vingers aan je hand, *twaalf* appels op een schaal, *zestig* minuten in een uur, *zestien miljoen* Nederlanders, *nul* euro in je portemonnee. Ze worden *natuurlijke getallen* genoemd. Het zijn de eenvoudigste getallen die er zijn. Later zul je ook met andere getallen kennismaken: decimale breuken ('kommagetallen'), andere breuken, negatieve getallen en machten. Maar om daarmee te werken, moet je eerst met natuurlijke getallen kunnen rekenen. Dat leer je in dit deel. De eenvoudigste berekeningen moet je snel uit het hoofd kunnen maken, voor alle andere berekeningen leer je overzichtelijke pen-en-papiermethodes die altijd werken.

1 Optellen

Oefen de volgende opgaven net zo lang totdat je dit soort optellingen vlot en vrijwel zonder nadenken paraat hebt. Het gaat dus om alle mogelijke combinaties van twee getallen van één cijfer.

1.1
- a. $4+7=$
- b. $6+3=$
- c. $8+5=$
- d. $6+4=$
- e. $9+2=$

1.2
- a. $8+7=$
- b. $5+6=$
- c. $3+5=$
- d. $0+9=$
- e. $7+5=$

1.3
- a. $8+3=$
- b. $7+9=$
- c. $9+0=$
- d. $1+5=$
- e. $4+8=$

1.4
- a. $4+4=$
- b. $5+5=$
- c. $6+6=$
- d. $7+7=$
- e. $8+8=$

1.5
- a. $8+9=$
- b. $3+9=$
- c. $9+1=$
- d. $6+0=$
- e. $7+4=$

1.6
- a. $0+0=$
- b. $5+9=$
- c. $7+8=$
- d. $3+2=$
- e. $3+8=$

1.7
- a. $2+8=$
- b. $7+3=$
- c. $6+5=$
- d. $4+6=$
- e. $9+9=$

1.8
- a. $9+8=$
- b. $3+7=$
- c. $1+9=$
- d. $6+8=$
- e. $4+5=$

1.9
- a. $2+7=$
- b. $6+9=$
- c. $7+6=$
- d. $9+5=$
- e. $3+8=$

Bij de volgende opgaven vragen we je een kleine opteltabel in te vullen. De eerste hebben we zelf ingevuld om je te laten zien hoe zoiets gaat.

1.10

+	5	8
5	10	13
9	14	17

1.11

+	7	6
9		
6		

1.12

+	4	8
7		
9		

1.13

+	4	9
8		
7		

1.14

+	7	6
9		
5		

1.15

+	9	8
5		
7		

1.16

+	3	8
7		
5		

1.17

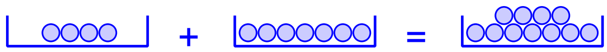
+	4	7
8		
3		

1.18

+	9	6
8		
7		

De opteltabel

Dit hoofdstuk gaat over optellen, bijvoorbeeld $4+7$. Wat betekent dat? Kijk naar de figuur hieronder.

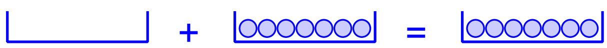


In het linkerschaaltje liggen vier ballen, in het rechterschaaltje zeven. Gooi je ze in één schaal bij elkaar, dan heb je er elf: vier ballen plus zeven ballen is samen elf ballen. We noemen 11 de *som* van 4 en 7, schrijven $4+7=11$ en spreken dit uit als *vier plus zeven is elf*. Het teken '+' heet het *plusteken*. Op school wordt soms 'en' in plaats van 'plus' gezegd (4 en 7 is 11), en soms wordt ook 'erbij' gebruikt (4 erbij 7 is 11).

Optellen van twee getallen onder de 10 moet je vlot uit je hoofd kunnen. De sommen op de linker bladzijde zijn bedoeld om je daarin te oefenen. Hieronder hebben we alle uitkomsten overzichtelijk in één tabel bij elkaar gezet. De uitkomst 11 van de som $4+7$ vind je op het kruispunt van de horizontale rij met nummer 4 en de verticale kolom met nummer 7.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Met ballen in schaaltjes kun je alle sommen uit deze tabel illustreren. Ook bijvoorbeeld $0+7=7$, want dan is het linkerschaaltje leeg:



De tabel zelf zit ook mooi en overzichtelijk in elkaar: bij elk stapje naar rechts of naar beneden komt er 1 bij. Oefen alle sommen net zo lang totdat je ze snel uit je hoofd kunt maken, en houd dit ook bij! Bij *alle* verdere berekeningen in dit boek heb je die vaardigheid nodig.

1.19
a. $40 + 50 =$
b. $60 + 50 =$
c. $80 + 40 =$
d. $30 + 90 =$
e. $80 + 20 =$

1.20
a. $60 + 70 =$
b. $20 + 90 =$
c. $80 + 70 =$
d. $10 + 90 =$
e. $40 + 70 =$

1.21
a. $90 + 90 =$
b. $30 + 80 =$
c. $70 + 50 =$
d. $30 + 70 =$
e. $70 + 70 =$

1.22
a. $400 + 700 =$
b. $600 + 500 =$
c. $800 + 400 =$
d. $900 + 700 =$
e. $500 + 500 =$

1.23
a. $300 + 400 =$
b. $600 + 700 =$
c. $800 + 800 =$
d. $100 + 900 =$
e. $200 + 900 =$

1.24
a. $700 + 700 =$
b. $900 + 800 =$
c. $700 + 500 =$
d. $300 + 600 =$
e. $800 + 700 =$

1.25
a. $4000 + 7000 =$
b. $6000 + 3000 =$
c. $8000 + 3000 =$
d. $6000 + 5000 =$
e. $9000 + 3000 =$

1.26
a. $4000 + 5000 =$
b. $6000 + 6000 =$
c. $7000 + 6000 =$
d. $8000 + 8000 =$
e. $9000 + 2000 =$

1.27
a. $3000 + 9000 =$
b. $6000 + 3000 =$
c. $1000 + 9000 =$
d. $7000 + 7000 =$
e. $9000 + 9000 =$

Nu door elkaar:

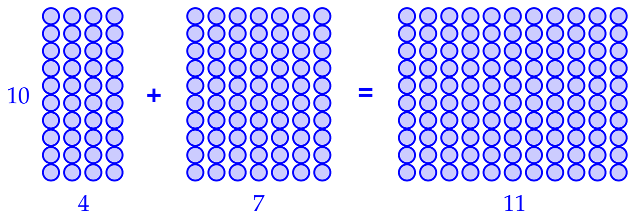
1.28
a. $7 + 7 =$
b. $60 + 60 =$
c. $800 + 500 =$
d. $6 + 9 =$
e. $9000 + 7000 =$

1.29
a. $6000 + 8000 =$
b. $90 + 40 =$
c. $800 + 600 =$
d. $9000 + 9000 =$
e. $100 + 900 =$

1.30
a. $700 + 400 =$
b. $9 + 8 =$
c. $80 + 90 =$
d. $6000 + 4000 =$
e. $4000 + 7000 =$

Tientallen, honderdtallen, duizendtallen

Nu je weet dat $4 + 7 = 11$ kun je ook makkelijk uitrekenen wat $40 + 70$ is. Kijk maar:



Je ziet dat vier staafjes van tien balletjes plus zeven staafjes van tien balletjes samen elf staafjes van tien balletjes geven. Anders gezegd: vier *tientallen* plus zeven *tientallen* is samen elf *tientallen*. Dus $40 + 70 = 110$. Het is heel simpel: gewoon zonder nullen optellen en er dan weer een nul achter zetten, *want als je een nul achter een getal zet, dan maak je het* 10 *maal zo groot.*

Met *honderdtallen* kun je dezelfde truc uithalen. We maken er maar geen plaatje bij, want staafjes van honderd balletjes zijn lastiger te tekenen, maar je snapt zonder plaatje ook wel wat er uit $400 + 700$ moet komen. Vier honderdtallen plus zeven honderdtallen is elf honderdtallen: $400 + 700 = 1100$. Wat erachter zit, is dit: *als je twee nullen achter een getal zet, maak je het* 100 *maal zo groot.* Je snapt dat trouwens direct als je aan geld denkt: 1 euro is 100 eurocent, dus 4 euro is 400 eurocent, 7 euro is 700 eurocent, en samen is dat 11 euro, oftewel 1100 eurocent.

En nog een stapje verder, nu met *duizendtallen*: $4000 + 7000 = 11000$. *Als je drie nullen achter een getal zet, maak je het* 1000 *maal zo groot.* Denk als toepassing maar aan gewichten. Een kilogram is 1000 gram. Vier kilogram plus zeven kilogram is samen elf kilogram, met andere woorden, 4000 gram plus 7000 gram is samen 11000 gram.

1.31
a. $18+7=$
b. $26+5=$
c. $78+9=$
d. $64+8=$
e. $19+2=$

1.32
a. $8+17=$
b. $5+36=$
c. $3+89=$
d. $6+87=$
e. $7+25=$

1.33
a. $18+9=$
b. $73+8=$
c. $29+9=$
d. $25+7=$
e. $34+8=$

1.34
a. $49+4=$
b. $57+5=$
c. $76+6=$
d. $77+7=$
e. $88+8=$

1.35
a. $8+19=$
b. $5+89=$
c. $9+17=$
d. $6+68=$
e. $7+49=$

1.36
a. $82+9=$
b. $59+2=$
c. $74+8=$
d. $57+6=$
e. $62+9=$

1.37
a. $4+17=$
b. $6+13=$
c. $18+5=$
d. $16+4=$
e. $9+22=$

1.38
a. $18+7=$
b. $5+26=$
c. $3+45=$
d. $66+9=$
e. $7+45=$

1.39
a. $8+39=$
b. $47+9=$
c. $91+8=$
d. $55+7=$
e. $4+38=$

1.40
a. $14+7=$
b. $26+5=$
c. $38+4=$
d. $13+9=$
e. $78+3=$

1.41
a. $6+27=$
b. $2+19=$
c. $8+27=$
d. $1+79=$
e. $4+87=$

1.42
a. $19+9=$
b. $23+8=$
c. $37+5=$
d. $83+7=$
e. $17+7=$

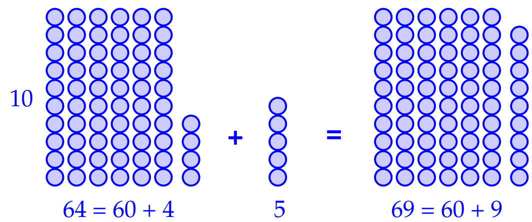
1.43
a. $42+\ \ 7=$
b. $\ \ 6+25=$
c. $89+\ \ 4=$
d. $\ \ 9+22=$
e. $56+\ \ 6=$

1.44
a. $39+4=$
b. $62+9=$
c. $88+8=$
d. $31+9=$
e. $47+7=$

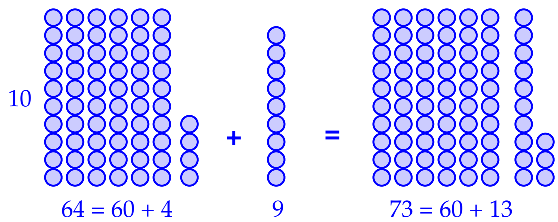
1.45
a. $71+7=$
b. $90+8=$
c. $7+55=$
d. $3+68=$
e. $85+7=$

Over een tiental heen tellen

Als je $64 + 5$ wilt uitrekenen, splits je 64 in 60 en 4. Omdat $4 + 5 = 9$ geldt ook $64 + 5 = 60 + 4 + 5 = 60 + 9 = 69$, kijk maar:



Soms moet je over een tiental heen tellen, bijvoorbeeld als je $64 + 9$ wilt uitrekenen. Je weet immers dat $4 + 9 = 13$, en dus is $64 + 9 = 60 + 4 + 9 = 60 + 13 = 73$. Hieronder zie je er een plaatje bij.



Ook dit soort optelsommen moet je vlot uit je hoofd kunnen maken. Op de linker bladzijde staat oefenmateriaal. Maak er gebruik van!

1.46
a. $7+4+8=$
b. $6+2+9=$
c. $5+5+5=$
d. $8+6+4=$
e. $3+9+5=$

1.47
a. $8+9+5=$
b. $3+8+7=$
c. $6+8+8=$
d. $5+7+7=$
e. $9+7+6=$

1.48
a. $9+9+9=$
b. $7+5+8=$
c. $8+7+6=$
d. $9+8+7=$
e. $6+1+6=$

1.49
a. $7+5+7=$
b. $9+3+7=$
c. $8+8+8=$
d. $7+7+7=$
e. $6+6+6=$

1.50
a. $9+5+3+8=$
b. $7+6+8+5=$
c. $8+5+6+9=$
d. $3+8+7+6=$
e. $6+7+6+7=$

1.51
a. $8+6+7+5=$
b. $9+6+7+3=$
c. $2+8+5+8=$
d. $7+6+1+6=$
e. $4+7+6+2=$

1.52
a. $7+3+2+4=$
b. $7+9+8+4=$
c. $5+5+2+4=$
d. $3+9+8+2=$
e. $4+5+6+8=$

1.53
a. $7+7+7+7=$
b. $9+2+1+5=$
c. $8+8+8+8=$
d. $8+9+8+9=$
e. $9+9+9+9=$

1.54
a. $5+7+8+9=$
b. $5+2+9+5=$
c. $8+6+8+2=$
d. $7+9+8+4=$
e. $9+8+7+6=$

1.55
a. $3+6+9+2+4=$
b. $7+5+3+8+2=$
c. $5+5+7+6+4=$
d. $6+6+3+8+7=$
e. $7+5+8+6+1=$

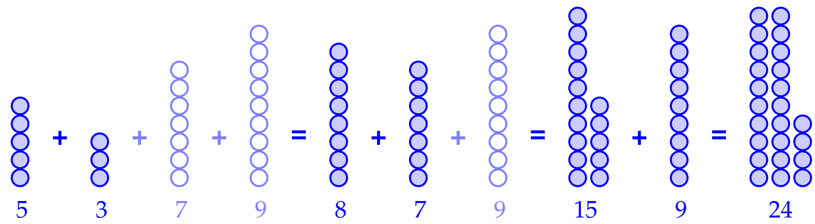
1.56
a. $7+5+7+8+8=$
b. $9+8+7+3+7=$
c. $8+8+8+8+8=$
d. $7+5+7+5+7=$
e. $9+9+9+9+9=$

Doortellen uit je hoofd

Voor het 'optellen onder elkaar', dat we later gaan leren, is het belangrijk dat je ook langere optellingen van getallen van één cijfer uit je hoofd kunt maken zoals $5+3+7+9$. Je doet dat als volgt: 5 plus 3 is 8, plus 7 is 15, plus 9 is 24. Dus

$$5+3+7+9 = (5+3)+7+9 = 8+7+9 = (8+7)+9 = 15+9 = 24$$

Wat tussen haakjes staat, hoort bij elkaar en wordt eerst uitgerekend. In de figuur hieronder zie je hoe dat gaat. In een lichte kleur staan de staafjes die op dat moment nog niet gebruikt worden. Elke tussenstap doe je uit je hoofd. Op de linker bladzijde vind je oefenmateriaal.



1.57
a. $18 + 11 =$
b. $15 + 14 =$
c. $18 + 13 =$
d. $17 + 15 =$
e. $19 + 12 =$

1.58
a. $22 + 12 =$
b. $45 + 15 =$
c. $16 + 26 =$
d. $69 + 11 =$
e. $73 + 16 =$

1.59
a. $18 + 62 =$
b. $34 + 57 =$
c. $39 + 49 =$
d. $46 + 29 =$
e. $74 + 12 =$

1.60
a. $14 + 23 =$
b. $51 + 15 =$
c. $63 + 16 =$
d. $17 + 73 =$
e. $28 + 38 =$

1.61
a. $18 + 29 =$
b. $33 + 39 =$
c. $29 + 41 =$
d. $62 + 28 =$
e. $17 + 59 =$

1.62
a. $23 + 25 =$
b. $56 + 29 =$
c. $73 + 26 =$
d. $55 + 43 =$
e. $12 + 49 =$

1.63
a. $43 + 38 =$
b. $65 + 22 =$
c. $47 + 45 =$
d. $33 + 61 =$
e. $62 + 29 =$

1.64
a. $26 + 57 =$
b. $25 + 49 =$
c. $67 + 28 =$
d. $13 + 77 =$
e. $21 + 71 =$

1.65
a. $33 + 44 =$
b. $33 + 62 =$
c. $77 + 21 =$
d. $39 + 56 =$
e. $43 + 28 =$

1.66
$$\begin{array}{r} 63 \\ 24 \\ \hline \end{array} +$$

1.67
$$\begin{array}{r} 44 \\ 35 \\ \hline \end{array} +$$

1.68
$$\begin{array}{r} 54 \\ 43 \\ \hline \end{array} +$$

1.69
$$\begin{array}{r} 72 \\ 27 \\ \hline \end{array} +$$

1.70
$$\begin{array}{r} 67 \\ 23 \\ \hline \end{array} +$$

1.71
$$\begin{array}{r} 58 \\ 25 \\ \hline \end{array} +$$

1.72
$$\begin{array}{r} 76 \\ 21 \\ \hline \end{array} +$$

1.73
$$\begin{array}{r} 54 \\ 37 \\ \hline \end{array} +$$

1.74
$$\begin{array}{r} 35 \\ 35 \\ \hline \end{array} +$$

1.75
$$\begin{array}{r} 47 \\ 47 \\ \hline \end{array} +$$

1.76
$$\begin{array}{r} 49 \\ 49 \\ \hline \end{array} +$$

1.77
$$\begin{array}{r} 36 \\ 36 \\ \hline \end{array} +$$

1.78
$$\begin{array}{r} 68 \\ 23 \\ \hline \end{array} +$$

1.79
$$\begin{array}{r} 44 \\ 29 \\ \hline \end{array} +$$

1.80
$$\begin{array}{r} 47 \\ 43 \\ \hline \end{array} +$$

1.81
$$\begin{array}{r} 28 \\ 37 \\ \hline \end{array} +$$

1.82
$$\begin{array}{r} 39 \\ 33 \\ \hline \end{array} +$$

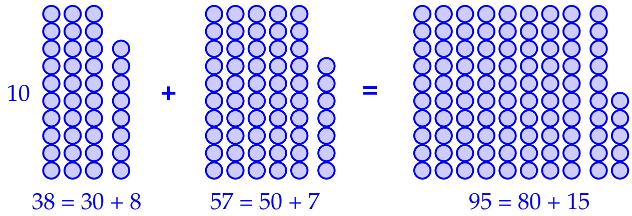
1.83
$$\begin{array}{r} 59 \\ 35 \\ \hline \end{array} +$$

1.84
$$\begin{array}{r} 67 \\ 14 \\ \hline \end{array} +$$

1.85
$$\begin{array}{r} 54 \\ 46 \\ \hline \end{array} +$$

Getallen van twee cijfers optellen

We nemen nu optelsommen van twee getallen van twee cijfers. Bijvoorbeeld $38 + 57$. Dat gaat in twee stappen. Bereken eerst $8 + 7 = 15$ (de eenheden) en dan $30 + 50 = 80$ (de tientallen). Tel de uitkomsten daarna op: $15 + 80 = 95$. Dit is de uitkomst. Hieronder zie je er een plaatje bij.



Zulke sommen kun je nog gemakkelijk uit je hoofd maken. Op de linker bladzijde staat flink wat oefenmateriaal.

