

COMPLEXE GETALLEN

voor Wiskunde D

Jan van de Craats

Voorlopige versie, 11 juni 2007

Illustraties en L^AT_EX-opmaak: Jan van de Craats

Prof. dr. J. van de Craats is hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit

Copyright © 2006 Jan van de Craats

All rights reserved.
Alle rechten voorbehouden.

Leeswijzer

Wiskunde leer je vooral door veel te oefenen. De meeste hoofdstukken van dit boek beginnen daarom met opgaven op de linkerpagina. Je kunt er direct mee aan de slag en zodra je een opgave gemaakt hebt, kun je je antwoord achterin controleren.

Op de rechterbladzijden staat de theorie die je nodig hebt om de opgaven links te kunnen maken. Je kunt daar naar behoefte gebruik van maken. Kom je termen of begrippen tegen die daar niet verklaard worden, dan kun je via het trefwoordenregister dat achterin het boek staat, de plaats vinden waar die uitleg wél staat. Achterin is ook een formuleoverzicht opgenomen.

In dit boek werken we met een decimale punt, en niet met een decimale komma, in overeenstemming met wat thans algemeen gebruikelijk is in de internationale wetenschappelijke en technische literatuur.

Voorkennis en hulpmiddelen

De voorkennis die je bij dit boek nodig hebt, bestaat uit algebraïsche vaardigheden, met name kennis van tweedegraadsvergelijkingen en de *abc*-formule, kennis van goniometrie en exponentiële functies en verder vaardigheid in het differentiëren. Je vindt die stof in het *Basisboek wiskunde* van Jan van de Craats en Rob Bosch (Pearson Education Benelux, 2005, ISBN 90-430-1156-8) in de hoofdstukken 1 tot en met 6, 9, 10, 11, 16, 17, 18 en 20. Een rekenmachine met grafische mogelijkheden heb je niet nodig; een gewone rekenmachine met daarop wortels, e-machten en goniometrische en inverse goniometrische functies (sinus, cosinus, tangens, arctangens) is voldoende. Maar bij het merendeel van de opgaven zul je helemaal geen rekenmachine nodig hebben.

Het Griekse alfabet

α	A	alfa	ι	I	jota	ρ	P	rho
β	B	bèta	κ	K	kappa	σ	Σ	sigma
γ	Γ	gamma	λ	Λ	lambda	τ	T	tau
δ	Δ	delta	μ	M	mu	υ	Y	upsilon
ϵ	E	epsilon	ν	N	nu	φ	Φ	phi
ζ	Z	zèta	ξ	Ξ	xi	χ	X	chi
η	H	èta	\omicron	O	omicron	ψ	Ψ	psi
θ	Θ	thèta	π	Π	pi	ω	Ω	omega

Inhoudsopgave

Voorwoord	1
1 Rekenen met complexe getallen	4
1.1 Wortels uit negatieve getallen	5
1.2 De abc -formule	5
1.3 Het complexe vlak	7
1.4 Vermenigvuldigen en delen	9
2 De meetkunde van het complexe rekenen	12
2.1 Complexe getallen op de eenheidscirkel	13
2.2 De formules van Euler	15
2.3 De (r, φ) -notatie voor complexe getallen	17
2.4 Complexe getallen als vectoren	19
3 Wortels en polynomen	22
3.1 Wat zijn complexe n -demachtswortels?	23
3.2 Waarom wortels meerwaardig zijn	25
3.3 Over n -demachtswortels en n -degraadspolynomen	27
3.4 De hoofdstelling van de algebra	29
3.5 Reële polynomen	31
4 Lineaire recursies	34
4.1 Recursief gedefinieerde rijen	35
4.2 Lineaire recursies van orde 2	37
4.3 De rij van Fibonacci	39
4.4 Een oscillerende rij	41
4.5 Een oscillerende rij (vervolg)	43
4.6 Samenvallende wortels	45
4.7 Lineaire recursies van hogere orde	47
4.8 Realistische modellen	47
4.9 Een economisch voorbeeld	49
5 Lineaire differentiaalvergelijkingen	52
5.1 Inleiding	53
5.2 Lineaire differentiaalvergelijkingen van orde 2	55
5.3 Positieve discriminant	57
5.4 Discriminant nul	57

5.5	Negatieve discriminant	59
5.6	Lineaire differentiaalvergelijkingen van hogere orde	61
5.7	Realistische modellen	61
	Toegiften	65
T.1	Bewijzen van Euler	65
T.2	De complexe natuurlijke logaritme	69
T.3	Cirkels en koordenvierhoeken	71
T.4	De cirkels van Apollonius	74
T.5	Een bewijs van de Hoofdstelling van de algebra	76
T.6	De derdegraadsvergelijking	79
T.7	Vierde- en hogeregraadsvergelijkingen	89
	Antwoorden	93
	Formuleoverzicht	99
	Trefwoordenregister	101

Voorwoord

Complexe getallen worden in vrijwel alle toepassingen van de wiskunde gebruikt. Met name in de bètavakken, de techniek, de informatica en de econometrie. Je komt ze bijvoorbeeld tegen in de electrotechniek, de mechanica, de theoretische natuurkunde, de regeltechniek en de systeemtheorie, maar ook in de theorie van micro- en macro-economische modellen. In veel van de ons omringende landen is het onderwerp complexe getallen daarom een onderdeel van het middelbare-schoolcurriculum in de B-richtingen. Ook in ons land zou dat een goede zaak zijn. Zo ver zijn we nog niet, maar in het nieuwe vak Wiskunde D voor havo en vwo is complexe getallen wel een aanbevolen keuze-onderwerp. Dit boek is bedoeld als studiemateriaal daarbij.

Rekenen en toepassingen

In de eerste drie hoofdstukken worden de basisprincipes van het rekenen met complexe getallen uitgelegd. De hoofdstukken 4 en 5 geven toepassingen op het gebied van de lineaire recurrenente betrekkingen en de lineaire differentiaalvergelijkingen, onderwerpen die van belang zijn voor de economie, de econometrie, de exacte vakken en de techniek.

Spannende formules

Als je met complexe getallen gaat werken, kom je mysterieuze zaken tegen. Je ontdekt dan bijvoorbeeld dat $\sqrt{-37}$ een getal is waar je echt mee kunt rekenen. En dat een vierkantsvergelijking met een negatieve discriminant toch twee oplossingen heeft. Je leert ook dat elk complex getal precies zeven zevendemachtswortels heeft. Je maakt kennis met $i^2 = -1$ en met andere spannende formules zoals

$$e^{\varphi i} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \text{of} \quad e^{\pi i} + 1 = 0$$

Rekenen in het complexe vlak

Complexe getallen zijn mysterieus, zeker voor de niet-ingewijde. Maar niet zo mysterieus dat je er niets bij voor kunt stellen. Want net zoals je reële getallen kunt voorstellen als punten op een lijn (de reële getallenlijn), zo kun je complexe getallen voorstellen als punten in het vlak: het complexe vlak. Daarmee krijgen complexe getallen een meetkundige betekenis die het rekenen ermee aanschouwelijk maakt en daardoor enorm verduidelijkt.

Hoofdttekst, toepassingen en toegiften

De hoofdttekst van dit boek bestaat uit de hoofdstukken 1, 2 en 3. Iedereen die ook maar iets van complexe getallen wil weten, moet dat gedeelte, inclusief de opgaven, volledig doorwerken. De hoofdstukken 4 en 5 leggen daarna de wiskundige basis voor allerlei toepassingen die zowel voor de economische als voor de bèta-vervolgopleidingen van groot belang zijn. Maar bovendien zijn het mooie, afgeronde stukken wiskunde met een duidelijke probleemstelling en een volledige uitwerking. Ik geef in de tekst echter alleen maar een hint van enige toepassingsgebieden. De toepassingen zelf laat ik aan de vervolgopleidingen over.

Het boek eindigt met een aantal toegiften. Ze zijn bedoeld als verdiepingsstof. Ik denk dat vrij veel leerlingen ze met plezier zullen doorwerken. Ze gaan onder andere over 'abc-formules' voor hogeregraadsvergelijkingen, een onderwerp dat in het Italië van de zestiende eeuw de oorsprong was van de ontdekking van de complexe getallen. In de toegiften zul je kennismaken met echte uitdagende wiskunde waar grote geleerden prachtige bijdragen aan hebben geleverd. Je zou ze kunnen gebruiken als startpunt voor een praktische opdracht of een profielwerkstuk.

Genoeg inleidende woorden! Welkom in de wereld van de complexe getallen. Een wereld vol nieuwe wetten en regels die je een nieuwe kijk op de wiskunde zullen geven!

1 Rekenen met complexe getallen

In dit hoofdstuk leer je rekenen met complexe getallen. Ze vormen een getallensysteem dat een uitbreiding is van het bekende systeem van de reële getallen. Je leert ook hoe je complexe getallen kunt voorstellen als punten in het vlak. Maar voor complexe getallen gebruiken we niet de gewone vlakke coördinaten (x, y) maar een nieuwe notatievorm: $z = x + iy$. Met deze nieuwe notatie wordt rekenen met complexe getallen een eenvoudige zaak. Je leert hoe je daarmee complexe getallen moet optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

1 Rekenen met complexe getallen

Schrijf de volgende wortels in de vorm ri , waarbij r een positief reëel getal is. Geef exacte antwoorden en vereenvoudig daarbij de wortels zo veel mogelijk (schrijf bijvoorbeeld $3\sqrt{3}$ in plaats van $\sqrt{27}$). Laat ook geen wortels staan in noemers van breuken.

1.1

- $\sqrt{-3}$
- $\sqrt{-9}$
- $\sqrt{-8}$
- $\sqrt{-25}$
- $\sqrt{-15}$

1.2

- $\sqrt{-33}$
- $\sqrt{-49}$
- $\sqrt{-48}$
- $\sqrt{-45}$
- $\sqrt{-75}$

1.3

- $\sqrt{-\frac{1}{2}}$
- $\sqrt{-\frac{2}{3}}$
- $\sqrt{-\frac{4}{5}}$
- $\sqrt{-\frac{4}{3}}$
- $\sqrt{-\frac{6}{7}}$

1.4

- $\sqrt{-\frac{1}{5}}$
- $\sqrt{-\frac{3}{5}}$
- $\sqrt{-\frac{4}{7}}$
- $\sqrt{-\frac{9}{5}}$
- $\sqrt{-\frac{2}{9}}$

1.5 Bij het rekenen met wortels uit negatieve getallen moet je oppassen zoals blijkt uit de volgende paradoxale 'afleiding':

$$-1 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Probeer de vinger te leggen op de wonde plek! Met andere woorden, welk van de vier gelijkttekens is (of zijn) ten onrechte gezet, en waarom?

Los de volgende vierkantsvergelijkingen op. Geef ook hier exacte antwoorden en vereenvoudig de wortels.

1.6

- $x^2 - 2x + 2 = 0$
- $x^2 + 4x + 5 = 0$
- $x^2 + 2x + 10 = 0$
- $x^2 - 6x + 10 = 0$
- $x^2 - 4x + 8 = 0$

1.7

- $x^2 - 12x + 40 = 0$
- $x^2 - 4x + 6 = 0$
- $x^2 + 2x + 4 = 0$
- $x^2 - 6x + 12 = 0$
- $x^2 + 8x + 20 = 0$

1.1 Wortels uit negatieve getallen

Iedereen weet dat er geen reëel getal x bestaat waarvoor $x^2 = -1$. Maar wat als we ons nu eens *indenken* dat er wél zo'n getal zou bestaan? Een getal, we noemen het "i" (van *imaginair*, dat wil zeggen denkbeeldig) waarvoor dus geldt dat

$$i^2 = -1$$

Je zou dat getal dan een *wortel uit* -1 kunnen noemen: $i = \sqrt{-1}$. Ook uit andere negatieve getallen kun je dan een wortel trekken. Zo is $6i$ een wortel uit -36 want $(6i)^2 = 6i \times 6i = 36 \times i^2 = 36 \times (-1) = -36$. Net zo kun je laten zien dat $\sqrt{-13} = \sqrt{13}i$, of dat $\sqrt{-12} = \sqrt{12}i = 2\sqrt{3}i$ (bedenk daarbij dat $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$).

Wat we eigenlijk hebben gedaan, is het bepalen van een oplossing van de vergelijking $x^2 = -a$, waarbij a een positief getal is. We vonden $\sqrt{a}i$ als oplossing, maar natuurlijk is $-\sqrt{a}i$ dan ook een oplossing: $(-\sqrt{a}i)^2 = (-1)^2(\sqrt{a})^2 i^2 = 1 \cdot a \cdot (-1) = -a$. De volledige oplossing van de vergelijking $x^2 = -a$ is dus $x = \pm\sqrt{a}i$.

1.2 De *abc*-formule

Als je een getal i hebt waarvoor $i^2 = -1$, kun je ook elke vierkantsvergelijking oplossen, zelfs als de discriminant negatief is. Bijvoorbeeld $x^2 + 2x + 5 = 0$. Kijk maar:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 5 &= 0 \\ (x+1)^2 + 4 &= 0 \\ (x+1)^2 &= -4 \end{aligned}$$

Dit geeft $x+1 = \pm 2i$ oftewel $x = -1 + 2i$ of $x = -1 - 2i$.

Waar het op neer komt, is dat je gewoon de bekende *abc*-formule kunt toepassen. De oplossingen van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ worden daarbij gegeven door

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Als de discriminant $b^2 - 4ac$ negatief is, is $4ac - b^2$ positief, en dan geldt dus $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(4ac - b^2)(-1)} = \sqrt{4ac - b^2}i$. In het voorbeeld hierboven was $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$ en $b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$, en dus geldt inderdaad

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i.$$

1 Rekenen met complexe getallen

Bereken de volgende complexe getallen, teken ze in in het complexe vlak en bereken hun absolute waarde.

1.8

- $(1 - 2i) + (3 - 4i)$
- $2i - (4 - 2i)$
- $(2 - 2i) + (-1 + 2i)$
- $(4 - 6i) - (1 - 3i)$
- $(2 - i) + (3 - 2i)$

1.10

- i^3
- i^4
- i^5
- i^{10}
- i^{2006}

1.9

- $(1 - 2i)(3 - 4i)$
- $2i(4 - 2i)$
- $(2 - 2i)(2 + 2i)$
- $(1 - 3i)^2$
- $(2 - i)^2$

1.11

- $(-i)^5$
- $(2i)^3$
- $(-2i)^7$
- $(1 + i)^3$
- $(1 - i)^3$

Alle complexe getallen z waarvoor geldt dat $\operatorname{Re}(z) = 5$ vormen samen de verticale lijn $x = 5$ in het complexe vlak. Teken de volgende lijnen in het complexe vlak.

1.12

- $\operatorname{Re}(z) = 4$
- $\operatorname{Re}(z) = -3$
- $\operatorname{Im}(z) = 2$
- $\operatorname{Im}(z) = -2$
- $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z)$

1.13

- $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 1$
- $\operatorname{Re}(z) = 2\operatorname{Im}(z)$
- $\operatorname{Re}(z) - 2\operatorname{Im}(z) = 1$
- $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 5$
- $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)$

Alle complexe getallen z waarvoor geldt dat $|z| = 5$ vormen samen de cirkel met straal 5 en middelpunt 0. Ga zelf na dat alle complexe getallen z waarvoor geldt dat $|z - 1| = 5$ vormen met straal 5 en middelpunt 1. Teken nu de volgende cirkels in het complexe vlak en geef bij elke cirkel het middelpunt en de straal.