Als je dit soort sommen met pen en papier maakt, is het handig om de twee getallen niet achter elkaar te zetten, maar *onder elkaar*. Dan staan de eenheden onder elkaar en de tientallen ook, en dan gaat het optellen haast automatisch goed. Dat is bovendien een goede voorbereiding op het onder elkaar optellen van grotere getallen dat we in de volgende paragraaf gaan behandelen. We laten het hier weer zien met de optelsom $38 + 57$ als voorbeeld.

$$
\begin{array}{rlcrl}
38 & & & & \\
57 & & & & \\
\hline
15 & + & \longleftarrow & 8 + \ \ 7 & \textit{(eenheden)} \\
80 & & \longleftarrow & 30 + 50 & \textit{(tientallen)} \\
\hline
95 & + & \longleftarrow & 38 + 57 &
\end{array}
$$

In de praktijk schrijf je het veel korter op. Je doet het wel weer in twee stappen. Eerst tel je de eenheden bij elkaar op (de rechterkolom): $8 + 7 = 15$. Daar zit een tiental in: $15 = 10 + 5$. Je schrijft onder de streep daarom eerst alleen de 5 op (zie de linkerfiguur hieronder) en vervolgens tel je de 1 op bij de andere tientallen: $1 + 3 + 5 = 9$ (zie de rechterfiguur hieronder). Klaar.

$$
\textit{stap 1:}\quad
\begin{array}{rl}
38 & \\
57 & \\
\hline
5 & +
\end{array}
\qquad\qquad
\textit{stap 2:}\quad
\begin{array}{rl}
38 & \\
57 & \\
\hline
95 & +
\end{array}
$$

Oefen jezelf hierin door de opgaven op de linkerbladzijde te maken.

Maak de volgende opgaven. Om erin te komen, geven we eerst een aantal opgaven waarbij je slechts *twee* getallen onder elkaar moet optellen. Dan een aantal opgaven met drie getallen en tot slot een aantal opgaven met vier getallen. Je zult zien dat dat eigenlijk voor de moeilijkheid helemaal niets uitmaakt. Je moet wel nauwkeurig werken. Schrijf daarom telkens de getallen die je 'verhuist' boven aan de kolom erbij.

1.86
$$\begin{array}{r} 154 \\ 68 \\ \hline \end{array} +$$

1.87
$$\begin{array}{r} 421 \\ 129 \\ \hline \end{array} +$$

1.88
$$\begin{array}{r} 356 \\ 572 \\ \hline \end{array} +$$

1.89
$$\begin{array}{r} 298 \\ 154 \\ \hline \end{array} +$$

1.90
$$\begin{array}{r} 234 \\ 167 \\ \hline \end{array} +$$

1.91
$$\begin{array}{r} 216 \\ 293 \\ \hline \end{array} +$$

1.92
$$\begin{array}{r} 396 \\ 270 \\ \hline \end{array} +$$

1.93
$$\begin{array}{r} 348 \\ 157 \\ \hline \end{array} +$$

1.94
$$\begin{array}{r} 234 \\ 168 \\ \hline \end{array} +$$

1.95
$$\begin{array}{r} 489 \\ 629 \\ \hline \end{array} +$$

1.96
$$\begin{array}{r} 355 \\ 523 \\ \hline \end{array} +$$

1.97
$$\begin{array}{r} 798 \\ 134 \\ \hline \end{array} +$$

1.98
$$\begin{array}{r} 271 \\ 607 \\ 213 \\ \hline \end{array} +$$

1.99
$$\begin{array}{r} 245 \\ 158 \\ 365 \\ \hline \end{array} +$$

1.100
$$\begin{array}{r} 726 \\ 176 \\ 64 \\ \hline \end{array} +$$

1.101
$$\begin{array}{r} 91 \\ 237 \\ 325 \\ \hline \end{array} +$$

1.102
$$\begin{array}{r} 512 \\ 674 \\ 203 \\ \hline \end{array} +$$

1.103
$$\begin{array}{r} 205 \\ 58 \\ 468 \\ \hline \end{array} +$$

1.104
$$\begin{array}{r} 737 \\ 379 \\ 95 \\ \hline \end{array} +$$

1.105
$$\begin{array}{r} 151 \\ 37 \\ 525 \\ \hline \end{array} +$$

1.106
$$\begin{array}{r} 451 \\ 267 \\ 203 \\ \hline \end{array} +$$

1.107
$$\begin{array}{r} 845 \\ 58 \\ 865 \\ \hline \end{array} +$$

1.108
$$\begin{array}{r} 737 \\ 77 \\ 360 \\ \hline \end{array} +$$

1.109
$$\begin{array}{r} 901 \\ 233 \\ 425 \\ \hline \end{array} +$$

1.110
$$\begin{array}{r} 491 \\ 260 \\ 307 \\ 713 \\ \hline \end{array} +$$

1.111
$$\begin{array}{r} 845 \\ 18 \\ 492 \\ 158 \\ \hline \end{array} +$$

1.112
$$\begin{array}{r} 726 \\ 134 \\ 345 \\ 364 \\ \hline \end{array} +$$

1.113
$$\begin{array}{r} 191 \\ 837 \\ 248 \\ 325 \\ \hline \end{array} +$$

Optellen onder elkaar – het recept

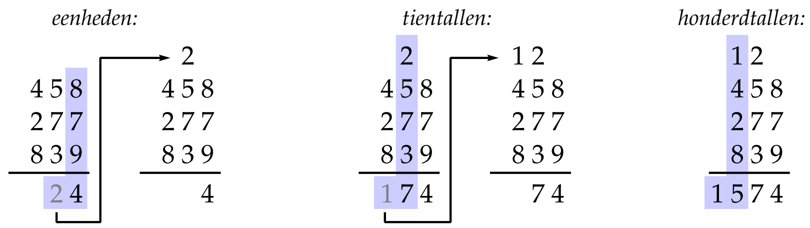
In deze paragraaf geven we het eerste *rekenrecept* van dit boek, een altijd succesvolle, snelle rekenmethode die nog steeds dagelijks wordt toegepast door iedereen die geen rekenmachine bij de hand heeft: het onder elkaar optellen van een rijtje getallen. In een eenvoudige vorm hebben we het al in de vorige paragraaf gedaan (twee getallen van twee cijfers optellen), maar nu nemen we grotere getallen en ook meer dan twee getallen want daarvoor werkt het recept net zo goed.

We leggen het uit met drie getallen van drie cijfers. Stel dat je 458, 277 en 839 bij elkaar moeten optellen. Het idee is weer: tel eerst alle eenheden bij elkaar op, dan alle tientallen en dan alle honderdtallen:

8	50	400
7	70	200
9	30	800
24	150	1400

Tot slot moet je dan nog die drie getallen bij elkaar optellen: uitkomst 1574.

Nu komt het echte recept. Schuif de drie optellingen als het ware in elkaar, en voer de totale optelling uit als een drietrapsraket: eerst de eenheden, dan de tientallen en dan de honderdtallen. Hieronder zie je hoe dat gaat.



1. Tel de eenheden (rechterkolom) bij elkaar op: $8 + 7 + 9 = 24$. *Van het getal* 24 *schrijf je alleen de* 4 *onder de streep, de* 2 *verhuist naar de bovenkant van de volgende kolom (de tientallen).*
2. Tel de tientallen (met de extra 2) bij elkaar op: $2 + 5 + 7 + 3 = 17$. Ook nu schrijf je alleen de 7 onder de streep, de 1 verhuist weer naar de bovenkant van de volgende kolom (de honderdtallen).
3. Tel de honderdtallen (met de extra 1) bij elkaar op: $1 + 4 + 2 + 8 = 15$. Klaar.

In woorden beschreven lijkt het ingewikkeld, maar in de praktijk leer je het snel. Bij elke stap hebben we voor de duidelijkheid het verhuizen van het extra getal (hier was dat 2 of 1) in twee stapjes getekend, maar dat doe je natuurlijk in één keer. En met meer dan drie getallen of met getallen van meer dan drie cijfers gaat het net zo.

Maak de volgende opgaven zonder de getallen die je ‘verhuist’ op te schrijven.

1.114
$$\begin{array}{r} 361 \\ 675 \\ 103 \\ \hline \end{array} +$$

1.115
$$\begin{array}{r} 675 \\ 482 \\ 163 \\ \hline \end{array} +$$

1.116
$$\begin{array}{r} 738 \\ 79 \\ 608 \\ \hline \end{array} +$$

1.117
$$\begin{array}{r} 161 \\ 537 \\ 522 \\ \hline \end{array} +$$

1.118
$$\begin{array}{r} 1453 \\ 2951 \\ 53 \\ 907 \\ \hline \end{array} +$$

1.119
$$\begin{array}{r} 1406 \\ 2386 \\ 4159 \\ 475 \\ \hline \end{array} +$$

1.120
$$\begin{array}{r} 888 \\ 2484 \\ 2338 \\ 2037 \\ \hline \end{array} +$$

1.121
$$\begin{array}{r} 578 \\ 9780 \\ 2222 \\ 3512 \\ \hline \end{array} +$$

1.122
$$\begin{array}{r} 1263 \\ 2451 \\ 167 \\ 536 \\ \hline \end{array} +$$

1.123
$$\begin{array}{r} 4096 \\ 2487 \\ 1150 \\ 3485 \\ \hline \end{array} +$$

1.124
$$\begin{array}{r} 897 \\ 2454 \\ 2378 \\ 234 \\ \hline \end{array} +$$

1.125
$$\begin{array}{r} 78 \\ 945 \\ 2273 \\ 3120 \\ \hline \end{array} +$$

1.126
$$\begin{array}{r} 768 \\ 11056 \\ 654 \\ 5403 \\ 31265 \\ 67 \\ 4511 \\ \hline \end{array} +$$

1.127
$$\begin{array}{r} 4568 \\ 4986 \\ 574 \\ 24073 \\ 2982 \\ 10149 \\ 582 \\ \hline \end{array} +$$

1.128
$$\begin{array}{r} 59 \\ 110 \\ 22222 \\ 8091 \\ 54 \\ 12344 \\ 2036 \\ \hline \end{array} +$$

1.129
$$\begin{array}{r} 34198 \\ 1782 \\ 3564 \\ 78435 \\ 7416 \\ 273 \\ 13156 \\ \hline \end{array} +$$

1.130
$$\begin{array}{r} 7168 \\ 71056 \\ 6754 \\ 54 \\ 31165 \\ 8767 \\ 4219 \\ \hline \end{array} +$$

1.131
$$\begin{array}{r} 43678 \\ 49806 \\ 5174 \\ 4078 \\ 2982 \\ 11490 \\ 58211 \\ \hline \end{array} +$$

1.132
$$\begin{array}{r} 593 \\ 4110 \\ 222 \\ 81094 \\ 566 \\ 37454 \\ 21039 \\ \hline \end{array} +$$

1.133
$$\begin{array}{r} 348 \\ 10782 \\ 32264 \\ 78695 \\ 71410 \\ 679 \\ 23186 \\ \hline \end{array} +$$

Opschrijven of onthouden?

De methode van de vorige paragraaf om rijtjes getallen bij elkaar op te tellen, werkt prima. Ervaren rekenaars zullen op den duur de getallen die we boven aan de kolommen hebben bijgeschreven, niet meer echt opschrijven, maar onthouden en er direct mee doorrekenen. Als je je nog niet zeker voelt, moet je dat nog niet doen, maar hier geven we vast een voorbeeld met toelichting. Het gaat om een optelling van zeven getallen van twee, drie en vier cijfers. De optelling gaat dus in vier stappen, die we hier naast elkaar weergeven:

$$
\begin{array}{r}
4372\\
656\\
1297\\
56\\
7895\\
733\\
3465\\
\hline
4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
4372\\
656\\
1297\\
56\\
7895\\
733\\
3465\\
\hline
74
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
4372\\
656\\
1297\\
56\\
7895\\
733\\
3465\\
\hline
474
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
4372\\
656\\
1297\\
56\\
7895\\
733\\
3465\\
\hline
18474
\end{array}
$$

Toelichting:

$2+6+7+6+5+3+5=34$, 4 opschrijven, $\boxed{3}$ onthouden.

$\boxed{3}+7+5+9+5+9+3+6=47$, 7 opschrijven, $\boxed{4}$ onthouden.

$\boxed{4}+3+6+2+8+7+4=34$, 4 opschrijven, $\boxed{3}$ onthouden.

$\boxed{3}+4+1+7+3=18$. Klaar. Uitkomst: 18474.

Je merkt weer hoe noodzakelijk het is om dit soort eenvoudige optellingen (telkens een getal van één cijfer erbij) vlot uit het hoofd te kunnen uitvoeren.

Controle: een mens maakt gemakkelijk fouten. Het is daarom een goede gewoonte om ter controle de optelling nog een keer uit te voeren, maar daarbij de kolommen niet van boven naar beneden, maar van beneden naar boven af te lopen. Het resultaat moet hetzelfde zijn.

2 Aftrekken

Oefen de volgende opgaven net zo lang tot je ze bijna blindelings, zonder verder nadenken kunt maken. Je hebt die vaardigheid in de rest van dit hoofdstuk voortdurend nodig!

2.1
a. $9 - 7 =$
b. $5 - 3 =$
c. $6 - 4 =$
d. $9 - 9 =$
e. $4 - 2 =$

2.2
a. $8 - 7 =$
b. $5 - 2 =$
c. $8 - 3 =$
d. $7 - 0 =$
e. $5 - 1 =$

2.3
a. $18 - 3 =$
b. $17 - 6 =$
c. $15 - 5 =$
d. $17 - 1 =$
e. $18 - 4 =$

2.4
a. $17 - 9 =$
b. $15 - 8 =$
c. $16 - 9 =$
d. $13 - 4 =$
e. $14 - 7 =$

2.5
a. $18 - 9 =$
b. $15 - 9 =$
c. $10 - 8 =$
d. $17 - 7 =$
e. $16 - 7 =$

2.6
a. $11 - 3 =$
b. $12 - 8 =$
c. $15 - 6 =$
d. $11 - 9 =$
e. $14 - 5 =$

2.7
a. $14 - 3 =$
b. $15 - 4 =$
c. $16 - 9 =$
d. $17 - 8 =$
e. $18 - 9 =$

2.8
a. $18 - 7 =$
b. $13 - 5 =$
c. $10 - 7 =$
d. $16 - 0 =$
e. $17 - 8 =$

2.9
a. $12 - 3 =$
b. $15 - 9 =$
c. $17 - 5 =$
d. $13 - 8 =$
e. $19 - 9 =$

2.10
a. $13 - 5 =$
b. $16 - 9 =$
c. $18 - 4 =$
d. $19 - 8 =$
e. $11 - 4 =$

2.11
a. $12 - 6 =$
b. $13 - 8 =$
c. $14 - 5 =$
d. $15 - 9 =$
e. $16 - 8 =$

2.12
a. $10 - 3 =$
b. $13 - 7 =$
c. $15 - 8 =$
d. $12 - 9 =$
e. $16 - 7 =$

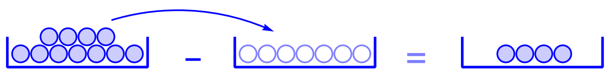
2.13
a. $13 - 7 =$
b. $16 - 5 =$
c. $18 - 8 =$
d. $11 - 8 =$
e. $13 - 6 =$

2.14
a. $12 - 9 =$
b. $13 - 6 =$
c. $14 - 9 =$
d. $15 - 8 =$
e. $16 - 9 =$

2.15
a. $10 - 4 =$
b. $13 - 8 =$
c. $15 - 9 =$
d. $18 - 2 =$
e. $11 - 9 =$

De aftrektabel

Dit hoofdstuk gaat over het van elkaar aftrekken van twee getallen. Als voorbeeld zie je hieronder een plaatje bij $11 - 7 = 4$. In het linkerschaaltje liggen elf ballen. Als je daar zeven ballen af haalt en in een tweede schaaltje legt, houd je vier ballen in het eerste schaaltje over. We schrijven $11 - 7 = 4$ en spreken het uit als *elf min zeven is vier*. Het teken ‘−’ heet het *minteken*. Op school wordt soms ook wel ‘eraf’ gebruikt in plaats van ‘min’, dus *elf eraf zeven is vier*.



Alle uitkomsten van aftreksommen met getallen onder de 20 staan in de onderstaande tabel. Op het kruispunt van rij nummer 11 en kolom nummer 7 vind je bijvoorbeeld de uitkomst 4 van $11 - 7$.

–	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
19	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
18	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0		
17	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0			
16	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0				
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0					
14	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0						
13	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0							
12	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0								
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0									
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0										
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0											
8	8	7	6	5	4	3	2	1	0												
7	7	6	5	4	3	2	1	0													
6	6	5	4	3	2	1	0														
5	5	4	3	2	1	0															
4	4	3	2	1	0																
3	3	2	1	0																	
2	2	1	0																		
1	1	0																			
0	0																				

rij nr. 11

$11 - 7 = 4$

kolom nr. 7

Met ballen in schaaltjes kun je alle aftreksommen uit deze tabel illustreren. Ook bijvoorbeeld $11 - 0 = 11$, want dan blijft het middelste schaaltje leeg:

De tabel zelf zit ook weer mooi en overzichtelijk in elkaar: bij elk stapje naar rechts of naar beneden gaat er 1 af. Oefen alle sommen op de linker bladzijde net zo lang totdat je ze snel uit je hoofd kunt maken!

2.16
a. $23 - 2 =$
b. $37 - 4 =$
c. $26 - 5 =$
d. $56 - 6 =$
e. $89 - 8 =$

2.17
a. $49 - 8 =$
b. $39 - 7 =$
c. $48 - 5 =$
d. $63 - 3 =$
e. $47 - 5 =$

2.18
a. $29 - 7 =$
b. $66 - 5 =$
c. $47 - 6 =$
d. $88 - 5 =$
e. $75 - 4 =$

2.19
a. $23 - 8 =$
b. $37 - 3 =$
c. $26 - 5 =$
d. $54 - 6 =$
e. $89 - 9 =$

2.20
a. $49 - 8 =$
b. $33 - 7 =$
c. $41 - 9 =$
d. $63 - 8 =$
e. $42 - 5 =$

2.21
a. $32 - 7 =$
b. $66 - 9 =$
c. $27 - 6 =$
d. $89 - 5 =$
e. $73 - 8 =$

2.22
a. $31 - 8 =$
b. $75 - 6 =$
c. $63 - 5 =$
d. $40 - 8 =$
e. $98 - 9 =$

2.23
a. $90 - 8 =$
b. $53 - 7 =$
c. $14 - 9 =$
d. $56 - 8 =$
e. $24 - 5 =$

2.24
a. $23 - 9 =$
b. $60 - 9 =$
c. $72 - 6 =$
d. $56 - 7 =$
e. $34 - 9 =$

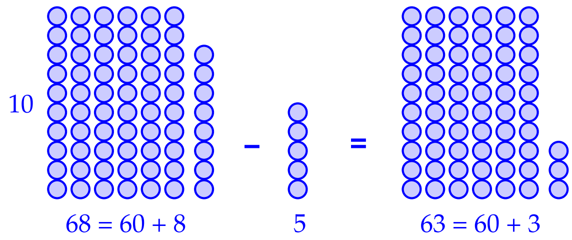
2.25
a. $31 - 5 =$
b. $76 - 8 =$
c. $64 - 5 =$
d. $42 - 8 =$
e. $90 - 9 =$

2.26
a. $70 - 8 =$
b. $53 - 6 =$
c. $14 - 7 =$
d. $52 - 8 =$
e. $24 - 7 =$

2.27
a. $63 - 9 =$
b. $75 - 6 =$
c. $70 - 4 =$
d. $56 - 8 =$
e. $30 - 9 =$

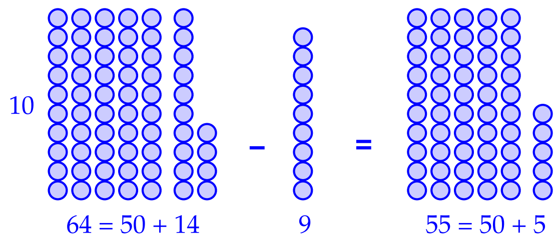
Moeilijkere aftreksommen

Als je alle aftreksommen uit de tabel op bladzijde 21 kent, kun je ook sommen als $68 - 5$ maken. Daar komt 63 uit want $68 = 60 + 8$ en $8 - 5 = 3$.