1.14

- $|z| = 4$
- $|z - 1| = 3$
- $|z - 2| = 2$
- $|z - 3| = 1$
- $|z + 1| = 5$

1.15

- $|z + 3| = 4$
- $|z - i| = 5$
- $|z + 2i| = 1$
- $|z - 1 - i| = 3$
- $|z + 3 - i| = 2$

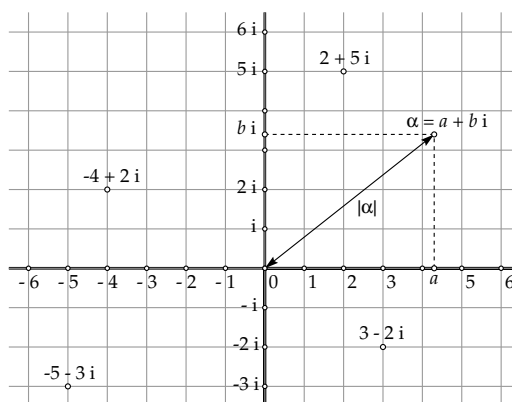
1.3 Het complexe vlak

Bij het oplossen van vierkantsvergelijkingen zijn we nu ook getallen van de vorm $a + bi$ tegengekomen. We noemen ze *complexe getallen*. Bijvoorbeeld $-1 + 2i$ of $3 - 5i$. Je kunt zulke getallen bij elkaar *optellen*: $(-1 + 2i) + (3 - 5i) = 2 - 3i$. Of van elkaar *aftrekken*: $(-1 + 2i) - (3 - 5i) = -4 + 7i$. Of met elkaar *vermenigvuldigen*:

$$(-1 + 2i)(3 - 5i) = -3 + 5i + 6i - 10i^2 = -3 + 11i + 10 = 7 + 11i.$$

Gewoon haakjes uitwerken dus, en gebruiken dat $i^2 = -1$.

Een complex getal $a + bi$ ligt helemaal vast door de *twee reële getallen* a en b . Reële getallen kun je voorstellen als punten op een lijn, de *reële getallenlijn*. Op net zo'n manier kun je complexe getallen voorstellen als punten in het vlak, het *complexe vlak*. Daarin moet dan eerst een coördinatenstelsel gekozen zijn. Het complexe getal $a + bi$ hoort dan bij het punt met de coördinaten (a, b) :



Voor de punten op de x -as is $b = 0$. In plaats van $a + 0i$ schrijven we dan gewoon a . En voor de punten op de y -as geldt $a = 0$. Die schrijven we dan niet als $0 + bi$ maar gewoon als bi . En voor $1i$ schrijven we natuurlijk gewoon i . Daarmee is ook het mysterieuze getal i een punt in het complexe vlak geworden: het is het punt met coördinaten $(0, 1)$.

De x -as noemen we voortaan de *reële as* en de getallen daarop de *reële getallen*. De y -as heet de *imaginaire as* en de getallen daarop heten de *imaginaire getallen*.

Complexe getallen worden vaak aangegeven met de letter z of met Griekse letters zoals α (alfa). We schrijven dan $z = x + yi$ of $\alpha = a + bi$.

Als $\alpha = a + bi$ een complex getal is, heet a het *reële deel*, notatie $a = \text{Re}(\alpha)$, en b het *imaginaire deel*, notatie $b = \text{Im}(\alpha)$. Het imaginaire deel is dus een reëel getal! Het getal $\sqrt{a^2 + b^2}$ heet de *absolute waarde* van α , notatie $|\alpha|$. De absolute waarde van α is de afstand van α tot de oorsprong (stelling van Pythagoras). (Als α een reëel getal is, is $|\alpha|$ dus de gewone absolute waarde van α .)

1 Rekenen met complexe getallen

Bereken de volgende quotiënten van complexe getallen, dat wil zeggen schrijf elk quotiënt in de vorm $a + bi$ met a en b reëel.

1.16

a. $\frac{1}{3 - 4i}$

b. $\frac{3}{4 - 2i}$

c. $\frac{2 - 2i}{-1 + 2i}$

d. $\frac{4 - 6i}{1 - 3i}$

e. $\frac{2 - i}{3 - 2i}$

1.17

a. $\frac{1 - 2i}{3 + 4i}$

b. $\frac{2i}{1 - 2i}$

c. $\frac{1}{i}$

d. $\frac{1 - 3i}{i}$

e. $\frac{1 + i}{1 - i}$

1.18

a. $\frac{3i}{4 + 3i}$

b. $\frac{3 + i}{1 - 2i}$

c. $\frac{2 - i}{-1 + 2i}$

d. $\frac{2 - i}{1 + 2i}$

e. $\frac{1 + 2i}{2 - i}$

1.19

a. $\frac{1 - 2i}{4i}$

b. $\frac{2 - i}{3 + 2i}$

c. $\frac{1 + i}{4i}$

d. $\frac{2 - i}{-i}$

e. $\frac{1 + 3i}{3 - i}$

1.4 Vermenigvuldigen en delen

Vermenigvuldigen van complexe getallen is een kwestie van haakjes uitwerken en gebruik maken van $i^2 = -1$. We hebben er in de vorige paragraaf al mee geoefend. Dat gaat altijd als volgt:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i\end{aligned}$$

Delen is het omgekeerde van vermenigvuldigen. We zullen je een rekentruc leren om het quotiënt van twee complexe getallen snel en eenvoudig te berekenen. Eerst met een voorbeeld:

$$\frac{1 - 2i}{2 + 3i} = \frac{(1 - 2i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{-4 - 7i}{4 - 6i + 6i - 9i^2} = \frac{-4 - 7i}{13} = -\frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$$

We hebben bij de derde stap in de noemer het *reële* getal 13 gekregen, en daarmee konden we vervolgens het quotiënt uitrekenen, dat wil zeggen schrijven in de vorm $a + bi$.

De truc bestaat blijkbaar uit het vermenigvuldigen van teller en noemer met *hetzelfde* complexe getal (daardoor verandert het quotiënt niet). Dat getal is de zogenaamde *geconjugeerde* van de noemer. De *geconjugeerde* van een complex getal $\alpha = a + bi$ is het getal $a - bi$, notatie $\bar{\alpha}$. Je krijgt $\bar{\alpha}$ door het teken van het imaginaire deel van α om te klappen. In plaats van het *geconjugeerde* complexe getal zegt men ook wel het *toegevoegd* complexe getal (dat is de letterlijke vertaling).

De bovenstaande truc werkt omdat daardoor in de noemer een getal komt van de vorm

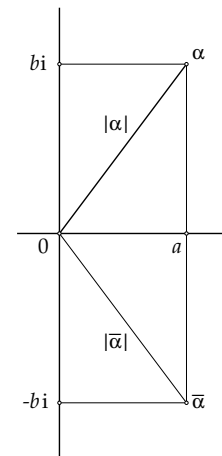
$$\alpha \bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

Dat is altijd een *positief reëel getal* (behalve als $a = b = 0$, maar dan is $\alpha = 0$, en ook bij complexe getallen kun je niet door 0 delen).

In de vorige paragraaf hebben we de *absolute waarde* $|\alpha|$ van α gedefinieerd als $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$. We zien dus dat $\alpha \bar{\alpha} = |\alpha|^2$ en ook dat $|\bar{\alpha}| = |\alpha|$.

Wat je van het bovenstaande moet onthouden, is eigenlijk alleen maar dit:

*Bij vermenigvuldigen moet je haakjes uitwerken en gebruiken dat $i^2 = -1$.
Bij delen moet je teller en noemer vermenigvuldigen met de *geconjugeerde* van de noemer.*



2 De meetkunde van het complexe rekenen

Dit hoofdstuk gaat over meetkundige aspecten van het rekenen met complexe getallen. Je leert een nieuwe notatie kennen, de (r, φ) -notatie, die verwant is aan poolcoördinaten. Met deze notatie worden de rekenregels voor vermenigvuldigen, delen en machtsverheffen veel begrijpelijker en bovendien heel gemakkelijk te hanteren. Daarbij speelt een beroemde formule van Leonhard Euler een belangrijke rol.

2 De meetkunde van het complexe rekenen

De volgende complexe getallen liggen allemaal op de eenheidscirkel. Teken ze en geef daarna hun argument (in radialen) in de vorm $\varphi + 2k\pi$ (waarbij verondersteld wordt dat k een willekeurig geheel getal is). Voorbeeld: $\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Geef exacte antwoorden. Maak daarbij gebruik van de exacte waarden die je kent voor de sinus en de cosinus van $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ en $\frac{\pi}{2}$.

2.1

- $-i$
- -1
- 1
- $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

2.2

- $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$
- $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$
- $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$
- $-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$
- $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

2.3

In deze opgave is $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ een complex getal op de eenheidscirkel.

- Bewijs dat $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.
- Bewijs dat $\bar{z} = \frac{1}{z}$.
- Bewijs dat $\arg(z^2) = 2 \arg(z)$.
- Bewijs dat $\arg(z^3) = 3 \arg(z)$.
- Bewijs dat hieruit volgt dat $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi$.
- Bewijs nu dat in het algemeen voor elk natuurlijk getal n geldt dat

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

(Dit resultaat staat bekend als de *regel van De Moivre*. Het is vrij lastig om die te bewijzen zonder complexe getallen te gebruiken.)

Bereken de volgende complexe getallen zonder haakjes uit te werken. Maak wel voor jezelf steeds een tekening.

2.4

- $(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i)^2$
- $(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i)^3$
- $(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)^3$
- $(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i)^5$
- $(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i)(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i)^2$

2.5

- $(-i)/(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)$
- $(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i)^2/(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)$
- $(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i)/(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)^3$
- $(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i)^6/(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)$
- $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i)^3/(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i)^3$

2.1 Complexe getallen op de eenheidscirkel

Elk punt op de eenheidscirkel (de cirkel met straal 1 en de oorsprong als middelpunt) heeft in coördinaten uitgedrukt de vorm $(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Hierbij is φ de hoek die de voerstraal (de verbindingslijn met de oorsprong) maakt met de positieve x -as (φ is de Griekse letter 'phi'). We meten φ in radialen, tegen de klok in (180° is gelijk aan π radialen). Die hoek is dan tot op gehele veelvoud van 2π na bepaald.

In het complexe vlak is een punt op de eenheidscirkel dus altijd van de vorm $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Inderdaad geldt voor zo'n punt dat

$$|\cos \varphi + i \sin \varphi| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \sqrt{1} = 1$$

De hoek φ heet het *argument* van z , met als notatie $\varphi = \arg(z)$.

Wat gebeurt er als we twee van zulke punten $z_1 = \cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1$ en $z_2 = \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2$ met elkaar vermenigvuldigen? Dan is

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) \end{aligned}$$

Maar volgens bekende gonioregels is

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \quad \text{en} \\ \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 &= \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned}$$

en dus is

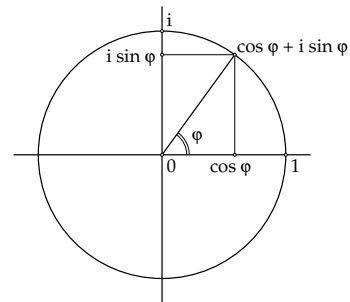
$$z_1 z_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Dit is dus weer een getal op de eenheidscirkel met als argument de som $\varphi_1 + \varphi_2$ van de argumenten van z_1 en z_2 . Met andere woorden:

Het product $z_1 z_2$ van twee complexe getallen op de eenheidscirkel is weer een getal op de eenheidscirkel, en wel het getal dat als argument de som van de argumenten van z_1 en z_2 heeft.

Voor het quotiënt van twee complexe getallen geldt:

Het quotiënt $\frac{z_1}{z_2}$ van twee complexe getallen op de eenheidscirkel is weer een getal op de eenheidscirkel, en wel het getal dat als argument het verschil van de argumenten van z_1 en z_2 heeft.



2 De meetkunde van het complexe rekenen

Door $\varphi = \pi$ in te vullen in Eulers eerste formule krijg je $e^{\pi i} = -1$ (ga na!). Ook dit is een beroemde formule van Euler. De drie belangrijkste constanten uit de wiskunde, e , π en i worden erin verenigd. Bereken nu

2.6

- $e^{-\pi i}$
- $e^{2\pi i}$
- $e^{\frac{1}{2}\pi i}$
- $e^{3\pi i}$
- $e^{4\pi i}$

2.7

- $e^{-\frac{3}{2}\pi i}$
- $e^{\frac{2}{3}\pi i}$
- $e^{\frac{5}{2}\pi i}$
- $e^{-\frac{13}{6}\pi i}$
- $e^{2006\pi i}$

2.8

- $e^{-\pi i} e^{\frac{2}{3}\pi i}$
- $e^{3\pi i} e^{-2\pi i}$
- $e^{\frac{1}{3}\pi i} e^{-\pi i}$
- $e^{\frac{1}{2}\pi i} / e^{\frac{3}{2}\pi i}$
- $e^{-\frac{1}{4}\pi i} / e^{\frac{3}{4}\pi i}$

2.9

- $e^{-\frac{3}{4}\pi i} / e^{\frac{3}{4}\pi i}$
- $e^{\frac{2}{3}\pi i} / e^{\frac{1}{6}\pi i}$
- $e^{\frac{5}{2}\pi i} e^{3\pi i}$
- $e^{\frac{7}{6}\pi i} / e^{\frac{2}{3}\pi i}$
- $e^{\pi i} / e^{4\pi i}$

2.10

- Bewijs dat $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$
- Bewijs dat $\frac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$, met andere woorden, dat $(e^{i\varphi})^{-1} = e^{-i\varphi}$.
- Bewijs dat $(e^{i\varphi})^2 = e^{2i\varphi}$.
- Bewijs dat $(e^{i\varphi})^n = e^{ni\varphi}$ voor alle gehele n .

(De laatste drie opgaven onderstrepen opnieuw dat je met 'imaginaire' e-machten op de vertrouwde manier kunt rekenen.)

2.11 Ook bij differentiëren en integreren gedraagt de imaginaire e-macht zich zoals verwacht mag worden:

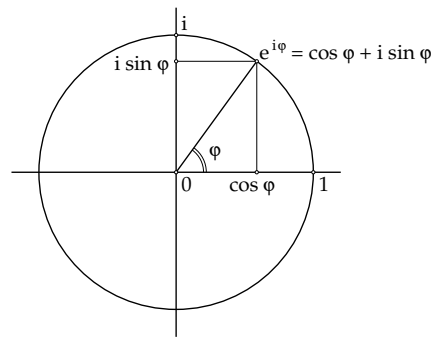
- Bewijs dat $\frac{d}{d\varphi}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = i(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.
- Concludeer hieruit dat $\frac{d}{d\varphi} e^{i\varphi} = i e^{i\varphi}$ zoals je op grond van de kettingregel en de regel voor het differentiëren van een e-macht zou verwachten.
Opmerking: in termen van differentiaal luidt dit $d(e^{i\varphi}) = i e^{i\varphi} d\varphi$.
- (Voor lezers die kunnen integreren:) Laat zien dat $\int e^{i\varphi} d\varphi = -i e^{i\varphi} + C$.
- (Idem:) Bereken hiermee $\int_0^\pi e^{i\varphi} d\varphi$ en $\int_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\varphi$.

2.2 De formules van Euler

Halverwege de achttiende eeuw bewees de grote wiskundige Leonhard Euler de formule

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Wij gaan hier niet op Eulers argumenten in, maar presenteren deze formule op dit moment gewoon als een definitie, of, zo je wilt, als een *verkorte notatie*. In plaats van $\cos \varphi + i \sin \varphi$ schrijven we voortaan $e^{i\varphi}$ (of $e^{\varphi i}$). Let op: het is niet de bekende, reële e-machtsfunctie die hier staat, want de exponent $i\varphi$ is geen reeel getal, maar een *imaginair* getal. En natuurlijk zit er meer achter: later zullen we e^z voor willekeurige complexe getallen z definiëren (bladzijde 16, voorlaatste opgave).