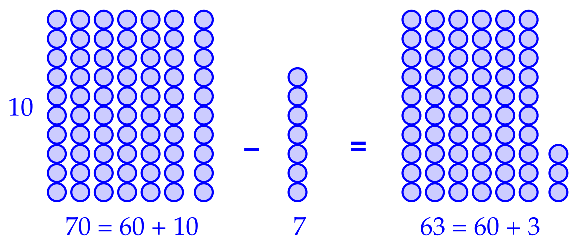


Op dezelfde manier is $127 - 3 = 124$ want $127 = 120 + 7$ en $7 - 3 = 4$. Je hoeft in deze gevallen dus alleen maar naar de laatste cijfers (de eenhedencijfers) te kijken.

Maar wat te doen met $64 - 9$? Nu kun je niet alleen maar naar de eenhedencijfers kijken, want 4 is kleiner dan 9. Maar als je 64 schrijft als $50 + 14$ lukt het wél. Je weet al uit je hoofd dat $14 - 9 = 5$, dus $64 - 9 = 50 + 14 - 9 = 50 + 5 = 55$. Het komt erop neer dat je nu niet alleen maar naar de 4 van 64 kijkt, maar daar 14 van maakt door een 1 te 'kopen' van de 6 die ervoor staat (en die nu dus een 5 wordt).



Hier is nog een voorbeeld, nu met $70 - 7$. Je moet 70 dan schrijven als $60 + 10$. Omdat $10 - 7 = 3$ is $70 - 7 = 60 + 10 - 7 = 60 + 3 = 63$.



Maak de volgende opgaven. Schrijf daarbij telkens de hulpcijfers op als je wat 'koopt', net als in de voorbeelden op de rechter bladzijde.

2.28	2.29	2.30	2.31
$\begin{array}{r}63\\24\\\hline\end{array}\ -$	$\begin{array}{r}44\\35\\\hline\end{array}\ -$	$\begin{array}{r}84\\47\\\hline\end{array}\ -$	$\begin{array}{r}72\\37\\\hline\end{array}\ -$
2.32	2.33	2.34	2.35
$\begin{array}{r}163\\86\\\hline\end{array}\ -$	$\begin{array}{r}442\\358\\\hline\end{array}\ -$	$\begin{array}{r}804\\431\\\hline\end{array}\ -$	$\begin{array}{r}272\\39\\\hline\end{array}\ -$
2.36	2.37	2.38	2.39
$\begin{array}{r}603\\286\\\hline\end{array}\ -$	$\begin{array}{r}400\\372\\\hline\end{array}\ -$	$\begin{array}{r}840\\531\\\hline\end{array}\ -$	$\begin{array}{r}972\\839\\\hline\end{array}\ -$
2.40	2.41	2.42	2.43
$\begin{array}{r}6103\\1289\\\hline\end{array}\ -$	$\begin{array}{r}6004\\5729\\\hline\end{array}\ -$	$\begin{array}{r}5440\\5333\\\hline\end{array}\ -$	$\begin{array}{r}1972\\1869\\\hline\end{array}\ -$
2.44	2.45	2.46	2.47
$\begin{array}{r}16103\\89\\\hline\end{array}\ -$	$\begin{array}{r}85404\\15737\\\hline\end{array}\ -$	$\begin{array}{r}15440\\453\\\hline\end{array}\ -$	$\begin{array}{r}91720\\1869\\\hline\end{array}\ -$

Aftrekken onder elkaar

Het volgende rekenrecept gaat over het van elkaar aftrekken van twee getallen door ze onder elkaar te zetten. Hier is een voorbeeld. Het gaat in vier stappen.

$$\begin{array}{r} 4375 \\ 1242 \\ \hline 3 \end{array}\,- \qquad \begin{array}{r} 4375 \\ 1242 \\ \hline 33 \end{array}\,- \qquad \begin{array}{r} 4375 \\ 1242 \\ \hline 133 \end{array}\,- \qquad \begin{array}{r} 4375 \\ 1242 \\ \hline 3133 \end{array}\,-$$

Je werkt dus weer eerst de eenheden, dan de tientallen, dan de honderdtallen en dan de duizendtallen af. In dit geval hoefde je nergens iets te 'kopen'. In alle kolommen was het bovenste cijfer groter dan het onderste. Maar hieronder is dat niet meer zo:

$$\begin{array}{r} \\ 4325 \\ 1242 \\ \hline 3 \end{array}\,- \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 4\cancel{3}25 \\ 1242 \\ \hline 83 \end{array}\,- \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 4\cancel{3}25 \\ 1242 \\ \hline 083 \end{array}\,- \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 4\cancel{3}25 \\ 1242 \\ \hline 3083 \end{array}\,-$$

Bij de tweede stap moesten we een 1 kopen want 2 is kleiner dan 4. De 3 links van de 2 hebben we daarom in 2 veranderd, en onder de streep schreven we 8 (als uitkomst van $12 - 4$). De laatste twee stappen gingen weer zonder problemen.

Wat moet je doen als het cijfer waar je van moet kopen een 0 is? Gewoon een deurtje verder gaan! Maar die 0 dan wel in een 9 veranderen. Hieronder zie je een voorbeeld. Daarin hebben we bij de tweede stap een 1 gekocht van 40, en dus 40 in 39 veranderd.

$$\begin{array}{r} \\ 4025 \\ 1242 \\ \hline 3 \end{array}\,- \qquad \begin{array}{r} 39 \\ \cancel{4}\cancel{0}25 \\ 1242 \\ \hline 83 \end{array}\,- \qquad \begin{array}{r} 39 \\ \cancel{4}\cancel{0}25 \\ 1242 \\ \hline 783 \end{array}\,- \qquad \begin{array}{r} 39 \\ \cancel{4}\cancel{0}25 \\ 1242 \\ \hline 2783 \end{array}\,-$$

Controleer je antwoord!
Bij aftrekken onder elkaar kun je je antwoord altijd snel controleren door van onder naar boven de omgekeerde optelsom uit te voeren. Hierboven hadden we de aftreksom $4025 - 1242 = 2783$ uitgerekend. Als dat goed is, moet gelden dat $2783 + 1242 = 4025$, en dat kun je in hetzelfde plaatje van onder naar boven door optellen controleren:

$$+\uparrow\ \begin{array}{r} 4025 \\ 1242 \\ \hline 2783 \end{array}\,-$$

Maak de volgende opgaven zonder de hulpcijfers erbij te schrijven.

2.48	2.49	2.50	2.51
205	479	650	952
173 −	97 −	78 −	859 −

2.52	2.53	2.54	2.55
105	804	651	917
88 −	737 −	453 −	869 −

2.56	2.57	2.58	2.59
15207	73484	18900	95681
3389 −	55557 −	14553 −	81169 −

2.60

a. $73 - 20 - 7 - 15 - 17 - 12 =$
b. $98 - 14 - 16 - 10 - 19 - 21 =$
c. $84 - 18 - 16 - 12 - 11 - 15 =$
d. $87 - 13 - 11 - 9 - 5 - 24 =$
e. $477 - 79 - 52 - 33 - 80 - 78 =$

2.61

a. $514 - 27 - 103 - 57 - 72 - 111 =$
b. $673 - 143 - 165 - 109 - 147 - 41 =$
c. $970 - 196 - 76 - 59 - 225 - 188 =$
d. $685 - 34 - 137 - 77 - 56 - 144 =$
e. $898 - 327 - 78 - 62 - 190 - 94 =$

Opschrijven of onthouden?

In de vorige paragraaf hebben we geleerd hoe je twee getallen van elkaar aftrekt door ze onder elkaar te schrijven. Bij die methode komt het vaak voor dat je een 1 moet 'kopen'. Je kunt dat met hulpcijfers erbij schrijven, zoals we dat ook hebben geoefend, maar natuurlijk zullen ervaren rekenaars alle tussenstapjes, inclusief het kopen, uit het hoofd uitvoeren en dus ook geen cijfers doorstrepen of er hulpcijfers boven zetten. Maar het is wel goed als je dat in het begin wél doet, gewoon om te oefenen en daarbij goed te begrijpen wat je aan het doen bent. In de opgaven op de linkerpagina vragen we je om dat nu niet meer te doen.

Meer getallen aftrekken

Er is nog iets dat we moeten zeggen. Je ziet dat we een recept hebben gegeven om één getal van een (groter) getal af te trekken. Maar wat te doen als je meer dan één getal van een groter getal moet aftrekken? Het is niet handig om dan alles in één rijtje onder elkaar te doen, want dan wordt het met al het kopen en alle hulpcijfers al snel een chaos.

Je kunt het natuurlijk wel *stap voor stap* doen, telkens één getal eraf, maar het handigste is het om alle getallen die je moet aftrekken eerst apart bij elkaar te nemen. Zet ze onder elkaar, tel ze bij elkaar op en trek daarna de uitkomst van die som in één keer van het grote getal af.

Hier is een voorbeeld. Stel dat de opgave luidt:

$$374 - 121 - 85 - 76 - 13 - 51 =$$

Dat kun je in vijf stappen doen: eerst 121 aftrekken van 374, daarna 85 van de uitkomst aftrekken, daarvan weer 76 enzovoort. Maar je kunt ook eerst $121 + 85 + 76 + 13 + 51$ uitrekenen (met een optelling onder elkaar) en de uitkomst (dat is 346) aftrekken van 374. Dat werkt veel beter en je maakt ook niet zo snel fouten. We herschrijven de opgave daarom als

$$374 - (121 + 85 + 76 + 13 + 51) =$$

Met haakjes geven we altijd aan dat er dingen bij elkaar horen. Hier is dat $121 + 85 + 76 + 13 + 51$. De uitkomst is 346 (reken maar na!). Die trekken we af van 374 en we krijgen $374 - 346 = 28$ als uitkomst van de hele opgave.

3 Vermenigvuldigen

Oefen de volgende opgaven net zo lang totdat je al dit soort sommen vlot en zonder aarzelen, als het ware op de automatische piloot, kunt maken. Je zult merken dat er 'makkelijke' sommen bij zijn en 'moeilijke'. Zorg dat je ook de moeilijke opgaven allemaal paraat hebt!

3.1
- a. $2 \times 5 =$
- b. $7 \times 1 =$
- c. $0 \times 5 =$
- d. $4 \times 4 =$
- e. $9 \times 2 =$

3.2
- a. $2 \times 8 =$
- b. $5 \times 6 =$
- c. $1 \times 9 =$
- d. $6 \times 2 =$
- e. $0 \times 5 =$

3.3
- a. $2 \times 2 =$
- b. $6 \times 1 =$
- c. $7 \times 7 =$
- d. $5 \times 5 =$
- e. $3 \times 3 =$

3.4
- a. $2 \times 2 =$
- b. $7 \times 3 =$
- c. $6 \times 6 =$
- d. $8 \times 8 =$
- e. $9 \times 9 =$

3.5
- a. $5 \times 8 =$
- b. $3 \times 5 =$
- c. $1 \times 7 =$
- d. $3 \times 9 =$
- e. $4 \times 5 =$

3.6
- a. $5 \times 8 =$
- b. $6 \times 4 =$
- c. $2 \times 7 =$
- d. $9 \times 4 =$
- e. $2 \times 8 =$

3.7
- a. $4 \times 7 =$
- b. $6 \times 3 =$
- c. $8 \times 9 =$
- d. $6 \times 4 =$
- e. $9 \times 7 =$

3.8
- a. $8 \times 7 =$
- b. $5 \times 6 =$
- c. $3 \times 5 =$
- d. $0 \times 9 =$
- e. $7 \times 6 =$

3.9
- a. $8 \times 3 =$
- b. $7 \times 4 =$
- c. $9 \times 0 =$
- d. $1 \times 7 =$
- e. $6 \times 8 =$

3.10
- a. $3 \times 4 =$
- b. $4 \times 5 =$
- c. $5 \times 6 =$
- d. $6 \times 7 =$
- e. $7 \times 8 =$

3.11
- a. $8 \times 9 =$
- b. $4 \times 9 =$
- c. $9 \times 1 =$
- d. $6 \times 0 =$
- e. $7 \times 9 =$

3.12
- a. $0 \times 0 =$
- b. $5 \times 9 =$
- c. $7 \times 8 =$
- d. $3 \times 6 =$
- e. $7 \times 8 =$

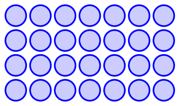
3.13
- a. $2 \times 8 =$
- b. $7 \times 3 =$
- c. $6 \times 9 =$
- d. $4 \times 6 =$
- e. $9 \times 8 =$

3.14
- a. $4 \times 8 =$
- b. $3 \times 7 =$
- c. $1 \times 1 =$
- d. $8 \times 8 =$
- e. $4 \times 8 =$

3.15
- a. $2 \times 7 =$
- b. $5 \times 9 =$
- c. $7 \times 6 =$
- d. $9 \times 5 =$
- e. $3 \times 9 =$

De vermenigvuldigtabel

Dit hoofdstuk gaat over vermenigvuldigsommen zoals $4 \times 7 = 28$. Wat betekent dat eigenlijk, 4×7? Dat zie je hieronder. Als je vier rijtjes van zeven ballen onder elkaar zet, heb je samen vier maal zeven, dat is achtentwintig ballen, tel maar na.



In de tabel hieronder staan alle uitkomsten van vermenigvuldigsommen met getallen tot en met 10. Je vindt bijvoorbeeld op het kruispunt van rij 4 en kolom 7 de uitkomst 28 van 4×7, dat wil zeggen $4 \times 7 = 28$. Het teken '$\times$' heet het *maalteken*. We zeggen *vier maal zeven is achtentwintig*. Soms wordt ook *'keer'* in plaats van *'maal'* gebruikt. De uitkomst van een vermenigvuldiging wordt het *product* genoemd.

$\times$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Bij vermenigvuldigen doet de volgorde er niet toe: $4 \times 7 = 7 \times 4$ want vier rijtjes van zeven ballen is samen evenveel als zeven rijtjes van vier ballen. In de tabel zie je verder dat $7 \times 0 = 0$. Is dat gek? Helemaal niet: zeven maal niks blijft niks. Zo zijn er nog veel meer 'makkelijke' uitkomsten in de tabel. Bijvoorbeeld $8 \times 1 = 8$ of $3 \times 10 = 30$. Maar er zijn ook lastige sommen zoals $7 \times 8 = 56$.

Je moet alle uitkomsten uit de tabel uit je hoofd kennen. Leer ze rij voor rij, dat gaat het makkelijkste, en blijf ze oefenen! Begin met de makkelijkste: de rijen 0, 1 en 10. Ook de rijen 2 en 5 zijn niet moeilijk. En rij 9 heeft een mooie eigenschap: de twee cijfers van elk getal zijn samen altijd 9. Dat maakt het makkelijk om die rij te onthouden.

Leer elke rij eerst van links naar rechts en dan door elkaar. Oefen daarna alle sommen van alle rijen door elkaar net zo lang totdat je ze haast zonder nadenken kunt maken.

3.16
a. $6 \times 10 =$
b. $7 \times 0 =$
c. $9 \times 100 =$
d. $1 \times 1000 =$
e. $10 \times 10 =$

3.17
a. $3 \times 200 =$
b. $0 \times 400 =$
c. $8 \times 40 =$
d. $7 \times 30 =$
e. $5 \times 90 =$

3.18
a. $80 \times 30 =$
b. $70 \times 80 =$
c. $80 \times 50 =$
d. $10 \times 100 =$
e. $50 \times 20 =$

3.19
a. $500 \times 3 =$
b. $50 \times 30 =$
c. $40 \times 100 =$
d. $20 \times 80 =$
e. $70 \times 50 =$

3.20
a. $6 \times 20 =$
b. $0 \times 444 =$
c. $1 \times 650 =$
d. $700 \times 20 =$
e. $30 \times 30 =$

3.21
a. $80 \times 40 =$
b. $300 \times 6 =$
c. $400 \times 40 =$
d. $50 \times 200 =$
e. $90 \times 100 =$

3.22
a. $4 \times 12 =$
b. $3 \times 13 =$
c. $2 \times 15 =$
d. $1 \times 14 =$
e. $5 \times 11 =$

3.23
a. $16 \times 3 =$
b. $10 \times 4 =$
c. $13 \times 5 =$
d. $17 \times 2 =$
e. $18 \times 4 =$

3.24
a. $8 \times 11 =$
b. $3 \times 16 =$
c. $4 \times 14 =$
d. $5 \times 17 =$
e. $6 \times 11 =$

3.25
a. $15 \times 5 =$
b. $13 \times 7 =$
c. $12 \times 5 =$
d. $11 \times 4 =$
e. $17 \times 3 =$

3.26
a. $6 \times 13 =$
b. $0 \times 14 =$
c. $3 \times 19 =$
d. $7 \times 12 =$
e. $4 \times 14 =$

3.27
a. $8 \times 12 =$
b. $6 \times 16 =$
c. $4 \times 18 =$
d. $5 \times 18 =$
e. $2 \times 17 =$

3.28
a. $4 \times 21 =$
b. $3 \times 32 =$
c. $2 \times 49 =$
d. $3 \times 19 =$
e. $2 \times 27 =$

3.29
a. $26 \times 3 =$
b. $20 \times 4 =$
c. $31 \times 3 =$
d. $27 \times 2 =$
e. $32 \times 4 =$

3.30
a. $8 \times 12 =$
b. $2 \times 47 =$
c. $4 \times 23 =$
d. $2 \times 49 =$
e. $6 \times 13 =$

3.31
a. $4 \times 27 =$
b. $3 \times 33 =$
c. $2 \times 54 =$
d. $5 \times 21 =$
e. $2 \times 62 =$

3.32
a. $62 \times 3 =$
b. $30 \times 4 =$
c. $27 \times 5 =$
d. $72 \times 2 =$
e. $39 \times 4 =$

3.33
a. $8 \times 23 =$
b. $3 \times 64 =$
c. $4 \times 45 =$
d. $5 \times 19 =$
e. $6 \times 28 =$

Makkelijke vermenigvuldigsommen

De makkelijkste vermenigvuldigsommen zijn vermenigvuldigingen met 0 of met 1. Bijvoorbeeld $0 \times 28 = 0$, $28 \times 0 = 0$ en $1 \times 28 = 28$, $28 \times 1 = 28$. Kortom:

$$\text{`iets'} \times 0 = 0, \qquad 0 \times \text{`iets'} = 0$$

$$\text{`iets'} \times 1 = \text{`iets'}, \qquad 1 \times \text{`iets'} = \text{`iets'}$$

Ook makkelijk zijn vermenigvuldigingen met 10, bijvoorbeeld $28 \times 10 = 280$. Je moet er dus gewoon een 0 achter zetten. Iets dergelijks geldt ook voor vermenigvuldigingen met honderd: $28 \times 100 = 2800$. Of voor vermenigvuldigen met duizend: $28 \times 1000 = 28000$. Samengevat:

vermenigvuldigen met 10 *doe je door* 0 *achter het getal te zetten,*

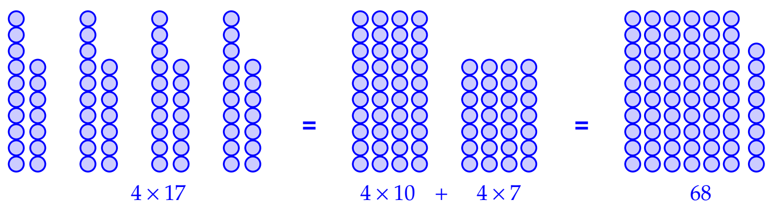
vermenigvuldigen met 100 *doe je door* 00 *achter het getal te zetten,*

vermenigvuldigen met 1000 *doe je door* 000 *achter het getal te zetten.*

Als je dit eenmaal weet, kun je ook sommen als 3×40 maken: $3 \times 40 = 120$. Drie rijtjes van 40 ballen is samen 120 ballen. En net zo: $3 \times 400 = 1200$. En $30 \times 40 = 1200$. Telkens dus gewoon $3 \times 4 = 12$ nemen en er het juiste aantal nullen achter zetten. Maar let op, dat gaat anders dan bij optellen. Daar was $30 + 40 = 70$. Maar hier is $30 \times 40 = 1200$ want dertig rijtjes van veertig ballen is samen twaalfhonderd ballen! We maken er maar geen plaatje bij . . .