In de vorige paragraaf hebben we afgeleid dat

$$(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

In de nieuwe notatie ziet dat er een stuk overzichtelijker uit:

$$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Net als bij gewone e-machten geldt dus ook hier: *bij het vermenigvuldigen van imaginaire e-machten worden de exponenten bij elkaar opgeteld*. En natuurlijk geldt ook:

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Bij het delen van imaginaire e-machten worden de exponenten van elkaar afgetrokken.

Als je in de eerste formule van deze paragraaf $-\varphi$ in plaats van φ invult, krijg je

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

Tel je de twee formules bij elkaar op, dan krijg je $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi$ oftewel

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

Trek je ze van elkaar af, dan krijg je $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin \varphi$ oftewel

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Ook deze twee beroemde formules zijn van Euler afkomstig.

2 De meetkunde van het complexe rekenen

Schrijf de volgende complexe getallen in de (r, φ) -notatie. Gebruik daarbij een rekenmachine en geef je antwoord in 4 decimalen nauwkeurig.

2.12

- a. $1 + 2i$
- b. $4 - 2i$
- c. $2 - 3i$
- d. $-2 - 3i$
- e. -3

2.13

- a. $2 + i$
- b. $2 - i$
- c. $-i$
- d. $-5 + i$
- e. $-3i$

2.14 Schrijf de volgende complexe getallen in de notatie $z = x + iy$. Gebruik daarbij een rekenmachine en geef je antwoord in 4 decimalen nauwkeurig.

- a. $2e^{2i}$
- b. $3e^{-i}$
- c. $0.2e^{0.3i}$
- d. $1.2e^{2.5i}$
- e. $e^{3.1415i}$

2.15 In deze opgave is een complex getal $z = re^{i\varphi}$ gegeven. Geef nu ook de volgende getallen in de (r, φ) -notatie:

- a. \bar{z}
- b. z^2
- c. $(\bar{z})^5$
- d. $\frac{1}{z^5}$
- e. $\frac{1}{z}$

2.16 Bewijs met behulp van de (r, φ) -notatie dat voor alle complexe getallen z_1 en z_2 geldt:

- a. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- b. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

2.17 In de vorige paragraaf hebben we $e^{i\varphi}$ gedefinieerd als $\cos \varphi + i \sin \varphi$. We definiëren nu in het algemeen e^z voor willekeurige $z = x + iy$ door $e^z = e^x e^{iy}$.

- a. Bewijs dat $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ voor elke z_1 en z_2 .
- b. Bewijs dat $|e^z| = e^x$ en $\arg e^z = y$ als $z = x + iy$.
- c. Bewijs dat $e^{z+2k\pi i} = e^z$ voor elk geheel getal k . (De e -macht is dus een *periodieke* functie van z met periode $2\pi i$.)

2.18 Gegeven zijn een complex getal $\alpha = a + ib$ en een reële variabele t . De functie $f(t)$ wordt gedefinieerd door $f(t) = e^{\alpha t} = e^{at} e^{ibt}$ (zie ook de vorige opgave). Bewijs met behulp van de productregel dat

$$\frac{d}{dt} e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t}$$

2.3 De (r, φ) -notatie voor complexe getallen

Elk complex getal $z = x + iy$ kun je schrijven in de vorm

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

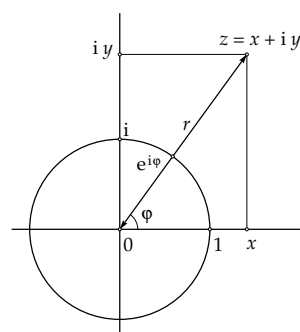
waarin $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ de absolute waarde van z , en $\varphi = \arg(z)$ het argument van z is, dat wil zeggen de hoek die de voerstraal (de verbindingslijn van z met de oorsprong) met de positieve x -as maakt.

Voor elke $z \neq 0$ is het argument (in radialen) weer tot op gehele veelvouden van 2π na bepaald. Voor $z = 0$ is er geen argument; soms neemt men echter $\arg(0) = 0$.

De verkorte notatie uit de vorige paragraaf geeft

$$z = r e^{i\varphi}$$

Men noemt dit wel de (r, φ) -notatie of *polaire notatie* (omdat ze verwant is met poolcoördinaten). De (r, φ) -notatie is bijzonder handig bij het vermenigvuldigen en delen:



$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Bij vermenigvuldigen worden de absolute waarden met elkaar vermenigvuldigd en de argumenten bij elkaar opgeteld. Bij delen worden de absolute waarden gedeeld en de argumenten van elkaar afgetrokken.

Het is belangrijk om de omrekenformules voor het omzetten van de (x, y) -notatie ($z = x + iy$) naar de (r, φ) -notatie ($z = r e^{i\varphi}$) en omgekeerd paraat te hebben. Hier zijn ze:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Er zitten een paar addertjes onder het gras bij de berekening van φ als je x en y kent. In de eerste plaats is φ niet gedefinieerd als $x = y = 0$. Verder geldt: als $x = 0, y > 0$ dan is $\varphi = \frac{\pi}{2}$, en als $x = 0, y < 0$ dan is $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

In alle andere gevallen kun je φ berekenen met behulp van de arctangens-functie (de inverse van de tangens). Maar let op: de arctangens geeft altijd een uitkomst tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$. Voor getallen $z = x + iy$ in het linkerhalfvlak (dat wil zeggen met $x < 0$) moet je daar dan nog π bij optellen, dus

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} + 2k\pi \text{ als } x > 0 \quad \text{en} \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} + \pi + 2k\pi \text{ als } x < 0$$

2 De meetkunde van het complexe rekenen

2.19 Hieronder is steeds een paar complexe getallen (α, β) gegeven. Bereken telkens het complexe getal dat hoort bij de vector met α als beginpunt en β als eindpunt. Maak voor jezelf ook telkens even een tekening.

- $(i, -2i)$
- $(1 - i, -2)$
- $(-2 + 3i, 1 - 2i)$
- $(4, -4)$
- $(8i, 8i)$

2.20 Bepaal de vergelijking van de volgende cirkels in de vorm

$$z\bar{z} - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} - r^2 = 0$$

- De cirkel met middelpunt i en straal 3
- De cirkel met middelpunt $1 - i$ en straal $\sqrt{2}$
- De cirkel met middelpunt 1 en straal 1
- De cirkel met middelpunt $-2 + i$ en straal 2
- De cirkel met middelpunt $1 - 2i$ en straal 1

2.21 Ga na of de volgende vergelijkingen cirkels voorstellen. Zo ja, bepaal dan middelpunt en straal.

- $z\bar{z} - iz + i\bar{z} = 0$
- $z\bar{z} + (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 2$
- $z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} + 4 = 0$
- $z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} + 3 = 0$
- $z\bar{z} + (2 - i)z + (2 + i)\bar{z} - 1 = 0$

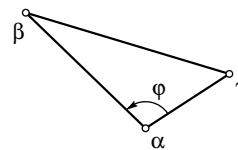
2.22 Een cirkel met middelpunt $\alpha = a + bi$ en straal r kun je ook voorstellen als $z = \alpha + re^{i\varphi}$ waarbij $z = x + iy$ een willekeurig punt op de cirkel is. Dit is een soort *parametervoorstelling*, waarbij φ de (reële) parameter is, die bijvoorbeeld van 0 tot 2π loopt. Laat zien hoe dit samenhangt met de 'gewone' parametervoorstelling voor een cirkel in (x, y) -coördinaten:

$$x = a + r \cos \varphi, \quad y = b + r \sin \varphi$$

2.23 Stel dat $\varphi = \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. Bewijs dat $\frac{\beta}{\alpha} \frac{\bar{\alpha}}{\beta} = e^{2i\varphi}$.

2.24 Stel dat α, β, γ de hoekpunten van een driehoek zijn en dat φ de grootte in radialen is van de hoek bij hoekpunt α . Bewijs dat

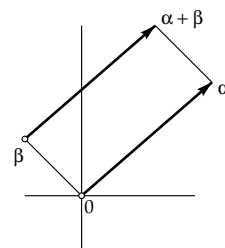
$$\frac{(\beta - \alpha)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})}{(\gamma - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha})} = e^{2i\varphi}$$



2.4 Complexe getallen als vectoren

Een vector in het vlak kun je je voorstellen als een pijl die van een *beginpunt* naar een *eindpunt* loopt. Evenwijdige pijlen met dezelfde richting en dezelfde grootte stellen dezelfde vector voor.

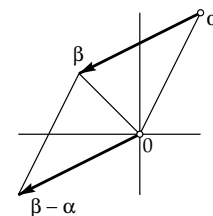
In het complexe vlak kun je bij elk complex getal α een vector maken door de pijl te tekenen die van de oorsprong naar het punt α loopt. Die vector kan dan ook worden voorgesteld door de pijl die van een willekeurig punt β naar het punt $\beta + \alpha$ loopt want de punten $0, \alpha, \alpha + \beta, \beta$ vormen de hoekpunten van een parallellogram. Omgekeerd hoort bij elke vector een complex getal, namelijk het getal dat je krijgt als eindpunt wanneer je die vector in de oorsprong laat beginnen.



De vectorvoorstelling is handig als je het *verschil* $\beta - \alpha$ van twee complexe getallen α en β in beeld wilt brengen:

$\beta - \alpha$ is de vector (pijl) die van α naar β loopt.

Let op: om het complexe getal $\beta - \alpha$ te vinden, moet je die pijl dus in de oorsprong laten beginnen. Voorbeeld: $\alpha = 1 + 2i, \beta = -1 + i$ dus $\beta - \alpha = -2 - i$.



De vectorvoorstelling is ook handig bij het werken met cirkels. Als C een cirkel is met middelpunt α en straal r dan geldt dus voor elk punt z op C dat

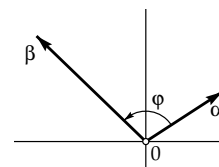
$$|z - \alpha| = r$$

Je kunt je $z - \alpha$ voorstellen als de pijl die van α naar z loopt, en die moet dus lengte r hebben.

Soms is het ook handig om niet met de absolute waarde te werken, maar gebruik te maken van $|w|^2 = w\bar{w}$. Dan kun je de vergelijking van de cirkel C met middelpunt α en straal r dus schrijven als

$$(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = r^2$$

We sluiten dit stukje meetkunde af met nog een opmerking over quotiënten. Bij gegeven α en β is $\frac{\beta}{\alpha}$ een complex getal waarvan het argument gelijk is aan de hoek φ van de vector α naar de vector β , dat wil zeggen de hoek waarover je de pijl van 0 naar α moet draaien om hem op de pijl van 0 naar β te krijgen. Er geldt immers dat $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{|\beta|}{|\alpha|} e^{i\varphi}$ waarbij $\varphi = \arg(\beta) - \arg(\alpha)$.



3 Wortels en polynomen

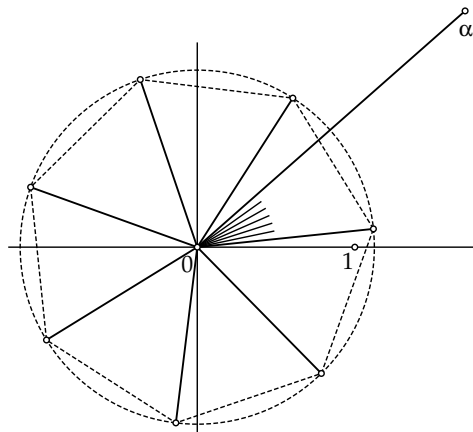
In dit hoofdstuk maak je kennis met complexe wortels en complexe polynomen. Je leert dat elk complex getal precies n complexe n -demachtswortels heeft, en bovendien dat die wortels in het vlak de hoekpunten vormen van een regelmatige n -hoek met de oorsprong als middelpunt. Je leert vervolgens wat complexe n -degraadspolynomen en complexe n -degraadsvergelijkingen zijn. De *hoofdstelling van de algebra* zegt dat elke complexe n -degraadsvergelijking precies n oplossingen heeft, mits je ze op de juiste manier telt. Tot slot leer je dat elk reëel n -degraadspolynoom gesplitst kan worden in reële lineaire factoren en reële kwadratische factoren met een negatieve discriminant.

3 Wortels en polynomen

Bepaal alle hieronder gegeven n -demachtswortels in de (r, φ) -notatie (voor elke n -demachtswortel zijn er n mogelijkheden). Geef exacte antwoorden of antwoorden in vier decimalen nauwkeurig. Geef telkens ook met een tekening aan hoe die n -demachtswortels de hoekpunten vormen van een regelmatige n -hoek met de oorsprong als centrum.

Als voorbeeld zijn hieronder de zeven zevendemachtswortels $\sqrt[7]{\alpha}$ getekend voor $\alpha = 1.7 + 1.5i$. Hiervoor geldt $|\alpha| \approx 2.2672$ en $\arg(\alpha) \approx 0.7230 + 2k\pi$ zodat $|\sqrt[7]{\alpha}| = \sqrt[7]{|\alpha|} \approx 1.1240$ en $\arg(\sqrt[7]{\alpha}) = \frac{1}{7} \arg(\alpha) \approx 0.1033 + \frac{2k\pi}{7}$ dus

$$\sqrt[7]{\alpha} \approx 1.1240 e^{(0.1033 + \frac{2k\pi}{7})i} \quad \text{voor } k = 0, 1, \dots, 6$$



3.1

- $\sqrt[3]{i}$
- $\sqrt[3]{-i}$
- $\sqrt[3]{1}$
- $\sqrt[3]{8}$
- $\sqrt[3]{8i}$

3.3

- $\sqrt[4]{-1}$
- $\sqrt[4]{-i}$
- $\sqrt[5]{1}$
- $\sqrt[4]{3-4i}$
- $\sqrt[6]{6i}$

3.2

- $\sqrt[3]{1+i}$
- $\sqrt[3]{-27}$
- $\sqrt[3]{-27i}$
- $\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i}$
- $\sqrt[2]{4}$

3.4

- $\sqrt[4]{1-i}$
- $\sqrt[5]{-32}$
- $\sqrt[4]{81i}$
- $\sqrt[2]{2i}$
- $\sqrt[3]{3+3i}$

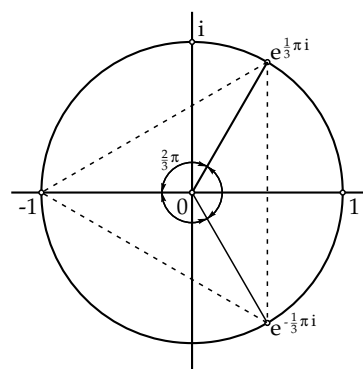
3.1 Wat zijn complexe n -demachtswortels?

We weten al dat $\sqrt{-1} = i$ want $i^2 = -1$. Of eigenlijk zouden we beter kunnen zeggen dat $\sqrt{-1} = \pm i$ want ook $(-i)^2 = -1$. Maar wat zou $\sqrt[3]{-1}$ zijn? Het moet een complex getal z zijn waarvoor geldt dat $z^3 = -1$. Kennen we zulke getallen? Jazeker, $z = -1$ voldoet, want $(-1)^3 = -1$. Maar ook $z = e^{\frac{1}{3}\pi i}$ voldoet, want

$$z^3 = \left(e^{\frac{1}{3}\pi i}\right)^3 = e^{3\left(\frac{1}{3}\pi i\right)} = e^{\pi i} = -1$$

En natuurlijk voldoet ook $z = e^{-\frac{1}{3}\pi i}$ want daarvoor geldt dat $z^3 = e^{-\pi i} = -1$.