Iets moeilijkere vermenigvuldigsommen

We weten nu hoe je twee getallen van één cijfer met elkaar vermenigvuldigt en hoe je getallen vermenigvuldigt met 10, 100 of 1000. Nu kijken we naar vermenigvuldigsommen als 4×17. Hoe pakken we die aan?



Omdat zeventien gelijk is aan tien plus zeven, is vier maal zeventien hetzelfde als vier maal tien plus vier maal zeven. Je ziet het hierboven in een plaatje met balletjes. We weten al dat $4 \times 10 = 40$ en dat $4 \times 7 = 28$, dus $4 \times 17 = (4 \times 10) + (4 \times 7) = 40 + 28 = 68$. Op precies dezelfde manier kun je allerlei soortgelijke opgaven maken. Op de linker bladzijde vind je weer een overvloed aan oefenmateriaal. Maak er gebruik van!

3.34
a. $4 \times 3 \times 2 =$
b. $6 \times 2 \times 3 =$
c. $5 \times 5 \times 3 =$
d. $6 \times 1 \times 4 =$
e. $3 \times 5 \times 3 =$

3.35
a. $8 \times 3 \times 3 =$
b. $6 \times 5 \times 2 =$
c. $4 \times 5 \times 4 =$
d. $6 \times 6 \times 2 =$
e. $2 \times 9 \times 3 =$

3.36
a. $9 \times 1 \times 8 =$
b. $6 \times 0 \times 3 =$
c. $7 \times 7 \times 2 =$
d. $9 \times 4 \times 2 =$
e. $6 \times 3 \times 3 =$

3.37
a. $1 \times 1 \times 1 =$
b. $2 \times 2 \times 2 =$
c. $3 \times 3 \times 3 =$
d. $4 \times 4 \times 4 =$
e. $5 \times 5 \times 5 =$

3.38
a. $3 \times 11 \times 2 =$
b. $12 \times 2 \times 4 =$
c. $3 \times 5 \times 10 =$
d. $6 \times 12 \times 0 =$
e. $11 \times 9 \times 2 =$

3.39
a. $19 \times 1 \times 5 =$
b. $6 \times 20 \times 3 =$
c. $7 \times 10 \times 3 =$
d. $21 \times 3 \times 2 =$
e. $4 \times 13 \times 3 =$

3.40
a. $4 \times 3 \times 2 \times 3 =$
b. $6 \times 2 \times 2 \times 4 =$
c. $4 \times 5 \times 3 \times 3 =$
d. $6 \times 1 \times 9 \times 1 =$
e. $5 \times 5 \times 3 \times 2 =$

3.41
a. $3 \times 3 \times 2 \times 5 =$
b. $5 \times 2 \times 4 \times 4 =$
c. $4 \times 5 \times 3 \times 3 =$
d. $4 \times 0 \times 8 \times 1 =$
e. $5 \times 6 \times 2 \times 2 =$

3.42
a. $2 \times 2 \times 2 \times 2 =$
b. $3 \times 3 \times 3 \times 3 =$
c. $4 \times 4 \times 4 \times 4 =$
d. $5 \times 5 \times 5 \times 5 =$
e. $6 \times 6 \times 6 \times 6 =$

3.43 Welk van de volgende getallen is even?
a. 4087
b. 845
c. 0
d. 1000
e. 123

3.44 Welk van de volgende getallen is een vijfvoud?
a. 1875
b. 800
c. 0
d. 5551
e. 5005

3.45 Welk van de volgende getallen is een zevenvoud?
a. 77
b. 63
c. 90
d. 0
e. 84

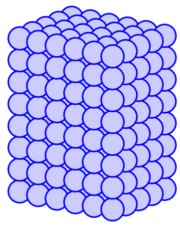
3.46 Welk van de volgende getallen is een negenvoud?
a. 72
b. 97
c. 54
d. 67
e. 100

Vermenigvuldigen van meer dan twee getallen

Links zie je oefenopgaven voor vermenigvuldigingen zoals $5 \times 6 \times 8$. Je kunt ze gewoon achter elkaar uitvoeren: eerst $5 \times 6 = 30$ en de uitkomst dan maal 8. Met haakjes kun je het als volgt aangeven:

$$5 \times 6 \times 8 = (5 \times 6) \times 8 = 30 \times 8 = 240$$

Hieronder zie je er een plaatje bij. Er zijn 8 lagen balletjes in te zien, waarbij elke laag uit $5 \times 6 = 30$ balletjes bestaat. Tel maar na! In totaal zijn er dus $30 \times 8 = 240$ balletjes.



Je ziet ook weer dat de volgorde er niet toe doet: je had bijvoorbeeld ook $(8 \times 5) \times 6 = 40 \times 6 = 240$ uit kunnen rekenen; de uitkomst is hetzelfde. En natuurlijk kun je op zo'n manier ook meer dan drie getallen met elkaar vermenigvuldigen, bijvoorbeeld $4 \times 9 \times 2 \times 3 = 36 \times 2 \times 3 = 72 \times 3 = 216$. Alleen kun je er dan niet meer zo'n plaatje met balletjes bij tekenen.

Veelvouden

In het vervolg zullen we vaak spreken over de *veelvouden* van een getal, bijvoorbeeld de veelvouden van 5. Daarmee bedoelen we de getallen $0 \times 5 = 0$, $1 \times 5 = 5$, $2 \times 5 = 10$, $3 \times 5 = 15$, $4 \times 5 = 20$, $5 \times 5 = 25$, $6 \times 5 = 30$ enzovoort. In de vermenigvuldigingstabel van bladzijde 29 staan ze in rij nummer 5 naast elkaar (en natuurlijk staan ze ook in kolom nummer 5 onder elkaar). Die tabel gaat niet verder dan 10×5, maar je kunt natuurlijk net zo ver doorgaan als je wilt: $11 \times 5 = 55$, $12 \times 5 = 60$ enzovoort. Aan de rij van alle veelvouden van 5 komt nooit een einde.

De veelvouden van 5 noemen we de *vijfvouden*, de veelvouden van 7 noemen we de *zevenvouden* enzovoort. De veelvouden van een getal hebben vaak opvallende eigenschappen. In de tabel op bladzijde 29 heb je er vast wel een paar opgemerkt. Bijvoorbeeld dat de veelvouden van 2 (de tweevouden) precies de getallen zijn die op 0, 2, 4, 6 of 8 eindigen. Ze heten de *even* getallen. De getallen die geen tweevoud zijn, heten de *oneven* getallen. Die eindigen altijd op 1, 3, 5, 7 of 9. En de vijfvouden zijn precies de getallen die eindigen op 5 of 0. Later zullen we nog meer van dit soort regelmatigheden op het spoor komen.

3.47
$$\begin{array}{r} 13 \\ 4 \\ \hline \end{array} \times$$

3.48
$$\begin{array}{r} 14 \\ 5 \\ \hline \end{array} \times$$

3.49
$$\begin{array}{r} 14 \\ 7 \\ \hline \end{array} \times$$

3.50
$$\begin{array}{r} 18 \\ 9 \\ \hline \end{array} \times$$

3.51
$$\begin{array}{r} 17 \\ 6 \\ \hline \end{array} \times$$

3.52
$$\begin{array}{r} 13 \\ 9 \\ \hline \end{array} \times$$

3.53
$$\begin{array}{r} 18 \\ 6 \\ \hline \end{array} \times$$

3.54
$$\begin{array}{r} 15 \\ 4 \\ \hline \end{array} \times$$

3.55
$$\begin{array}{r} 23 \\ 7 \\ \hline \end{array} \times$$

3.56
$$\begin{array}{r} 36 \\ 4 \\ \hline \end{array} \times$$

3.57
$$\begin{array}{r} 28 \\ 3 \\ \hline \end{array} \times$$

3.58
$$\begin{array}{r} 45 \\ 8 \\ \hline \end{array} \times$$

3.59
$$\begin{array}{r} 87 \\ 3 \\ \hline \end{array} \times$$

3.60
$$\begin{array}{r} 37 \\ 6 \\ \hline \end{array} \times$$

3.61
$$\begin{array}{r} 82 \\ 5 \\ \hline \end{array} \times$$

3.62
$$\begin{array}{r} 55 \\ 5 \\ \hline \end{array} \times$$

3.63
$$\begin{array}{r} 85 \\ 13 \\ \hline \end{array} \times$$

3.64
$$\begin{array}{r} 57 \\ 61 \\ \hline \end{array} \times$$

3.65
$$\begin{array}{r} 25 \\ 52 \\ \hline \end{array} \times$$

3.66
$$\begin{array}{r} 69 \\ 59 \\ \hline \end{array} \times$$

3.67
$$\begin{array}{r} 173 \\ 32 \\ \hline \end{array} \times$$

3.68
$$\begin{array}{r} 547 \\ 16 \\ \hline \end{array} \times$$

3.69
$$\begin{array}{r} 822 \\ 75 \\ \hline \end{array} \times$$

3.70
$$\begin{array}{r} 205 \\ 51 \\ \hline \end{array} \times$$

3.71
$$\begin{array}{r} 173 \\ 23 \\ \hline \end{array} \times$$

3.72
$$\begin{array}{r} 343 \\ 126 \\ \hline \end{array} \times$$

3.73
$$\begin{array}{r} 572 \\ 715 \\ \hline \end{array} \times$$

3.74
$$\begin{array}{r} 225 \\ 431 \\ \hline \end{array} \times$$

3.75
$$\begin{array}{r} 1189 \\ 371 \\ \hline \end{array} \times$$

3.76
$$\begin{array}{r} 3117 \\ 1156 \\ \hline \end{array} \times$$

3.77
$$\begin{array}{r} 5872 \\ 435 \\ \hline \end{array} \times$$

3.78
$$\begin{array}{r} 3470 \\ 1131 \\ \hline \end{array} \times$$

Vermenigvuldigen onder elkaar

Als je 4×963 moet uitrekenen, kun je dat in drie stappen doen: $4 \times 3 = 12$, $4 \times 60 = 240$, $4 \times 900 = 3600$. Alles bij elkaar optellen: $12 + 240 + 3600 = 3852$. Je kunt dat in één keer kortsluiten:

$$\begin{array}{rl} 963 & \\ 4 & \\ \hline 2 & \times \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 963 & \\ 4 & \\ \hline 52 & \times \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 963 & \\ 4 & \\ \hline 3852 & \times \end{array}$$

Toelichting:

$$\begin{array}{llll} 4 \times 3 = 12, & 2 \text{ opschrijven}, & \boxed{1} \text{ onthouden}, & \\ 4 \times 6 = 24, & 24 + \boxed{1} = 25, & 5 \text{ opschrijven}, & \boxed{2} \text{ onthouden}, \\ 4 \times 9 = 36, & 36 + \boxed{2} = 38, & \text{klaar.} & \end{array}$$

Op zo'n manier lukt het altijd om een getal te vermenigvuldigen met een getal van één cijfer. Bij vermenigvuldigen met een getal van twee cijfers, bijvoorbeeld 74×1253, doe je het in twee stappen: $4 \times 1253 = 5012$ (controleer dit zelf op de bovenstaande wijze!) en $70 \times 1253 = 87710$ (ook zelf controleren!). Samen dus $5012 + 87710 = 92722$, zie hieronder.

$$\begin{array}{rlcr} 1253 & & & \\ 74 & \times & & \\ \hline 5012 & & \longleftarrow & 4 \times 1253 \\ 87710 & + & \longleftarrow & 70 \times 1253 \\ \hline 92722 & & \longleftarrow & 74 \times 1253 \end{array}$$

Vermenigvuldigen met getallen van meer dan twee cijfers gaat net zo. We geven hieronder nog een voorbeeld. Bij alle tussenresultaten is rechts aangegeven hoe ze berekend zijn (met de methode die boven aan deze bladzijde staat). In de praktijk schrijf je dat natuurlijk niet allemaal uit. Dan werk je alleen met wat er links staat. Let daarbij wel op de 'slotnullen' die grijs gemaakt zijn: in het middenstuk met tussenberekeningen staat op de tweede rij één slotnul (want je vermenigvuldigt met een tiental), op de derde rij staan er twee (want je vermenigvuldigt met een honderdtal) enzovoort.

$$\begin{array}{rlcr} 6048 & & & \\ 1227 & \times & & \\ \hline 42336 & & \longleftarrow & 7 \times 6048 \\ 120960 & & \longleftarrow & 20 \times 6048 \\ 1209600 & & \longleftarrow & 200 \times 6048 \\ 6048000 & + & \longleftarrow & 1000 \times 6048 \\ \hline 7420896 & & \longleftarrow & 1227 \times 6048 \end{array}$$

3.79
$$\begin{array}{r} 146 \\ 24 \\ \hline \end{array} \times$$

3.80
$$\begin{array}{r} 356 \\ 261 \\ \hline \end{array} \times$$

3.81
$$\begin{array}{r} 245 \\ 115 \\ \hline \end{array} \times$$

3.82
$$\begin{array}{r} 546 \\ 349 \\ \hline \end{array} \times$$

3.83
$$\begin{array}{r} 493 \\ 320 \\ \hline \end{array} \times$$

3.84
$$\begin{array}{r} 355 \\ 206 \\ \hline \end{array} \times$$

3.85
$$\begin{array}{r} 450 \\ 705 \\ \hline \end{array} \times$$

3.86
$$\begin{array}{r} 169 \\ 403 \\ \hline \end{array} \times$$

3.87
$$\begin{array}{r} 1189 \\ 301 \\ \hline \end{array} \times$$

3.88
$$\begin{array}{r} 3561 \\ 1006 \\ \hline \end{array} \times$$

3.89
$$\begin{array}{r} 1772 \\ 4300 \\ \hline \end{array} \times$$

3.90
$$\begin{array}{r} 4070 \\ 1030 \\ \hline \end{array} \times$$

3.91
$$\begin{array}{r} 4581 \\ 7111 \\ \hline \end{array} \times$$

3.92
$$\begin{array}{r} 5628 \\ 6060 \\ \hline \end{array} \times$$

3.93
$$\begin{array}{r} 1888 \\ 1408 \\ \hline \end{array} \times$$

3.94
$$\begin{array}{r} 4110 \\ 3103 \\ \hline \end{array} \times$$

3.95
$$\begin{array}{r} 34081 \\ 1313 \\ \hline \end{array} \times$$

3.96
$$\begin{array}{r} 15529 \\ 1067 \\ \hline \end{array} \times$$

3.97
$$\begin{array}{r} 81871 \\ 90302 \\ \hline \end{array} \times$$

3.98
$$\begin{array}{r} 47112 \\ 30111 \\ \hline \end{array} \times$$

Meer voorbeelden

We geven hieronder nog meer voorbeelden van vermenigvuldigingen. Controleer ze zelf. Let daarbij ook op de slotnullen in de tussenresultaten. Ervaren rekenaars schrijven ze meestal niet op, maar laten die plaatsen gewoon open. Dan moet je echter heel nauwkeurig werken. Het is dus goed om de slotnullen wél op te schrijven als je het vak nog moet leren!

$$\begin{array}{rl} 1692 & \\ 274 & \times \\ \hline 6768 & \\ 118440 & \\ 338400 & + \\ \hline 463608 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 7205 & \\ 423 & \times \\ \hline 21615 & \\ 144100 & \\ 2882000 & + \\ \hline 3047715 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 3178 & \\ 4912 & \times \\ \hline 6356 & \\ 31780 & \\ 2860200 & \\ 12712000 & + \\ \hline 15610336 & \end{array}$$

Wanneer in het getal waarmee je vermenigvuldigt een 0 voorkomt, wordt de bijbehorende rij ook nul:

$$\begin{array}{rl} 5831 & \\ 703 & \times \\ \hline 17493 & \\ 00 & \\ 4081700 & + \\ \hline 4099193 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 78359 & \\ 40603 & \times \\ \hline 235077 & \\ 00 & \\ 47015400 & \\ 0000 & \\ 3134360000 & + \\ \hline 3181610477 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 29532 & \\ 4003 & \times \\ \hline 88596 & \\ 00 & \\ 000 & \\ 118128000 & + \\ \hline 118216596 & \end{array}$$

Natuurlijk schrijf je dat niet zo op: je laat de nullenrijen gewoon weg. Maar let er dan wel op dat je in de volgende regel een of meer extra slotnullen moet invoegen! Hieronder zie je hoe dat gaat.

$$\begin{array}{rl} 5831 & \\ 703 & \times \\ \hline 17493 & \\ 4081700 & + \\ \hline 4099193 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 78359 & \\ 40603 & \times \\ \hline 235077 & \\ 47015400 & \\ 3134360000 & + \\ \hline 3181610477 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 29532 & \\ 4003 & \times \\ \hline 88596 & \\ 118128000 & + \\ \hline 118216596 & \end{array}$$

4 Delen met rest

De volgende delingen gaan allemaal op. Reken ze uit.

4.1
a. $14 : 7 =$
b. $15 : 3 =$
c. $40 : 5 =$
d. $24 : 4 =$
e. $18 : 2 =$

4.2
a. $28 : 7 =$
b. $54 : 6 =$
c. $35 : 5 =$
d. $45 : 9 =$
e. $56 : 8 =$

4.3
a. $40 : 4 =$
b. $48 : 6 =$
c. $9 : 3 =$
d. $15 : 5 =$
e. $18 : 3 =$

4.4
a. $24 : 4 =$
b. $35 : 5 =$
c. $36 : 6 =$
d. $56 : 7 =$
e. $48 : 8 =$

4.5
a. $28 : 7 =$
b. $63 : 9 =$
c. $18 : 6 =$
d. $27 : 9 =$
e. $56 : 8 =$

4.6
a. $24 : 3 =$
b. $45 : 5 =$
c. $16 : 8 =$
d. $16 : 2 =$
e. $72 : 8 =$

De volgende delingen gaan niet allemaal op. Geef nu steeds het quotiënt en de rest volgens het voorbeeld $13 : 5 = 2$ *rest* 3, ook wanneer de rest 0 is.

4.7
a. $12 : 5 =$
b. $17 : 3 =$
c. $16 : 5 =$
d. $14 : 4 =$
e. $19 : 5 =$

4.8
a. $29 : 8 =$
b. $33 : 7 =$
c. $21 : 9 =$
d. $46 : 8 =$
e. $24 : 5 =$

4.9
a. $42 : 7 =$
b. $36 : 9 =$
c. $27 : 6 =$
d. $29 : 5 =$
e. $33 : 8 =$

4.10
a. $23 : 8 =$
b. $37 : 7 =$
c. $26 : 5 =$
d. $28 : 3 =$
e. $49 : 7 =$

4.11
a. $58 : 8 =$
b. $73 : 7 =$
c. $39 : 9 =$
d. $48 : 8 =$
e. $34 : 5 =$

4.12
a. $46 : 4 =$
b. $86 : 9 =$
c. $47 : 6 =$
d. $38 : 7 =$
e. $52 : 8 =$

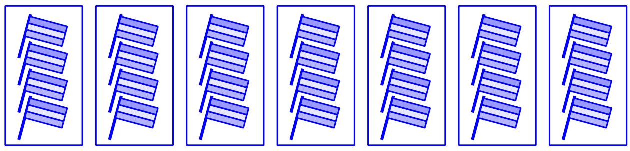
4.13
a. $72 : 7 =$
b. $47 : 4 =$
c. $66 : 6 =$
d. $44 : 5 =$
e. $79 : 8 =$

4.14
a. $24 : 7 =$
b. $63 : 8 =$
c. $51 : 6 =$
d. $43 : 8 =$
e. $94 : 9 =$

4.15
a. $52 : 7 =$
b. $46 : 7 =$
c. $37 : 4 =$
d. $72 : 8 =$
e. $22 : 3 =$

Wat is delen met rest?

Als je 28 vlaggetjes eerlijk wilt verdelen onder 7 kinderen, geef je ieder kind 4 vlaggetjes. In rekentaal: $28 : 7 = 4$, spreek uit: 28 *gedeeld door* 7 *is* 4.