We vinden dus *drie* complexe getallen z waarvoor geldt dat $z^3 = -1$. Alledrie kunnen ze aanspraak maken op de titel $\sqrt[3]{-1}$. Anders dan bij de reële wortels maken we in de wiskunde van de complexe getallen geen afspraken over een voorkeursbehandeling voor een van die drie wortels. Dat blijkt namelijk om allerlei redenen niet handig te zijn. Als we dus in het vervolg $\sqrt[3]{-1}$ opschrijven, moet uit de context duidelijk zijn welke van de drie wortels we bedoelen.



De voerstralen van de drie derdemachtswortels van -1 maken onderling hoeken van $\frac{2}{3}\pi$. De wortels zelf zijn de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek met de oorsprong als centrum. Waarom dat zo is, wordt duidelijk als we de bepaling van $\sqrt[3]{-1}$ nog wat beter bekijken.

We zoeken complexe getallen $z = r e^{i\varphi}$ waarvoor $z^3 = -1$. Maar $z^3 = (r e^{i\varphi})^3 = r^3 e^{3i\varphi}$ en dat moet gelijk zijn aan -1 . Omdat $|-1| = 1$ en $\arg(-1) = \pi + 2k\pi$ moet $r^3 = 1$ zijn en $3\varphi = \pi + 2k\pi$. Hieruit volgt $r = 1$ (want r is een reëel getal dat niet-negatief is) en $\varphi = \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}k\pi$. Voor $k = 0, k = 1$ en $k = 2$ krijgen we

$$z = e^{\frac{1}{3}\pi i}, \quad z = e^{\pi i} = -1, \quad z = e^{\frac{5}{3}\pi i} = e^{-\frac{1}{3}\pi i}$$

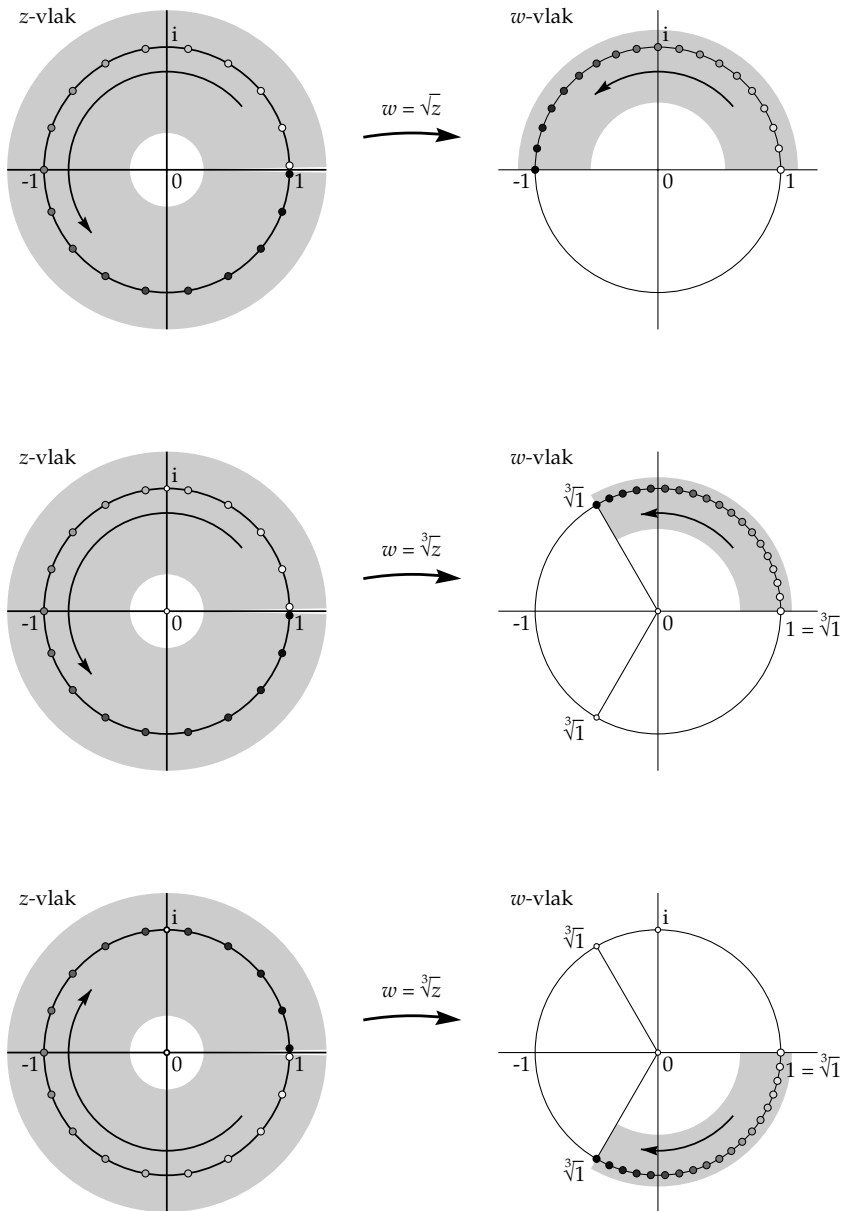
Voor alle andere gehele waarden van k krijgen we ook weer één van deze drie wortels. Je ziet dat het argument telkens met $\frac{2}{3}\pi$ toeneemt, en na drie stappen ben je weer op je uitgangspunt terug. Je kunt dit in het algemeen doen voor de derdemachtswortel uit een willekeurig complex getal $\alpha \neq 0$: in alle gevallen vind je *drie* derdemachtswortels, en hun voerstralen maken onderling hoeken van $\frac{2}{3}\pi$.

Nog algemener, nu voor een willekeurig positief geheel getal n :

Elk complex getal $\alpha = r e^{i\varphi}$ met $r = |\alpha| > 0$ heeft precies n n -demachtswortels, namelijk

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{1}{n}\varphi + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{voor } k = 0, 1, \dots, n-1$$

3 Wortels en polynomen



3.2 Waarom wortels meerwaardig zijn

In de vorige paragraaf hebben we de n -demachtswortel uit een complex getal α gedefinieerd als

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r} e^{(\frac{1}{n}\varphi + \frac{2k\pi}{n})i} \quad \text{voor } k = 0, 1, \dots, n-1$$

waarbij er dus (tenzij $\alpha = 0$) precies n verschillende mogelijkheden voor zo'n wortel zijn. Bij de gewone vierkantswortel uit een positief reëel getal, bijvoorbeeld $\sqrt{4}$, zijn er in principe ook 2 mogelijkheden, namelijk 2 en -2 , maar binnen de reële getallen hebben we de vaste afspraak dat we onder $\sqrt{4}$ altijd de *positieve* wortel verstaan, dus $\sqrt{4} = 2$.

Waarom doen we bij de complexe wortels niet ook iets dergelijks? Je zou hier toch ook heel goed een afspraak kunnen maken, bijvoorbeeld: kies altijd de wortel met een minimaal niet-negatief argument. De reden dat zoiets niet gedaan wordt, is dat die complexe wortels vaak gebruikt worden als functies of onderdelen van functies, en dat je bij het gebruik van zulke functies alleen maar last zou hebben van een dergelijke afspraak. Hieronder lichten we dat toe aan de hand van enige voorbeelden.

Neem eerst functie $w = \sqrt{z}$. Een 'grafiek' van zo'n functie kun je niet zó maar maken, want zowel de z -waarden als de functiewaarden bevinden zich in een vlak, dus voor een grafiek zou je vier dimensies nodig hebben. In plaats daarvan werken we met een z -vlak en een w -vlak naast elkaar. Hiernaast zie je in de bovenste figuur zo'n illustratie. We bekijken de wortelfunctie $w = \sqrt{z}$ op een ringgebied om de eenheidscirkel in het z -vlak, waarbij we z laten beginnen in 1 en vervolgens tegen de klok in langs de eenheidscirkel laten lopen. Als we $\sqrt{1} = 1$ kiezen in het beginpunt, loopt \sqrt{w} vanaf $w = 1$ ook langs de eenheidscirkel, maar met de halve snelheid want in dit geval is

$$w = \sqrt{z} = \sqrt{e^{i\varphi}} = (e^{i\varphi})^{1/2} = e^{\frac{1}{2}i\varphi}$$

Na één volledige omloop in het z -vlak is $w = \sqrt{z}$ in het w -vlak dus bij de *andere* wortel aangekomen, met andere woorden, nu geldt $\sqrt{1} = -1$. Zouden we nu een vaste afspraak voor de betekenis van \sqrt{z} hebben, dan zouden we onderweg ergens een sprong in de functiewaarden moeten maken, en dat is gekunsteld.