Eigenlijk is dit dus een soort omgekeerd vermenigvuldigen, want als ieder kind 4 vlaggetjes heeft gekregen, heb je in totaal $7 \times 4 = 28$ vlaggetjes verdeeld.

Maar wat moet je doen als je 30 vlaggetjes eerlijk onder 7 kinderen wilt verdelen? Dan houd je er 2 over. Ieder kind krijgt nog steeds 4 vlaggetjes, maar er is een *rest* van 2 vlaggetjes. Die zou je kunnen verloten, maar dat hoort niet in de rekenles. Nu schrijven we:

$$30 : 7 = 4 \textit{ rest } 2, \text{ spreek uit: } 30 \textit{ gedeeld door } 7 \textit{ is } 4 \textit{ rest } 2.$$

Dit noemen we *delen met rest*. De rest is altijd kleiner dan het aantal kinderen, want anders kunnen we elk kind nóg een vlaggetje geven. Ook dat is een soort omgekeerd vermenigvuldigen, alleen moet je de rest er nog bij optellen. Het totale aantal van 30 vlaggetjes is nu zeven maal vier (de vlaggetjes die de kinderen hebben gekregen) plus twee (de rest): $(7 \times 4) + 2 = 30$. Hier zijn nog wat voorbeelden.

24 vlaggetjes, 8 kinderen:	$24 : 8 = 3$	want	$24 = 8 \times 3$
30 vlaggetjes, 8 kinderen:	$30 : 8 = 3$ *rest* 6	want	$30 = (8 \times 3) + 6$
20 vlaggetjes, 3 kinderen:	$20 : 3 = 6$ *rest* 2	want	$20 = (3 \times 6) + 2$

Als je de vermenigvuldigingstabel goed kent, kun je zulke eenvoudige delingen makkelijk maken. Maar verderop wordt het moeilijker. Dan worden de aantallen vlaggetjes en kinderen veel groter, en dan gaan we het doen met de beroemde *staartdeling*, een rekenrecept dat altijd snel de uitkomst van een deling geeft.

Eerst spreken we nog drie nieuwe vaktermen af:

Het aantal vlaggetjes heet het *deeltal*.

Het aantal kinderen heet de *deler*.

Hoeveel vlaggetjes elk kind krijgt, heet het *quotiënt*, spreek uit: *kosjent*, met de klemtoon op *sjent*.

Voorbeeld: bij de deling $30 : 7 = 4$ *rest* 2 is 30 het deeltal, 7 de deler en 4 het quotiënt. Als er geen rest is, kun je ook zeggen dat de rest 0 is. *De deling gaat op*, zeggen we dan.

Hieronder zie je een voorbeeld van een eenvoudige staartdeling in twee stappen. Die laat zien dat 493 : 6 = 82 *rest* 1. Een ander, volledig uitgewerkt en toegelicht voorbeeld staat op de rechter bladzijde.

```
6 / 493 \        6 / 493 \ 8        6 / 493 \ 82
                     48                 48
                     --                 --
                      1                  13
                                         12
                                         --
                                          1
```

4.16	4.17	4.18
a. 4 / 391 \	a. 7 / 253 \	a. 9 / 347 \
b. 8 / 733 \	b. 8 / 783 \	b. 4 / 270 \
c. 5 / 443 \	c. 6 / 503 \	c. 3 / 145 \
d. 9 / 592 \	d. 3 / 290 \	d. 7 / 409 \
e. 4 / 356 \	e. 9 / 175 \	e. 8 / 356 \

Hier is nog een voorbeeld. Dat laat zien dat 812 : 5 = 162 *rest* 2. In dit geval moet je aan het begin slechts één cijfer onderstrepen want 8 is al groter dan de deler 5.

```
5 / 812 \      5 / 812 \ 1      5 / 812 \ 16      5 / 812 \ 162
                   5                5                 5
                   -                -                 -
                   3                31                31
                                    30                30
                                    --                --
                                     1                 12
                                                       10
                                                       --
                                                        2
```

4.19	4.20	4.21
a. 5 / 711 \	a. 9 / 1253 \	a. 8 / 3470 \
b. 7 / 907 \	b. 6 / 1993 \	b. 6 / 9272 \
c. 8 / 951 \	c. 4 / 4503 \	c. 3 / 1153 \
d. 3 / 809 \	d. 8 / 9090 \	d. 4 / 3499 \
e. 4 / 656 \	e. 7 / 1856 \	e. 7 / 6655 \

De staartdeling – een eenvoudig voorbeeld

Stel dat we 586 vlaggetjes onder 7 kinderen willen verdelen. Wat is dan het quotiënt en wat is de rest? Door wat proberen kun je daar wel achter komen, maar wij gaan de zaak *systematisch* aanpakken. We leren je een methode, de *staartdeling*, die ook in de meest ingewikkelde gevallen werkt. Dat gaat het beste aan de hand van voorbeelden, en 586 : 7 is ons eerste voorbeeld. De staartdeling is in dit geval een drietrapsraket. We laten hem eerst zien en geven dan een toelichting.

$$\begin{array}{rll} 7\,/ & \underline{58}6 & \backslash \end{array} \qquad \begin{array}{rll} 7\,/ & \underline{58}6 & \backslash\;8 \\ & \underline{56} & \\ & 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{rll} 7\,/ & \underline{586} & \backslash\;83 \leftarrow \text{quotiënt} \\ & \underline{56} & \\ & 26 & \\ & \underline{21} & \\ & 5 & \leftarrow \text{rest} \end{array}$$

In de bovenste regel van de linkerfiguur staat het *deeltal* 586 tussen schuine strepen. Links ervan staat de *deler* 7. Waarom we de eerste twee cijfers van het 586 onderstreept hebben, zullen we nog uitleggen (stap 1 hieronder).

In de volgende figuren wordt naast de rechter schuine streep cijfer voor cijfer het quotiënt opgebouwd. Eerst de 8, en dan de 3. Onder het deeltal groeit stap voor stap de *staart*. In de rechterfiguur is de staartdeling klaar. Rechtsboven staat nu het quotiënt 83 en onder aan de staart staat de *rest* 5.

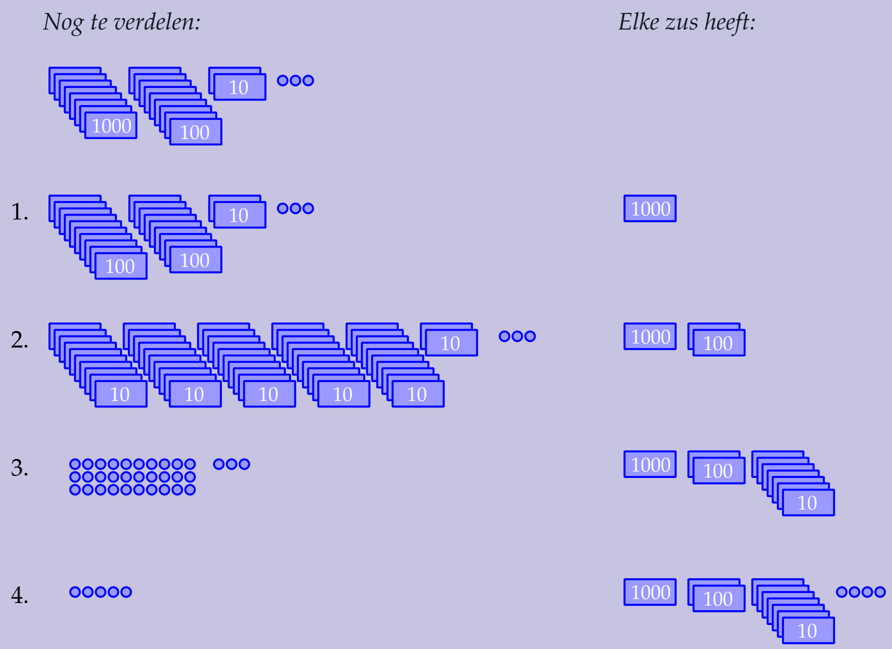
Nu geven we het recept.

1. Onderstreep in het deeltal 586 het kortste beginstuk dat groter dan of gelijk aan de deler 7 is. Hier is dat beginstuk dus 58.
2. Neem het *grootste* veelvoud van de deler 7 dat kleiner dan of gelijk is aan het getal 58. Dat is $8 \times 7 = 56$. Schrijf 8 rechtsboven en schrijf 56 onder de 58. Trek af: $58 - 56 = 2$.
3. Onderstreep het volgende cijfer (hier: 6) van het deeltal en schrijf dit cijfer ook achter de 'tussenrest' 2, zodat je 26 krijgt. Herhaal hiermee stap 2. Nu vind je $3 \times 7 = 21$ als grootste veelvoud van 7 dat kleiner dan of gelijk aan 26 is. Voeg het cijfer 3 toe aan het quotiënt rechtsboven. Trek af: $26 - 21 = 5$. Dit is de rest, en 83 is het quotiënt.

Als alles goed is, zou dat dus betekenen dat $586 : 7 = 83$ *rest* 5. Elk van de 7 kinderen zou dus 83 vlaggetjes moeten krijgen, en dan zou je nog een rest van 5 vlaggetjes over houden. Inderdaad is $(7 \times 83) + 5 = 581 + 5 = 586$, reken maar na!

Bij grotere deeltallen moet je stap 3 vaker herhalen, net zo lang totdat alle cijfers van het deeltal onderstreept zijn.

De verdeling van een erfenis van € 8923,– onder zeven zussen (zie de toelichting op de rechter bladzijde). De totale erfenis bestaat uit 8 briefjes van duizend, 9 van honderd, 2 van tien en 3 losse euro's. De verdeling gaat in vier stappen.



4.22 Het is een goed idee om met zelfgemaakte briefjes van € 1000, € 100 en € 10 en losse fiches als euro's zulke erfenisverdelingen na te spelen. Doe dat met de volgende deelsommen, en maak er ook telkens de bijbehorende staartdelingen bij.

a. 9348 : 8 =
b. 7795 : 5 =
c. 3886 : 9 =
d. 7020 : 6 =
e. 9489 : 7 =

Let op: met opzet werken we *alleen* met briefjes van € 1000, € 100 en € 10. Zou je ook briefjes van € 5, € 20, € 50 of andere briefjes of munten gebruiken, dan klopt het niet meer met de staartdeling, en ons doel is nu juist om die onder de knie te krijgen. Trouwens, briefjes van duizend euro bestaan in het echt niet!

De staartdeling met euro’s uitgelegd

Hier is een voorbeeld om uit te leggen waarom de staartdeling werkt, en vooral ook *hoe* de staartdeling werkt. Stel dat zeven zussen samen een erfenis van € 8923,– eerlijk moeten verdelen. Ze moeten dan dus de deling $8923 : 7$ maken. Het geld zit in een enveloppe: 8 briefjes van 1000 euro, 9 briefjes van 100 euro, 2 briefjes van 10 euro en nog 3 losse euro’s. De jongste zus, die pas staartdelen geleerd heeft, stelt het volgende voor:

1. We verdelen eerst de duizendjes. Omdat $8 : 7 = 1$ *rest* 1 krijgt iedere zus 1 biljet van 1000 euro. De rest, 1 briefje van 1000, wisselen we bij de bank in voor 10 briefjes van 100.
2. We hebben dan in totaal $10 + 9 = 19$ honderdjes. Omdat $19 : 7 = 2$ *rest* 5 krijgt iedere zus 2 biljetten van 100 euro. De rest, 5 briefjes van 100, wisselen we bij de bank in voor 50 briefjes van 10.
3. We hebben dan in totaal $50 + 2 = 52$ tientjes. Omdat $52 : 7 = 7$ *rest* 3 krijgt iedere zus 7 biljetten van 10 euro. De rest, 3 briefjes van 10, wisselen we bij de bank in voor 30 euromunten.
4. We hebben dan in totaal $30 + 3 = 33$ euromunten. Omdat $33 : 7 = 4$ *rest* 5 krijgt iedere zus 4 euromunten. De rest, 5 euro, geven we aan *Amnesty International*.

Dit voorstel werd met algemene stemmen aangenomen, en na afloop had elke zus dus 1 briefje van 1000, 2 briefjes van 100, 7 briefjes van 10 en 4 losse euro’s, dus in totaal 1274 euro. En inderdaad is $8923 : 7 = 1274$ *rest* 5 want je kunt direct controleren dat $(7 \times 1274) + 5 = 8923$, ga maar na.

Op de linker bladzijde zie je de verdeling van de erfenis stap voor stap in beeld gebracht, en hieronder staat de bijbehorende staartdeling. Ga na dat alles precies met elkaar overeenkomt! En laat niemand nu meer beweren dat staartdelen moeilijk te begrijpen is. Maar je moet het natuurlijk wel door oefenen onder de knie krijgen.

7/ 8923 \1	7/ 8923 \12	7/ 8923 \127	7/ 8923 \1274
7	7	7	7
1	19	19	19
	14	14	14
	5	52	52
		49	49
		3	33
			28
			5

Maak de volgende staartdelingen. Neem in een aantal gevallen na afloop ook de proef op de som door je antwoord via een vermenigvuldiging te controleren (zie onder aan de volgende bladzijde).

4.23
a. 12 / 700 \
b. 18 / 972 \
c. 15 / 453 \
d. 19 / 999 \
e. 14 / 656 \

4.24
a. 17 / 1253 \
b. 18 / 1983 \
c. 15 / 4593 \
d. 13 / 9890 \
e. 16 / 1856 \

4.25
a. 19 / 34700 \
b. 14 / 92702 \
c. 13 / 11453 \
d. 17 / 34999 \
e. 18 / 63565 \

4.26
a. 32 / 7005 \
b. 28 / 9072 \
c. 55 / 4531 \
d. 41 / 9990 \
e. 34 / 6560 \

4.27
a. 23 / 5353 \
b. 26 / 9583 \
c. 65 / 4543 \
d. 79 / 9990 \
e. 67 / 1856 \

4.28
a. 48 / 34340 \
b. 26 / 92752 \
c. 33 / 51800 \
d. 52 / 32646 \
e. 69 / 46987 \

Wat er mis kan gaan

Je hebt waarschijnlijk al een paar keer fouten gemaakt, en die hopelijk zelf weer hersteld. Er is eigenlijk maar één mogelijk struikelblok: je moet telkens schatten wat het *grootste* veelvoud is van de deler dat nog kleiner is dan het 'tussendeeltal'. Dat kan lastig zijn.

Als je dat veelvoud te groot neemt, kun je de aftrekking niet maken (linkerfiguur hieronder, 259 is groter dan 247) en als je het te klein neemt, krijg je een verschil dat *groter dan of gelijk aan* de deler is (rechterfiguur, 74 is groter dan 73). Neem in het eerste geval een kleiner veelvoud en in het laatste geval een groter veelvoud. Ook ervaren rekenaars schatten soms wel eens een keertje fout, maar omdat je dit dan direct merkt, kun je de fout ook direct herstellen!

```
37 / 247205 \ 7        73 / 439572 \ 5
     259                    365
     ---                    ---
       ?                     74
```

De staartdeling – een groter voorbeeld

Bij ons volgende voorbeeld is de deler wat groter, namelijk 37. Het gaat om de deling $92845 : 37$. We bouwen de staart weer stap voor stap op en geven daarna bij elke stap een korte toelichting, net als op bladzijde 41.

```
37/ 92845 \2      37/ 92845 \25     37/ 92845 \250    37/ 92845 \2509
    74                74                74                74
    --                --                --                --
    18                188               188               188
                      185               185               185
                      ---               ---               ---
                        3                34                34
                                          0                 0
                                         --                ---
                                         34                345
                                                           333
                                                           ---
                                                            12
```

Toelichting:

1. Onderstreep het kortste beginstuk van het deeltal 92845 dat groter dan of gelijk is aan de deler 37. Dat is 92. Bepaal het grootste veelvoud van 37 dat kleiner dan of gelijk is aan 92. Dat is $74 = 2 \times 37$. Zet de 2 rechtsboven als eerste cijfer van het quotiënt en trek af: $92 - 74 = 18$.
2. Onderstreep het volgende cijfer (hier: 8) in het deeltal 92845 en voeg dit cijfer ook toe aan de 18 onderaan, zodat daar 188 ontstaat. Bepaal het grootste veelvoud van 37 dat kleiner dan of gelijk is aan 188. Dat is het getal $185 = 5 \times 37$. Zet de 5 rechtsboven als tweede cijfer van het quotiënt en trek af: $188 - 185 = 3$.
3. Onderstreep het volgende cijfer (hier: 4) in 92845 en voeg dit cijfer ook toe aan de 3 onderaan, zodat daar 34 ontstaat. Bepaal het grootste veelvoud van 37 dat kleiner dan of gelijk is aan 34. Dat is $0 = 0 \times 37$. (Let op: inderdaad, 0 is ook een veelvoud van 37!) Zet de 0 rechtsboven als derde cijfer van het quotiënt en trek af: $34 - 0 = 34$.
4. Onderstreep het laatste cijfer 5 in 92845 en voeg dit cijfer ook toe aan de 34 onderaan, zodat daar 345 ontstaat. Bepaal het grootste veelvoud van 37 dat kleiner dan of gelijk is aan 345. Dat is $333 = 9 \times 37$. Zet de 9 rechtsboven als vierde (en laatste) cijfer van het quotiënt. Trek af: $345 - 333 = 12$. Dit is de *rest*. Klaar.

De proef op de som

Zoals bij elke staartdeling kun je ook hier weer met een vermenigvuldiging de proef op de som nemen om te controleren of je geen fouten hebt gemaakt. We hebben gevonden dat $92845 : 37 = 2509$ *rest* 12. Als dat goed is, moet gelden dat $(37 \times 2509) + 12 = 92845$ en dat klopt, ga maar na.

Maak de volgende opgaven. Als je die af hebt, ben je een volleerd staartdeler!

4.29
- a. 21 / 70707 \
- b. 38 / 93747 \
- c. 25 / 42513 \
- d. 29 / 91399 \
- e. 34 / 68136 \

4.30
- a. 145 / 18533 \
- b. 163 / 19862 \
- c. 155 / 85813 \
- d. 167 / 90615 \
- e. 136 / 44806 \

4.31
- a. 230 / 34700 \
- b. 481 / 92702 \
- c. 705 / 11453 \
- d. 910 / 34999 \
- e. 714 / 63565 \

Als meesterproef volgen hieronder nog drie rijtjes grote staartdelingen. Om de moed erin te houden, hebben we ervoor gezorgd dat ze allemaal uitkomen, dat wil zeggen dat de rest telkens 0 is!

4.32
- a. 321 / 13803 \
- b. 185 / 14985 \
- c. 205 / 28085 \
- d. 591 / 52008 \
- e. 919 / 59735 \

4.33
- a. 59 / 27435 \
- b. 72 / 64944 \
- c. 55 / 27885 \
- d. 43 / 28853 \
- e. 36 / 4824 \

4.34
- a. 307 / 52497 \
- b. 152 / 69464 \
- c. 394 / 40582 \
- d. 691 / 76701 \
- e. 414 / 80730 \

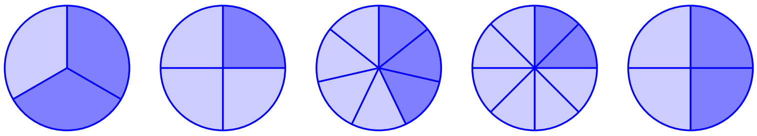
III Breuken

Dit deel gaat over breuken. Dat zijn getallen zoals $\frac{3}{4}$ of $\frac{12}{7}$. Ze hebben een *teller* en een *noemer*. Je leert hier hoe je breuken kunt vereenvoudigen, onder één noemer brengen, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Bij het rekenen spelen delers en veelvouden een rol. Om breuken te vereenvoudigen kun je werken met de *grootste gemeenschappelijke deler* (ggd) van de teller en de noemer. Als je breuken wilt optellen of aftrekken kun je het *kleinste gemeenschappelijke veelvoud* (kgv) van de noemers gebruiken. Vermenigvuldigen en delen met breuken is nog eenvoudiger: we zullen je laten zien hoe dat gaat. Daarna behandelen we het verband tussen breuken en kommagetallen. We sluiten af met een overzicht van alle rekenmethodes en een serie bijbehorende gemengde opgaven.

9 Wat zijn breuken?

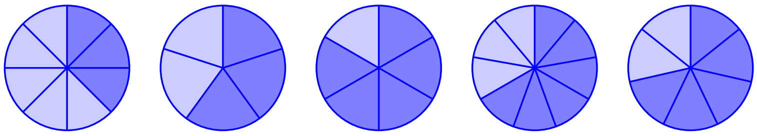
Geef bij elk van de de volgende pizzadiagrammen de breuk die erbij hoort.

9.1



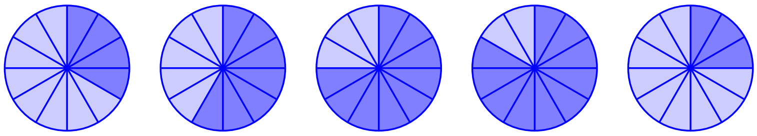
a b c d e

9.2



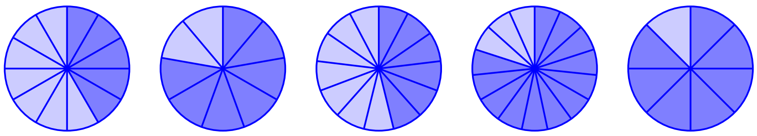
a b c d e

9.3

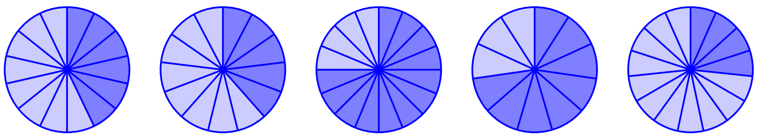


a b c d e

9.4 De tien pizzadiagrammen hieronder horen bij de volgende breuken: $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{6}{14}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{12}{15}$, $\frac{12}{16}$. Zoek bij elk diagram de bijbehorende breuk.



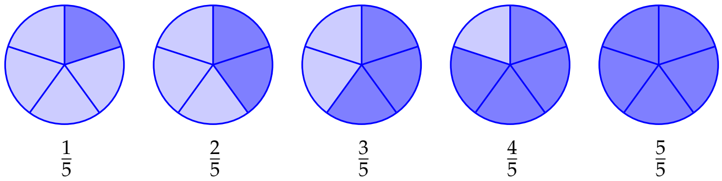
a b c d e



f g h i j

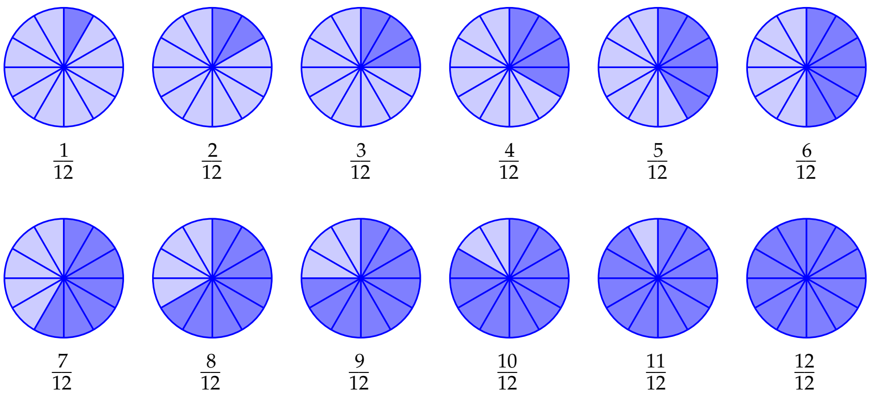
Pizza's delen

Hieronder zie je verdelingen van pizza's in vijf gelijke delen. Elk deel is *één vijfde* van de pizza. In de eerste tekening is één stukje donker gekleurd. Dat is $\frac{1}{5}$ (een vijfde) van de hele pizza. Daarnaast zijn twee stukjes donker gekleurd. Samen zijn ze $\frac{2}{5}$ (twee vijfde) van de hele pizza. Daarnaast drie, daarnaast vier en daarnaast vijf: de hele pizza. Eronder staan de *breuken* waarmee je die delen aangeeft.



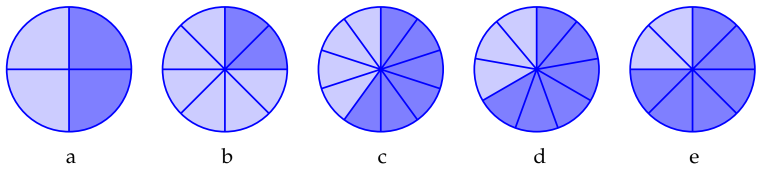
In zo'n breuk staan twee getallen onder elkaar, gescheiden door een horizontale *breukstreep*. Het getal boven de streep heet de *teller* van de breuk. Die *telt* het aantal donker gekleurde stukken. Het getal onder de streep heet de *noemer* van de breuk. Die *noemt* in hoeveel delen de pizza verdeeld is.

Hetzelfde kun je doen met elk ander getal als noemer. In de figuren hieronder staat telkens een verdeling van een pizza in twaalf gelijke stukken. De breuken die bij de donker gekleurde gedeeltes horen, staan er weer onder.

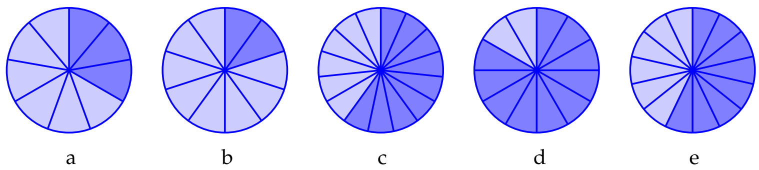


Geef bij elk van de de volgende pizzadiagrammen de breuk die erbij hoort en geef ook een zoveel mogelijk vereenvoudigde vorm van die breuk.

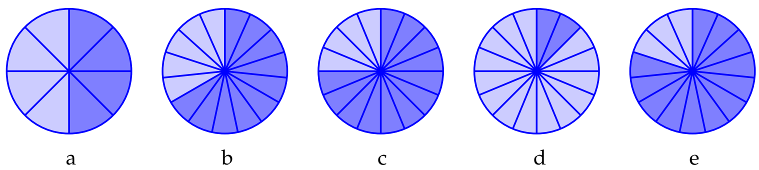
9.5



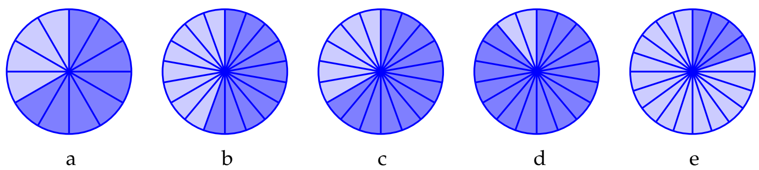
9.6



9.7



9.8



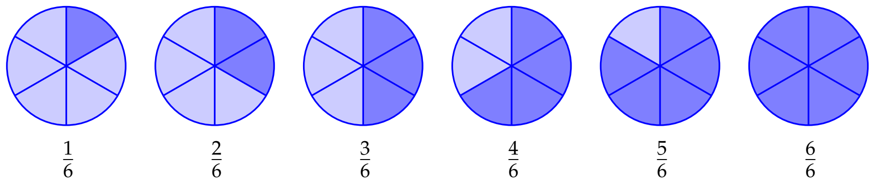
9.9 Van de breuken met noemer 12 die op bladzijde 83 via pizzastukken in beeld zijn gebracht, kun je er een flink aantal vereenvoudigen. Zo is bijvoorbeeld $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ (teller en noemer delen door 3). Ook in de pizzadiagrammen zelf kun je dat zien. Vereenvoudig nu ook de andere breuken met noemer 12 zoveel mogelijk. Bij welke breuken is geen vereenvoudiging mogelijk?

9.10 Vereenvoudig de volgende breuken:

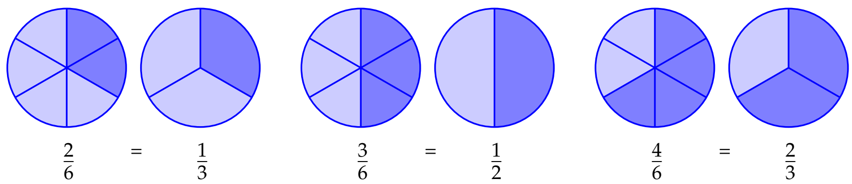
a. $\frac{6}{10}$ b. $\frac{18}{33}$ c. $\frac{24}{26}$ d. $\frac{12}{45}$ e. $\frac{25}{35}$

Het vereenvoudigen van breuken

Hieronder zie je weer een pizzaverdeling. Nu is elke pizza in zes stukken verdeeld. De bijbehorende breuken zijn $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$ en $\frac{6}{6}$.



Bij deze verdeling is wat bijzonders aan de hand: twee zesde van een pizza is evenveel als één derde, drie zesde is evenveel als één tweede (een half) en vier zesde is evenveel als twee derde.



Je ziet dat $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ en $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Je komt van $\frac{2}{6}$ op $\frac{1}{3}$ als je *teller en noemer allebei door* 2 *deelt*. Bij $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ deel je teller en noemer allebei door 3. Dit heet het *vereenvoudigen* van een breuk. In het algemeen geldt:

> *Een breuk verandert niet als je teller en noemer allebei door hetzelfde getal deelt.*

Natuurlijk werkt dit ook de andere kant op:

> *Een breuk verandert niet als je teller en noemer allebei met hetzelfde getal vermenigvuldigt.*

Zo is bijvoorbeeld $\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$ (teller en noemer vermenigvuldigd met 3).

Op de linker bladzijde kun je oefenen in het vereenvoudigen van breuken.

Vereenvoudig de volgende breuken zoveel mogelijk. Je moet dus als antwoord een breuk geven die je niet verder kunt vereenvoudigen.
Voorbeeld: Vereenvoudig $\frac{18}{12}$ zoveel mogelijk. Teller en noemer delen door 2 geeft $\frac{18}{12} = \frac{9}{6}$ als vereenvoudiging, maar $\frac{9}{6}$ kan nog verder vereenvoudigd worden tot $\frac{3}{2}$ (teller en noemer delen door 3). De zoveel mogelijk vereenvoudigde vorm van $\frac{18}{12}$ is dus $\frac{3}{2}$.

9.11
- a. $\frac{6}{8}$
- b. $\frac{8}{6}$
- c. $\frac{10}{14}$
- d. $\frac{6}{9}$
- e. $\frac{12}{15}$

9.12
- a. $\frac{70}{21}$
- b. $\frac{12}{20}$
- c. $\frac{63}{18}$
- d. $\frac{56}{24}$
- e. $\frac{20}{16}$

9.13
- a. $\frac{18}{10}$
- b. $\frac{12}{21}$
- c. $\frac{21}{35}$
- d. $\frac{24}{36}$
- e. $\frac{16}{24}$

9.14
- a. $\frac{70}{40}$
- b. $\frac{63}{90}$
- c. $\frac{50}{15}$
- d. $\frac{21}{70}$
- e. $\frac{110}{44}$

Bereken de ontbrekende teller:

9.15
- a. $\frac{\quad}{10} = \frac{1}{2}$
- b. $\frac{\quad}{16} = \frac{3}{4}$
- c. $\frac{\quad}{10} = \frac{3}{5}$
- d. $\frac{\quad}{12} = \frac{2}{3}$
- e. $\frac{\quad}{14} = \frac{2}{7}$

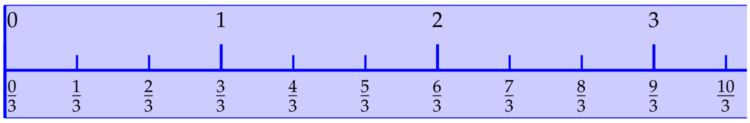
9.16
- a. $\frac{\quad}{18} = \frac{5}{6}$
- b. $\frac{\quad}{18} = 5$
- c. $\frac{\quad}{33} = \frac{2}{11}$
- d. $\frac{\quad}{24} = \frac{3}{8}$
- e. $\frac{\quad}{20} = 7$

9.17
- a. $\frac{\quad}{60} = \frac{5}{12}$
- b. $\frac{\quad}{60} = \frac{17}{15}$
- c. $\frac{\quad}{16} = 3$
- d. $\frac{\quad}{63} = \frac{31}{21}$
- e. $\frac{\quad}{81} = \frac{25}{9}$

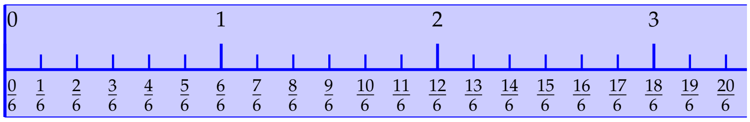
9.18
- a. $\frac{\quad}{40} = \frac{11}{8}$
- b. $\frac{\quad}{56} = \frac{7}{4}$
- c. $\frac{\quad}{64} = 2$
- d. $\frac{\quad}{72} = \frac{14}{9}$
- e. $\frac{\quad}{48} = \frac{25}{16}$

Breuken op de getallenlijn

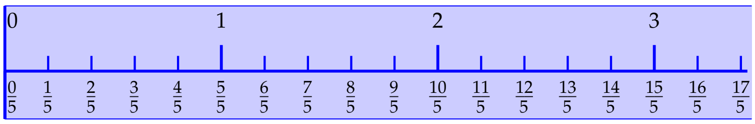
Uit de pizzadiagrammen zou je kunnen opmaken dat breuken niet groter dan 1 (een hele pizza) kunnen zijn, maar dat is niet zo. Hieronder staat een getallenlijn (liniaal) met daarop de breuken met noemer 3. Ze gaan naar rechts gewoon door, net zo ver als je maar wilt.



Je ziet ook dat $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{9}{3} = 3$ enzovoort. En ook dat $\frac{0}{3} = 0$. Een getallenlijn (liniaal) met breuken met noemer 6 ziet er zó uit:



Hier zie je ook weer dat $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ enzovoort. Door vereenvoudigen van breuken verandert hun plaats op de getallenlijn niet. Hieronder nog zo'n plaatje van een getallenlijn, nu met de breuken met noemer 5:



Natuurlijke getallen als breuken

We hebben hierboven gezien dat je natuurlijke getallen ook als een breuk kunt schrijven, bijvoorbeeld met noemer 3: $0 = \frac{0}{3}$, $1 = \frac{3}{3}$, $2 = \frac{6}{3}$, $3 = \frac{9}{3}$ enzovoort. Of met noemer 5: $0 = \frac{0}{5}$, $1 = \frac{5}{5}$, $2 = \frac{10}{5}$, $3 = \frac{15}{5}$ enzovoort. Maar je zou zelfs noemer 1 kunnen nemen: $0 = \frac{0}{1}$, $1 = \frac{1}{1}$, $2 = \frac{2}{1}$, $3 = \frac{3}{1}$ enzovoort. Bij $1 = \frac{1}{1}$ kun je dan aan een pizza denken die in één stuk verdeeld is, dus daar is geen mes aan te pas gekomen! Alleen noemer 0 kan niet: je kunt een pizza niet in nul stukken verdelen. Als je niet snijdt, houd je immers niet nul stukken, maar één stuk over! Dat is daarom een algemene afspraak: bij breuken is de noemer niet nul. En ook de 'breuk' $\frac{0}{0}$ zullen wij nooit gebruiken. Er geldt dus: *de noemer van een breuk is nooit nul, de teller kan wel nul zijn.*

Vereenvoudig de volgende breuken en schrijf ze als een gemengde breuk (dat wil zeggen met het gehele deel apart):

9.19
- a. $\frac{40}{18}$
- b. $\frac{45}{27}$
- c. $\frac{220}{50}$
- d. $\frac{425}{40}$
- e. $\frac{126}{36}$

9.20
- a. $\frac{60}{36}$
- b. $\frac{100}{45}$
- c. $\frac{220}{55}$
- d. $\frac{260}{39}$
- e. $\frac{340}{51}$

9.21
- a. $\frac{450}{75}$
- b. $\frac{280}{42}$
- c. $\frac{360}{54}$
- d. $\frac{270}{81}$
- e. $\frac{240}{96}$

9.22
- a. $\frac{330}{25}$
- b. $\frac{240}{48}$
- c. $\frac{300}{18}$
- d. $\frac{420}{63}$
- e. $\frac{700}{91}$

Schrijf als een zoveel mogelijk vereenvoudigde gewone breuk:

9.23
- a. $3\,\frac{5}{8}$
- b. $2\,\frac{4}{7}$
- c. $4\,\frac{2}{5}$
- d. $3\,\frac{5}{6}$
- e. $2\,\frac{4}{9}$

9.24
- a. $13\,\frac{3}{7}$
- b. $12\,\frac{2}{9}$
- c. $18\,\frac{3}{5}$
- d. $20\,\frac{1}{4}$
- e. $30\,\frac{7}{8}$

9.25
- a. $2\,\frac{5}{18}$
- b. $3\,\frac{14}{27}$
- c. $4\,\frac{12}{15}$
- d. $5\,\frac{5}{26}$
- e. $2\,\frac{34}{39}$

9.26
- a. $8\,\frac{15}{80}$
- b. $7\,\frac{34}{70}$
- c. $5\,\frac{27}{50}$
- d. $4\,\frac{57}{60}$
- e. $7\,\frac{74}{90}$

Bepaal de grootste gemeenschappelijke deler (ggd) van de volgende paren getallen. Zie je het antwoord niet direct, maak er dan een breuk van, vereenvoudig die breuk zoveel mogelijk en schrijf daarbij op welke delers je tegenkomt. *Voorbeeld:* neem bij 24 en 42 de breuk $\frac{24}{42}$ en vereenvoudig die stap voor stap: $\frac{24}{42} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$. De ggd van 24 en 42 is dus $2 \times 3 = 6$.

9.27
- a. 4 en 10
- b. 12 en 9
- c. 14 en 49
- d. 30 en 6
- e. 10 en 15

9.28
- a. 8 en 12
- b. 24 en 12
- c. 9 en 21
- d. 15 en 20
- e. 18 en 16

9.29
- a. 10 en 14
- b. 12 en 16
- c. 36 en 20
- d. 6 en 48
- e. 60 en 48

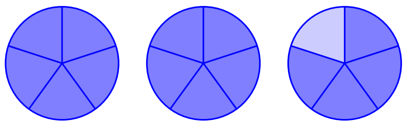
9.30
- a. 12 en 30
- b. 24 en 26
- c. 27 en 45
- d. 32 en 56
- e. 36 en 48

9.31
- a. 45 en 25
- b. 44 en 66
- c. 90 en 64
- d. 49 en 35
- e. 81 en 27

9.32
- a. 100 en 65
- b. 144 en 60
- c. 95 en 38
- d. 40 en 96
- e. 63 en 84

Gemengde breuken

Bij breuken groter dan 1 is de teller groter dan de noemer. Denk bijvoorbeeld aan de breuk $\frac{14}{5}$. Soms noteert men die als $2\,\frac{4}{5}$, want als je weer aan pizza's denkt, dan heb je met 14 stukken van $\frac{1}{5}$ pizza samen 2 hele pizza's (tien stukken van $\frac{1}{5}$) en nog vier stukken van $\frac{1}{5}$. Eigenlijk betekent $2\,\frac{4}{5}$ dus $2 + \frac{4}{5}$. Ook op bladzijde 87 (de derde liniaal) kun je dit controleren.



$$\frac{14}{5} = 2\,\frac{4}{5}$$

Een notatie als $2\,\frac{4}{5}$ noemen we een *gemengde breuk*. Als je een gewone breuk omzet in een gemengde breuk, doe je eigenlijk niets anders dan het *delen met rest* van de teller door de noemer. Immers, omdat $14 : 5 = 2$ *rest* 4 is $\frac{14}{5} = 2\,\frac{4}{5}$.

Bij het rekenen met breuken (optellen en aftrekken, maar vooral ook bij vermenigvuldigen en delen) is de gemengde vorm van een breuk niet handig. We zullen daarom in dit boek vrijwel uitsluitend met 'gewone' breukvormen zoals $\frac{14}{5}$ werken.

De grootste gemeenschappelijke deler (ggd)

Bij het vereenvoudigen van een breuk deel je teller en noemer door een *gemeenschappelijke deler*. Zo is $\frac{210}{294} = \frac{105}{147}$ (teller en noemer gedeeld door 2). Maar je kunt nog verder gaan: $\frac{105}{147} = \frac{35}{49}$ (gemeenschappelijke deler 3) en zelfs nog verder: $\frac{35}{49} = \frac{5}{7}$. Verder vereenvoudigen lukt niet. We hadden ook in één keer op $\frac{5}{7}$ uit kunnen komen door in de oorspronkelijke breuk $\frac{210}{294}$ de teller en noemer gelijk te delen door $42 = 2 \times 3 \times 7$. Inderdaad geldt dat $210 = 5 \times 42$ en $294 = 7 \times 42$. Het getal 42 is dus ook een gemeenschappelijke deler, en wel de *grootste gemeenschappelijke deler* (ggd).

Als je de ggd van de teller en de noemer van een breuk nog niet kent, kun je de eenvoudigste breukvorm ook stap voor stap bereiken, net zoals we dat hierboven hebben gedaan: net zo lang delers wegdelen totdat teller en noemer geen gemeenschappelijke deler meer hebben. Als je de delers die je onderweg bent tegengekomen dan met elkaar vermenigvuldigt, krijg je de ggd. Dat is ook een van de manieren om de ggd van twee willekeurige natuurlijke getallen te berekenen: maak er een breuk van en vereenvoudig die zoveel mogelijk.

10 Rekenen met breuken

Maak de volgende breuken gelijknamig. Probeer daarbij steeds te werken met een zo klein mogelijke noemer.

10.1
a. $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$
b. $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$
c. $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{5}$
d. $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{5}$
e. $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{5}$

10.2
a. $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4}$
b. $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{5}$
c. $\frac{3}{4}$ en $\frac{2}{5}$
d. $\frac{3}{5}$ en $\frac{1}{4}$
e. $\frac{3}{2}$ en $\frac{4}{5}$

10.3
a. $\frac{2}{6}$ en $\frac{3}{7}$
b. $\frac{2}{5}$ en $\frac{5}{6}$
c. $\frac{3}{4}$ en $\frac{2}{7}$
d. $\frac{2}{3}$ en $\frac{4}{5}$
e. $\frac{3}{8}$ en $\frac{2}{3}$

Bereken het kleinste gemeenschappelijke veelvoud (kgv) van

10.4
a. 3 en 4
b. 4 en 10
c. 6 en 9
d. 15 en 10
e. 4 en 14

10.5
a. 12 en 4
b. 12 en 9
c. 4 en 22
d. 10 en 6
e. 21 en 14

10.6
a. 6 en 15
b. 25 en 10
c. 18 en 27
d. 30 en 45
e. 24 en 18

Maak de volgende opgaven. Werk daarbij met het kgv van de noemers en vereenvoudig de uitkomsten zoveel mogelijk.

10.7
a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=$
b. $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=$
c. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=$
d. $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=$
e. $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=$

10.8
a. $\frac{3}{4}+\frac{1}{12}=$
b. $\frac{1}{4}+\frac{11}{4}=$
c. $\frac{15}{6}-\frac{2}{9}=$
d. $\frac{13}{8}+\frac{5}{6}=$
e. $\frac{5}{2}-\frac{7}{18}=$

10.9
a. $\frac{1}{4}+\frac{1}{10}=$
b. $\frac{1}{6}+\frac{1}{15}=$
c. $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=$
d. $\frac{1}{9}-\frac{1}{12}=$
e. $\frac{1}{9}-\frac{1}{15}=$

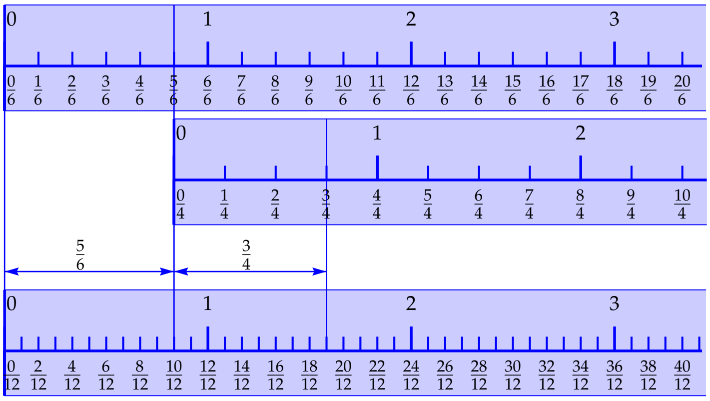
10.10
a. $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}=$
b. $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}=$
c. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=$
d. $\frac{4}{5}-\frac{1}{9}=$
e. $\frac{1}{2}+\frac{3}{7}=$

10.11
a. $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=$
b. $\frac{8}{9}-\frac{5}{6}=$
c. $\frac{2}{7}+\frac{3}{4}=$
d. $\frac{5}{6}-\frac{3}{8}=$
e. $\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=$

10.12
a. $\frac{5}{12}+\frac{1}{16}=$
b. $\frac{7}{15}-\frac{3}{10}=$
c. $\frac{5}{18}+\frac{7}{12}=$
d. $\frac{3}{20}+\frac{4}{15}=$
e. $\frac{7}{16}-\frac{3}{20}=$

Optellen en aftrekken

Hoe tel je twee breuken bij elkaar op? Wat is bijvoorbeeld $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$? Kijk naar het plaatje hieronder:



Met de bovenste liniaal, die de breuken met noemer 6 bevat, is een stuk van lengte $\frac{5}{6}$ afgepast. Met de middelste liniaal, met daarop de breuken met noemer 4, een stuk van lengte $\frac{3}{4}$. Samen vormen ze een stuk van lengte $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$. Met de onderste liniaal, met daarop de breuken met noemer 12, zie je dat de lengte van de twee stukken samen $\frac{19}{12}$ is, want $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$ en $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ en dus is

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{10}{12} + \frac{9}{12} = \frac{19}{12}$$

Dezelfde truc werkt ook bij aftrekken, bijvoorbeeld

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$$

Eigenlijk doe je in beide gevallen het omgekeerde van het vereenvoudigen van breuken. Je gaat van $\frac{5}{6}$ over op $\frac{10}{12}$ en van $\frac{3}{4}$ op $\frac{9}{12}$. Daarbij worden de noemers gelijk. Dit heet het *onder één noemer brengen* van de twee breuken. Je maakt de breuken *gelijknamig*. Als dat gebeurd is, is optellen kinderspel, want gelijknamige breuken kun je optellen door de tellers op te tellen: $\frac{10}{12} + \frac{9}{12} = \frac{19}{12}$. Net zo voor aftrekken.

Hoe kwamen we aan die noemer 12? Door naar de noemers 6 van $\frac{5}{6}$ en 4 van $\frac{3}{4}$ te kijken. De noemer 12 is zowel een veelvoud van 6 als van 4 want $12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$. Het getal 12 is dus een *gemeenschappelijk veelvoud* van 6 en van 4. Wil je het zo zuinig mogelijk doen, neem dan het *kleinste gemeenschappelijke veelvoud*. Dat hebben we hier ook gedaan. We hadden bijvoorbeeld ook $24 = 4 \times 6 = 6 \times 4$ kunnen nemen, met als resultaat $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{20}{24} + \frac{18}{24} = \frac{38}{24} = \frac{19}{12}$. Dezelfde einduitkomst, maar met meer werk.

Bereken het kleinste gemeenschappelijke veelvoud (kgv) van

10.13
- a. 3, 4 en 5
- b. 4, 8 en 10
- c. 6, 8 en 9
- d. 3, 10 en 15
- e. 4, 10 en 14

10.14
- a. 12, 3 en 4
- b. 12, 8 en 9
- c. 8, 12 en 16
- d. 10, 9 en 6
- e. 21, 35 en 15

10.15
- a. 6, 12 en 15
- b. 25, 15 en 10
- c. 18, 30 en 15
- d. 30, 42 en 35
- e. 24, 30 en 20

Maak de volgende breuken gelijknamig. Probeer daarbij steeds te werken met het *kleinste gemeenschappelijke veelvoud* (kgv) van de noemers.

10.16
- a. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{5}$
- b. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ en $\frac{2}{7}$
- c. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ en $\frac{2}{5}$
- d. $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{17}$ en $\frac{1}{2}$
- e. $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{4}$ en $\frac{1}{3}$

10.17
- a. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{5}$
- b. $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$ en $\frac{2}{9}$
- c. $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$ en $\frac{1}{9}$
- d. $\frac{4}{15}$, $\frac{2}{9}$ en $\frac{1}{6}$
- e. $\frac{5}{18}$, $\frac{2}{15}$ en $\frac{3}{10}$

Bereken:

10.18
- a. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=$
- b. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=$
- c. $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}=$
- d. $\frac{1}{2}-\frac{1}{7}-\frac{1}{3}=$
- e. $\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=$

10.19
- a. $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{12}=$
- b. $\frac{3}{5}+\frac{3}{8}-\frac{5}{20}=$
- c. $\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{4}{15}=$
- d. $\frac{2}{5}+\frac{5}{9}-\frac{2}{15}=$
- e. $\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{7}{10}=$

10.20
- a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=$
- b. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=$
- c. $\frac{5}{8}+\frac{1}{6}-\frac{2}{9}=$
- d. $\frac{5}{9}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=$
- e. $\frac{5}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=$

Bepaal telkens welke van de volgende twee breuken het grootst is. Hint: maak de breuken gelijknamig!

10.21
- a. $\frac{1}{6}$ en $\frac{2}{9}$
- b. $\frac{5}{18}$ en $\frac{4}{15}$
- c. $\frac{7}{15}$ en $\frac{4}{9}$
- d. $\frac{5}{24}$ en $\frac{2}{9}$
- e. $\frac{9}{20}$ en $\frac{11}{18}$

10.22
- a. $\frac{4}{9}$ en $\frac{3}{7}$
- b. $\frac{15}{8}$ en $\frac{28}{15}$
- c. $\frac{11}{36}$ en $\frac{9}{32}$
- d. $\frac{20}{63}$ en $\frac{25}{72}$
- e. $\frac{13}{21}$ en $\frac{7}{11}$

Meer over het kleinste gemeenschappelijke veelvoud (kgv)

Bij het onder één noemer brengen van twee breuken, bijvoorbeeld $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{4}$, zochten we een *gemeenschappelijk veelvoud* van de beide noemers 6 en 4. Als je het *kleinste gemeenschappelijke veelvoud* (kgv) neemt, blijven de noemers zo klein mogelijk. Hier is 12 het kgv van 6 en 4, en we hebben $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$ en $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$.

Wanneer je meer dan twee breuken bij elkaar op moet tellen, bijvoorbeeld $\frac{5}{6} + \frac{7}{4} + \frac{13}{21}$, is het handig om gelijk een gemeenschappelijk veelvoud te nemen van alle noemers die in het spel zijn. En het handigste is het dan natuurlijk weer om het *kleinste* gemeenschappelijke veelvoud (kgv) te nemen. Zo is

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{4} + \frac{13}{21} = \frac{70}{84} + \frac{147}{84} + \frac{52}{84} = \frac{269}{84}$$

want 84 is het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van 6, 4 en 21.

Hoe bereken je zo'n kgv, bijvoorbeeld het kgv van 6, 4 en 21 ? Pak het grootste getal, 21 in dit geval, en bekijk achtereenvolgens de veelvouden $1 \times 21 = 21$, $2 \times 21 = 42$, enzovoort net zolang totdat je een veelvoud vindt dat ook een veelvoud is van 6 en van 4. Hier is $2 \times 21 = 42$ ook al een veelvoud van 6 (namelijk $7 \times 6 = 42$) maar nog niet van 4. Maar $4 \times 21 = 84$ is dat wel.

Eigenlijk is het bij het optellen en aftrekken van breuken niet strikt nodig om met het *kleinste* gemeenschappelijke veelvoud van alle noemers te werken. Met ieder ander gemeenschappelijk veelvoud lukt het ook, maar dan kunnen we de uitkomst aan het eind altijd nog vereenvoudigen, en dat betekent dus meer werk. Zouden we in het voorbeeld van hierboven niet het kgv 84 hebben genomen van de drie noemers 6, 4 en 21, maar gewoon hun product $6 \times 4 \times 21 = 504$ (dat is natuurlijk ook een gemeenschappelijk veelvoud), dan was de berekening als volgt verlopen.

$$\begin{aligned}\frac{5}{6} + \frac{7}{4} + \frac{13}{21} &= \frac{5 \times 4 \times 21}{6 \times 4 \times 21} + \frac{7 \times 6 \times 21}{6 \times 4 \times 21} + \frac{13 \times 6 \times 4}{6 \times 4 \times 21} \\ &= \frac{420}{504} + \frac{882}{504} + \frac{312}{504} = \frac{1614}{504} = \frac{269}{84}\end{aligned}$$

Hetzelfde antwoord natuurlijk, maar wel met veel meer werk!

10.23
a. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} =$
b. $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} =$
c. $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} =$
d. $\frac{1}{3} \times \frac{7}{5} =$
e. $\frac{3}{5} \times \frac{3}{2} =$

10.24
a. $\frac{3}{4} \times \frac{1}{7} =$
b. $\frac{1}{5} \times \frac{3}{8} =$
c. $\frac{5}{7} \times \frac{7}{5} =$
d. $\frac{3}{8} \times \frac{1}{5} =$
e. $\frac{9}{5} \times \frac{4}{7} =$

10.25
a. $\frac{3}{8} \times \frac{5}{7} =$
b. $\frac{7}{6} \times \frac{1}{2} =$
c. $\frac{5}{8} \times \frac{3}{4} =$
d. $\frac{7}{9} \times \frac{2}{3} =$
e. $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} =$

Streep bij de volgende opgaven eerst gemeenschappelijke delers in teller en noemer (als die er zijn) tegen elkaar weg.

10.26
a. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} =$
b. $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} =$
c. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{8} =$
d. $\frac{4}{3} \times \frac{5}{6} =$
e. $\frac{2}{9} \times \frac{3}{5} =$

10.27
a. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} =$
b. $\frac{5}{8} \times \frac{8}{5} =$
c. $\frac{5}{9} \times \frac{6}{8} =$
d. $\frac{4}{5} \times \frac{5}{8} =$
e. $\frac{5}{9} \times \frac{6}{7} =$

10.28
a. $\frac{5}{12} \times \frac{6}{10} =$
b. $\frac{7}{18} \times \frac{9}{14} =$
c. $\frac{3}{20} \times \frac{5}{12} =$
d. $\frac{7}{16} \times \frac{16}{7} =$
e. $\frac{4}{15} \times \frac{5}{12} =$

10.29
a. $\frac{7}{12} \times \frac{16}{21} =$
b. $\frac{8}{15} \times \frac{25}{27} =$
c. $\frac{2}{3} \times \frac{9}{8} =$
d. $\frac{4}{3} \times \frac{5}{16} =$
e. $\frac{16}{9} \times \frac{3}{5} =$

10.30
a. $\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} =$
b. $\frac{5}{7} \times \frac{4}{9} =$
c. $\frac{5}{9} \times \frac{6}{7} =$
d. $\frac{4}{15} \times \frac{3}{8} =$
e. $\frac{5}{9} \times \frac{6}{11} =$

10.31
a. $\frac{5}{12} \times \frac{7}{10} =$
b. $\frac{7}{18} \times \frac{9}{11} =$
c. $\frac{3}{20} \times \frac{7}{12} =$
d. $\frac{7}{16} \times \frac{8}{25} =$
e. $\frac{4}{25} \times \frac{5}{12} =$

Het tegen elkaar wegstrepen van gemeenschappelijke delers mag natuurlijk ook als je meer dan twee breuken met elkaar vermenigvuldigt. Bijvoorbeeld:

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{15} = \frac{5 \times 3 \times 7}{6 \times 4 \times 15} = \frac{5 \times \cancel{3}^{1} \times 7}{\cancel{6}_{2} \times 4 \times 15} = \frac{\cancel{5}^{1} \times 1 \times 7}{2 \times 4 \times \cancel{15}_{3}} = \frac{7}{24}$$

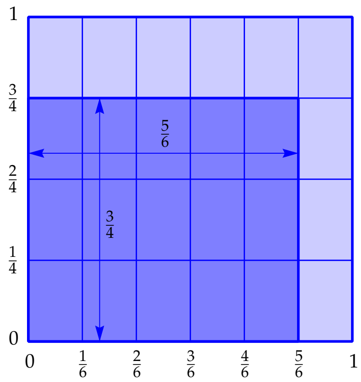
10.32
a. $\frac{2}{3} \times \frac{9}{8} \times \frac{6}{21} =$
b. $\frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{12} =$
c. $\frac{2}{9} \times \frac{3}{7} \times \frac{21}{16} =$
d. $\frac{14}{9} \times \frac{16}{21} \times \frac{27}{32} =$
e. $\frac{8}{15} \times \frac{35}{24} \times \frac{5}{14} =$

10.33
a. $\frac{7}{5} \times \frac{2}{7} \times \frac{15}{8} =$
b. $\frac{5}{8} \times \frac{4}{3} \times \frac{9}{10} =$
c. $\frac{7}{9} \times \frac{7}{24} \times \frac{16}{7} =$
d. $\frac{4}{5} \times \frac{3}{8} \times \frac{15}{48} =$
e. $\frac{5}{9} \times \frac{6}{11} \times \frac{18}{75} =$

10.34
a. $\frac{8}{7} \times \frac{11}{4} \times \frac{21}{22} =$
b. $\frac{15}{8} \times \frac{40}{3} \times \frac{9}{10} =$
c. $\frac{7}{3} \times \frac{6}{25} \times \frac{15}{77} =$
d. $\frac{4}{5} \times \frac{30}{21} \times \frac{49}{45} =$
e. $\frac{2}{9} \times \frac{18}{7} \times \frac{21}{44} =$

Vermenigvuldigen

Hoe vermenigvuldig je twee breuken met elkaar? Wat is bijvoorbeeld $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$? Kijk naar de figuur hieronder.



De oppervlakte van een rechthoek is lengte maal breedte. Hierboven is binnen een vierkant met zijden van lengte 1 een rechthoek donker gekleurd met lengte $\frac{5}{6}$ en breedte $\frac{3}{4}$. Wat is de oppervlakte? De oppervlakte van het vierkant is 1. Je ziet dat het verdeeld is in $6 \times 4 = 24$ even grote deelrechthoekjes, die dus allemaal oppervlakte $\frac{1}{24}$ hebben. De donker gekleurde rechthoek telt $5 \times 3 = 15$ deelrechthoekjes, en de oppervlakte ervan is dus $\frac{15}{24}$, dus het product (de uitkomst van de vermenigvuldiging) is

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{6 \times 4} = \frac{15}{24}$$

Hetzelfde kun je doen met elk tweetal andere breuken: steeds krijg je als product een breuk met in de teller het product van de tellers en in de noemer het product van de noemers:

> *Het product van twee breuken is een breuk met in de teller het product van de tellers en in de noemer het product van de noemers.*

In het bovenstaande geval kunnen we de uitkomst $\frac{15}{24}$ nog vereenvoudigen. Je kunt teller en noemer door 3 delen: $\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$. Dat delen door 3 hadden we al eerder kunnen doen. In de middelste vorm zie je een 3 in de teller en een 6 in de noemer. Omdat $6 = 2 \times 3$ kun je teller en noemer door 3 delen:

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{6 \times 4} = \frac{5 \times \cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{2} \times 4} = \frac{5 \times 1}{2 \times 4} = \frac{5}{8}$$

Op zo'n manier kun je je berekeningen door 'wegstrepen' vaak aanzienlijk vereenvoudigen!

10.35

a. $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} =$

b. $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} =$

c. $\frac{2}{3} : \frac{3}{8} =$

d. $\frac{4}{3} : \frac{5}{6} =$

e. $\frac{2}{9} : \frac{3}{5} =$

10.36

a. $\frac{3}{4} : \frac{2}{7} =$

b. $\frac{5}{8} : \frac{8}{5} =$

c. $\frac{5}{9} : \frac{6}{8} =$

d. $\frac{4}{5} : \frac{5}{8} =$

e. $\frac{5}{9} : \frac{6}{7} =$

10.37

a. $\frac{5}{2} : \frac{6}{10} =$

b. $\frac{7}{8} : \frac{7}{40} =$

c. $\frac{3}{2} : \frac{6}{11} =$

d. $\frac{7}{6} : \frac{14}{27} =$

e. $\frac{4}{5} : \frac{8}{15} =$

10.38

a. $\frac{7}{12} : \frac{42}{5} =$

b. $\frac{8}{15} : \frac{24}{7} =$

c. $\frac{2}{3} : \frac{5}{18} =$

d. $\frac{4}{3} : \frac{5}{9} =$

e. $\frac{2}{9} : \frac{6}{5} =$

10.39

a. $\frac{3}{4} : \frac{6}{17} =$

b. $\frac{5}{8} : \frac{40}{9} =$

c. $\frac{5}{9} : \frac{7}{18} =$

d. $\frac{4}{5} : \frac{32}{9} =$

e. $\frac{5}{9} : \frac{16}{27} =$

10.40

a. $\frac{5}{12} : 10 =$

b. $\frac{7}{18} : 49 =$

c. $20 : \frac{5}{12} =$

d. $15 : \frac{3}{11} =$

e. $\frac{4}{15} : 16 =$

Je kunt nu ook ‘gemengde’ opgaven maken met meerdere delingen of vermenigvuldigingen. Vervang gewoon elke deling door een vermenigvuldiging met de omgekeerde breuk. Voorbeeld:

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{2 \times 5 \times 4}{3 \times 3 \times 9} = \frac{40}{81}$$

En natuurlijk is het ook hier handig om, indien mogelijk, gemeenschappelijke delers in teller en noemer tegen elkaar weg te strepen. Maar doe dat pas *nadat* je elke deling hebt vervangen door een vermenigvuldiging met de omgekeerde breuk, anders maak je snel fouten!

10.41

a. $\frac{2}{3} : \frac{2}{5} \times \frac{9}{4} =$

b. $\frac{4}{3} : \frac{8}{7} \times \frac{3}{7} =$

c. $\frac{2}{7} : \frac{3}{5} : \frac{2}{3} =$

d. $\frac{4}{9} \times \frac{6}{11} : \frac{12}{33} =$

e. $\frac{8}{15} : \frac{5}{4} : \frac{4}{25} =$

10.42

a. $\frac{7}{5} : \frac{2}{7} \times \frac{15}{14} =$

b. $\frac{5}{8} : \frac{4}{5} \times \frac{9}{10} =$

c. $\frac{7}{9} \times \frac{7}{4} : \frac{21}{8} =$

d. $\frac{4}{5} \times \frac{3}{8} : \frac{5}{18} =$

e. $\frac{5}{7} \times \frac{6}{11} : \frac{18}{7} =$

10.43

a. $\frac{8}{7} \times \frac{11}{4} : \frac{22}{5} =$

b. $\frac{15}{8} : \frac{4}{3} : \frac{21}{16} =$

c. $\frac{7}{3} : \frac{2}{5} \times \frac{15}{17} =$

d. $\frac{4}{5} : \frac{3}{24} \times \frac{9}{48} =$

e. $\frac{2}{9} : \frac{8}{7} \times \frac{21}{28} =$

Delen

Hoe deel je een breuk door een andere breuk? Bijvoorbeeld $\frac{5}{7} : \frac{3}{4}$? Om daar achter te komen, brengen we in herinnering wat we op bladzijde 71 hebben geleerd: *delen door een getal is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde getal*. En we hebben daar ook geleerd: *een getal maal zijn omgekeerde is gelijk aan* 1.

Hier moeten we delen door $\frac{3}{4}$. Wat is het omgekeerde van de breuk $\frac{3}{4}$? Natuurlijk de breuk $\frac{4}{3}$ want volgens de regels voor het vermenigvuldigen van breuken geldt $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$. We zien dus dat

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{21}$$

Dit geldt in het algemeen: de omgekeerde breuk krijg je door teller en noemer te verwisselen. Ook geldt in het algemeen:

Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk.

Daarmee is het delen van breuken net zo makkelijk geworden als het vermenigvuldigen van breuken! Voorbeelden:

$$\frac{2}{7} : \frac{5}{6} = \frac{2}{7} \times \frac{6}{5} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{1}{4} : \frac{2}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{7}{8} : \frac{11}{6} = \frac{7}{8} \times \frac{6}{11} = \frac{7 \times 6}{8 \times 11} = \frac{7 \times \cancel{6}^{3}}{\cancel{8}_{4} \times 11} = \frac{7 \times 3}{4 \times 11} = \frac{21}{44}$$

In het laatste voorbeeld konden we een vereenvoudiging toepassen door de getallen 6 in de teller en 8 in de noemer beide door 2 te delen.

Delen van een breuk door een natuurlijk getal, bijvoorbeeld 7, valt ook onder deze regel want $7 = \frac{7}{1}$ en dus is bijvoorbeeld

$$\frac{5}{6} : 7 = \frac{5}{6} : \frac{7}{1} = \frac{5}{6} \times \frac{1}{7} = \frac{5}{42}$$

En ook het delen van een natuurlijk getal door een breuk gaat volgens dezelfde regel. Bijvoorbeeld

$$7 : \frac{5}{6} = \frac{7}{1} : \frac{5}{6} = \frac{7}{1} \times \frac{6}{5} = \frac{42}{5}$$

Schrijf de volgende kommagetallen als een breuk. Geef je antwoorden in de meest vereenvoudigde vorm.

10.44
- a. $0,25$
- b. $0,025$
- c. $0,0025$
- d. $2,5$
- e. $2,25$

10.45
- a. $0,2$
- b. $0,04$
- c. $0,005$
- d. $2,2$
- e. $2,05$

10.46
- a. $0,12$
- b. $0,125$
- c. $0,0125$
- d. $2,32$
- e. $5,55$

10.47
- a. $0,05$
- b. $6,25$
- c. $0,625$
- d. $1,625$
- e. $0,1625$

10.48
- a. $2,8$
- b. $0,32$
- c. $0,335$
- d. $6,75$
- e. $6,8$

10.49
- a. $10,1$
- b. $10,25$
- c. $0,375$
- d. $37,5$
- e. $5,95$

Schrijf de volgende breuken als kommagetallen. Rond je antwoord af op vijf decimalen.

10.50
- a. $\frac{1}{2}$
- b. $\frac{1}{3}$
- c. $\frac{1}{4}$
- d. $\frac{2}{3}$
- e. $\frac{1}{5}$

10.51
- a. $\frac{2}{5}$
- b. $\frac{3}{2}$
- c. $\frac{3}{4}$
- d. $\frac{1}{6}$
- e. $\frac{5}{6}$

10.52
- a. $\frac{1}{7}$
- b. $\frac{1}{8}$
- c. $\frac{1}{9}$
- d. $\frac{8}{9}$
- e. $\frac{2}{7}$

10.53
- a. $\frac{3}{7}$
- b. $\frac{3}{8}$
- c. $\frac{4}{9}$
- d. $\frac{5}{3}$
- e. $\frac{6}{7}$

10.54
- a. $\frac{1}{12}$
- b. $\frac{1}{11}$
- c. $\frac{3}{11}$
- d. $\frac{1}{16}$
- e. $\frac{1}{15}$

10.55
- a. $\frac{4}{13}$
- b. $\frac{5}{18}$
- c. $\frac{6}{19}$
- d. $\frac{7}{20}$
- e. $\frac{8}{25}$

10.56 Op bladzijde 59 hebben we delingen met kommagetallen zoals $73 : 4,83$ uitgevoerd door het deeltal 73 en de deler $4,83$ eerst allebei met 100 te vermenigvuldigen. Daardoor werd de deler een natuurlijk getal, en dat maakte de staartdeling gemakkelijker. Verklaar nu ook waarom dit werkt door de deler als een gewone breuk te schrijven en de deling te schrijven als het vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk.

Breuken en kommagetallen

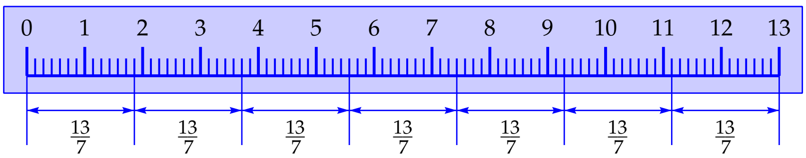
Kommagetallen zijn eigenlijk ook breuken, namelijk met noemer 10, 100, 1000, 10000 . . . al naar gelang het aantal cijfers achter de komma. Zo is 3,54 hetzelfde als $\frac{354}{100}$, of $3\,\frac{54}{100}$ als je liever de gemengde breukvorm hanteert. Deze breuken kunnen nog vereenvoudigd worden tot respectievelijk $\frac{177}{50}$ en $3\,\frac{27}{50}$, maar zo'n vereenvoudiging is natuurlijk niet altijd mogelijk.

Omgekeerd hebben we in hoofdstuk 6 op bladzijde 57 eigenlijk al geleerd hoe je breuken met een voortgezette staartdeling in kommagetallen omzet, ook al wisten we toen nog niet wat breuken zijn! Maar met een voortgezette staartdeling kunnen we bijvoorbeeld $13 : 7$ in net zo veel decimalen uitrekenen als we willen:

$$7 \,\big/\, 13{,}000000\ldots \,\big\backslash\, 1{,}857142\ldots$$

(We hebben de staart weggelaten; die kun je zelf wel invullen, zie eventueel ook bladzijde 146.) Afgerond op 5 decimalen komt daar $1{,}85714$ uit.

We kunnen zo het quotiënt van de deling $13 : 7$ met kommagetallen net zo nauwkeurig benaderen als we willen, maar nu we breuken kennen, kunnen we het quotiënt ook *exact* geven: het is de breuk $\frac{13}{7}$, kijk maar naar het volgende plaatje waarin de liniaal is onderverdeeld in stukjes van $\frac{1}{7}$.



Er geldt dus $13 : 7 = \frac{13}{7}$. Voor andere delingen met natuurlijke getallen geldt net zoiets, en daarmee is in feite het onderscheid tussen delingen met natuurlijke getallen en de bijbehorende breuken vrijwel vervallen.

En delen met rest? Dat is eigenlijk vrijwel hetzelfde als het omzetten van een gewone breuk in een gemengde breuk, dat wil zeggen een breuk waarin het gehele deel apart staat. Kijk maar: $13 : 7 = 1$ *rest* 6 betekent eigenlijk hetzelfde als $\frac{13}{7} = 1\,\frac{6}{7}$.

10.57

a. $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} =$

b. $\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{9}{10}} =$

c. $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{2}} =$

d. $\dfrac{\frac{16}{35}}{\frac{20}{7}} =$

e. $\dfrac{\frac{12}{7}}{\frac{7}{14}} =$

10.58

a. $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{5}} =$

b. $\dfrac{\frac{16}{9}}{\frac{4}{3}} =$

c. $\dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{14}} =$

d. $\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{4}} =$

e. $\dfrac{\frac{5}{7}}{\frac{4}{21}} =$

10.59

a. $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{4}} =$

b. $\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{6}{11}} =$

c. $\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{7}{6}} =$

d. $\dfrac{\frac{6}{13}}{\frac{7}{5}} =$

e. $\dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{9}} =$

10.60

a. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} =$

b. $\dfrac{\frac{5}{9}+\frac{3}{10}}{\frac{3}{4}-\frac{4}{9}} =$

c. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} =$

d. $\dfrac{\frac{5}{7}+\frac{7}{10}}{\frac{3}{5}-\frac{1}{9}} =$

e. $\dfrac{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}} =$

10.61

a. $\dfrac{\frac{2}{5}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}} =$

b. $\dfrac{\frac{5}{9}+\frac{3}{7}}{\frac{3}{5}-\frac{1}{9}} =$

c. $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}} =$

d. $\dfrac{\frac{2}{7}+\frac{7}{10}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{7}} =$

e. $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{2}} =$

10.62

a. $\dfrac{\frac{1}{6}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} =$

b. $\dfrac{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{5}} =$

c. $\dfrac{\frac{3}{8}+\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}+\frac{3}{4}} =$

d. $\dfrac{\frac{5}{2}-\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}-\frac{2}{5}} =$

e. $\dfrac{\frac{3}{5}-\frac{5}{12}}{\frac{6}{7}+\frac{3}{5}} =$

Breuken in breuken

In de vorige paragraaf hebben we gezien dat $13 : 7 = \frac{13}{7}$. Een breuk zoals $\frac{13}{7}$ kun je dus zien als het resultaat van een deling, de deling $13 : 7$ in dit geval. Daarom wordt $\frac{13}{7}$ ook wel uitgesproken als '13 gedeeld door 7' in plaats van als 'dertien zevenden'.

In veel toepassingen, bijvoorbeeld in de economie of in de natuurkunde, kom je formules tegen waarin breuken voorkomen met in de teller en de noemer zelf weer breuken. Bijvoorbeeld

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{7}}{\frac{4}{5}-\frac{2}{11}}$$

Onervaren rekenaars schrikken daarvan, maar daarvoor is geen enkele reden. Reken gewoon de teller en de noemer apart uit. De teller is $\frac{2}{3}+\frac{1}{7} = \frac{14}{21}+\frac{3}{21} = \frac{17}{21}$ en de noemer is $\frac{4}{5}-\frac{2}{11} = \frac{44}{55}-\frac{10}{55} = \frac{34}{55}$. De gehele breuk is dus

$$\frac{\frac{17}{21}}{\frac{34}{55}}$$

oftewel $\frac{17}{21} : \frac{34}{55}$. En omdat delen door een breuk hetzelfde is als vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk, is dit $\frac{17}{21} \times \frac{55}{34} = \frac{55}{42}$.

Andere notaties voor breuken

In plaats van een horizontale scheidingsstreep tussen teller en noemer wordt soms ook een schuine streep gebruikt: $13/7$ in plaats van $\frac{13}{7}$. Die schuine breukstreep wordt soms ook gebruikt als deelteken in plaats van de dubbele punt, bijvoorbeeld op rekenmachines. Dit onderstreept opnieuw dat er eigenlijk nauwelijks onderscheid is tussen een deling van twee natuurlijke getallen en de bijbehorende breuk.
Het kan om typografische redenen ook handiger zijn om de schuine-streepnotatie te gebruiken. De twee notaties worden bij 'breuken in breuken' ook wel samen gebruikt, vaak ook weer om de typografie overzichtelijker te maken, bijvoorbeeld

$$\frac{5/13}{12/7} \quad \text{of} \quad \frac{5}{13} \Big/ \frac{12}{7}$$

De volgende opgaven zijn gemengde opgaven.

Vereenvoudig de volgende breuken zoveel mogelijk:

10.63

a. $\frac{48}{36}$

b. $\frac{54}{81}$

c. $\frac{45}{126}$

d. $\frac{121}{132}$

e. $\frac{210}{196}$

10.64

a. $\frac{128}{72}$

b. $\frac{104}{78}$

c. $\frac{156}{120}$

d. $\frac{91}{105}$

e. $\frac{275}{300}$

Geef bij de volgende opgaven de uitkomst in een zoveel mogelijk vereenvoudigde vorm.

10.65

a. $\frac{5}{33} + \frac{9}{22} =$

b. $\frac{7}{24} - \frac{3}{16} =$

c. $\frac{13}{12} + \frac{4}{15} =$

d. $\frac{4}{9} \times \frac{4}{11} =$

e. $\frac{7}{5} : \frac{5}{7} =$

10.66

a. $\frac{27}{16} \times \frac{8}{15} =$

b. $\frac{4}{25} + \frac{24}{35} =$

c. $\frac{35}{48} \times \frac{40}{49} =$

d. $\frac{4}{9} - \frac{4}{11} =$

e. $\frac{21}{55} : \frac{7}{5} =$

10.67

a. $\frac{27}{16} - \frac{8}{15} =$

b. $\frac{4}{25} : \frac{24}{35} =$

c. $\frac{35}{48} + \frac{7}{8} =$

d. $\frac{44}{13} : \frac{121}{39} =$

e. $\frac{21}{55} + \frac{7}{5} =$

10.68

a. $\dfrac{\frac{5}{6} + \frac{2}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} =$

b. $\dfrac{\frac{3}{4} + \frac{4}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}} =$

c. $\dfrac{\frac{7}{8} + \frac{1}{3}}{\frac{4}{5} + \frac{1}{4}} =$

d. $\dfrac{\frac{3}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{5}} =$

e. $\dfrac{\frac{4}{5} - \frac{1}{7}}{\frac{6}{7} + \frac{2}{5}} =$

10.69

a. $\dfrac{\frac{5}{6} \times \frac{2}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} =$

b. $\dfrac{\frac{3}{4} + \frac{4}{3}}{\frac{3}{4} : \frac{1}{3}} =$

c. $\dfrac{\frac{7}{8} + \frac{1}{3}}{\frac{4}{5} \times \frac{1}{4}} =$

d. $\dfrac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{5}} =$

e. $\dfrac{\frac{4}{5} - \frac{1}{7}}{\frac{6}{7} : \frac{2}{5}} =$

Een overzicht van alle rekenregels

We geven nu een overzicht van alle rekenregels voor breuken. Twee algemene regels zijn:

> *Een breuk verandert niet als je teller en noemer allebei door een gemeenschappelijke deler deelt.*
>
> *Een breuk verandert niet als je teller en noemer allebei met hetzelfde getal vermenigvuldigt.*

In dat laatste geval mag het getal waarmee je teller en noemer vermenigvuldigt natuurlijk niet nul zijn, want anders krijg je $\frac{0}{0}$ (zie onder aan bladzijde 87).

Vereenvoudigen

Je vereenvoudigt een breuk als je teller en noemer deelt door een gemeenschappelijke deler. Wanneer je deelt door de *grootste gemeenschappelijke deler* (ggd) krijg je een breuk die niet verder te vereenvoudigen is.

Optellen en aftrekken

Je telt twee breuken bij elkaar op door ze eerst gelijknamig te maken en vervolgens de tellers bij elkaar op te tellen. Voorbeeld:

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{19}{12}$$

Je trekt twee breuken van elkaar af door ze eerst gelijknamig te maken en vervolgens de tellers van elkaar af te trekken. Voorbeeld:

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{10}{12}-\frac{9}{12}=\frac{1}{12}$$

Twee breuken maak je gelijknamig door als noemer een gemeenschappelijk veelvoud van de noemers te nemen. Als je het *kleinste gemeenschappelijke veelvoud* (kgv) neemt, houd je de noemers zo klein mogelijk.

Vermenigvuldigen en delen

Het product van twee breuken is de breuk met als teller het product van de tellers en als noemer het product van de noemers. Voorbeeld:

$$\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{28}$$

Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk. Voorbeeld:

$$\frac{5}{7}:\frac{3}{4}=\frac{5}{7}\times\frac{4}{3}=\frac{20}{21}$$

Breuken in beeld

Hieronder zijn alle breuken kleiner dan of gelijk aan 3 met een noemer die kleiner dan of gelijk aan 9 is, op getallenlijnen getekend. Hoe groter de noemer, hoe dichter ze bij elkaar liggen. Breuken zoals $\frac{8}{6}$ en $\frac{4}{3}$ die hetzelfde getal voorstellen, liggen recht onder elkaar.