Hetzelfde doet zich voor bij ieder pad in het z -vlak dat één maal rond de oorsprong loopt: je komt dan altijd van de ene 'tak' van de wortel op de andere terecht. De oorsprong heet daarom een *vertakkingspunt*.

Voor hogere demachtswortels geldt iets dergelijks. Hiernaast is aangegeven hoe je bij de functie $w = \sqrt[3]{z}$ door in het z -vlak één maal om de oorsprong te lopen van $\sqrt[3]{1} = 1$ bij $\sqrt[3]{1} = e^{2\pi i/3}$ komt (tegen de klok in) of bij $\sqrt[3]{1} = e^{-2\pi i/3}$ (met de klok mee). Ook hier zou een vaste afspraak voor $\sqrt[3]{z}$ alleen maar lastig zijn.

3 Wortels en polynomen

Bepaal een tweedegraadspolynoom van de vorm $p(z) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$ dat de getallen z_1 en z_2 als nulpunten heeft, waarbij

3.5

- a. $z_1 = 1, z_2 = -1$
- b. $z_1 = 1, z_2 = 5$
- c. $z_1 = 1, z_2 = i$
- d. $z_1 = i, z_2 = -2i$
- e. $z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i$

3.6

- a. $z_1 = 0, z_2 = -i$
- b. $z_1 = 1, z_2 = 2$
- c. $z_1 = 0, z_2 = -2i$
- d. $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 1 - 2i$
- e. $z_1 = 1 + i, z_2 = -1 + i$

Bepaal een derdegraadspolynoom van de vorm $p(z) = z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$ met z_1, z_2 en z_3 als nulpunten waarbij

3.7

- a. $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = 0$
- b. $z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = 0$
- c. $z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = 1$
- d. $z_1 = i, z_2 = 2i, z_3 = 3i$
- e. $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = i$

3.8

- a. $z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = 3$
- b. $z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i, z_3 = 1$
- c. $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = 2$
- d. $z_1 = i, z_2 = 0, z_3 = 1$
- e. $z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = 2i$

3.3 Over n -demachtswortels en n -degraadspolynomen

We hebben gezien dat er drie derdemachtswortels uit -1 zijn, namelijk $-1, e^{\frac{1}{3}\pi i}$ en $e^{-\frac{1}{3}\pi i}$. Voor het gemak schrijven we nu $\rho = e^{\frac{1}{3}\pi i}$ en $\bar{\rho} = e^{-\frac{1}{3}\pi i}$ (ρ is de Griekse letter 'rho'). De drie wortels zijn dan dus $-1, \rho$ en $\bar{\rho}$.

De derdemachtswortels uit -1 zijn de complexe getallen z waarvoor geldt dat $z^3 = -1$, met andere woorden, het zijn de oplossingen van de *derdegraadsvergelijking*

$$z^3 + 1 = 0$$

Nog weer anders gezegd, het zijn de *nulpunten* van het *derdegraadspolynoom* $z^3 + 1$. Maar bekijk nu eens de vergelijking

$$(z - (-1))(z - \rho)(z - \bar{\rho}) = 0$$

Het is duidelijk dat de oplossingen hiervan ook gelijk zijn aan $-1, \rho$ en $\bar{\rho}$. Zou het linkerlid misschien gelijk zijn aan $z^3 + 1$?

Werk de haakjes uit:

$$(z - (-1))(z - \rho)(z - \bar{\rho}) = (z + 1)(z^2 - (\rho + \bar{\rho})z + \rho\bar{\rho})$$

Maar $\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ dus $\rho + \bar{\rho} = 1$ en $\rho\bar{\rho} = 1$ (ga na!), zodat inderdaad

$$(z + 1)(z^2 - (\rho + \bar{\rho})z + \rho\bar{\rho}) = (z + 1)(z^2 - z + 1) = z^3 - z^2 + z + z^2 - z + 1 = z^3 + 1$$

Wat we in dit bijzondere geval gezien hebben, blijkt in het algemeen te gelden:

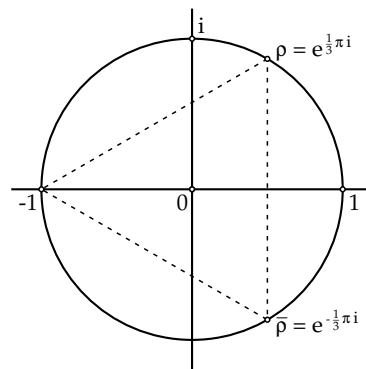
Als een n -degraadspolynoom

$$p(z) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0$$

n verschillende nulpunten z_1, z_2, \dots, z_n heeft, dan kan $p(z)$ geschreven worden als

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

In het bovenstaande voorbeeld was $p(z) = z^3 + 1$ en $z_1 = -1, z_2 = \rho, z_3 = \bar{\rho}$. In de vorige paragraaf hebben we telkens de n -demachtswortels van een getal α bepaald. Het bijbehorende polynoom was dan telkens van de vorm $p(z) = z^n - \alpha$. We hebben gezien dat er dan inderdaad steeds n nulpunten (de n -demachtswortels) zijn, behalve in het flauwe geval dat $\alpha = 0$. Hoe het in het algemeen zit bij een n -degraadspolynoom, behandelen we in de volgende paragraaf.



3 Wortels en polynomen

3.9 Hieronder zijn telkens een polynoom $p(z)$ en een getal α gegeven. Ga na dat steeds geldt dat $p(\alpha) = 0$ en bepaal vervolgens het polynoom $q(z)$ waarvoor geldt dat $p(z) = (z - \alpha)q(z)$.

- $p(z) = z^4 - z^3 - 2z^2, \quad \alpha = -1$
- $p(z) = z^4 - z^3 + 3z^2 - 3z, \quad \alpha = 1$
- $p(z) = z^5 - iz^4 - z + i, \quad \alpha = i$
- $p(z) = z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4, \quad \alpha = 2$
- $p(z) = z^4 - 1, \quad \alpha = -i$
- $p(z) = z^4 + 2z^2 + 1, \quad \alpha = i$

3.10 Onderzoek bij elk van de onderdelen van de vorige opgave de multipliciteit van het nulpunt α en bepaal vervolgens ook de andere nulpunten van het polynoom $p(z)$.

3.11 Deze opgave bevat een bewijs van de factorstelling. In feite is het een formalisering van de methode die je al hebt toegepast bij opgave 3.9.

Stel dat $p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$ een n -degraadspolynoom is met $n > 1$ en $\alpha_n \neq 0$ en stel dat z_0 een willekeurig complex getal is. Definieer de getallen $\beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \dots, \beta_0$ achtereenvolgens door

$$\begin{aligned}\beta_{n-1} &= \alpha_n \\ \beta_{n-2} &= \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} z_0 \\ \beta_{n-3} &= \alpha_{n-2} + \beta_{n-2} z_0 \\ &\dots = \dots \\ \beta_0 &= \alpha_1 + \beta_1 z_0\end{aligned}$$

(Voor elke β_k behalve β_{n-1} heb je dus de eerder gedefinieerde β_{k+1} nodig.)
Definieer vervolgens het polynoom $q(z)$ door

$$q(z) = \beta_{n-1} z^{n-1} + \beta_{n-2} z^{n-2} + \dots + \beta_1 z + \beta_0$$

- Toon aan dat er een constante γ is waarvoor geldt dat

$$p(z) - (z - z_0)q(z) = \gamma$$

Hint: werk de haakjes uit.

- Toon aan dat $\gamma = p(z_0)$.
- Ga na dat je hiermee ook de factorstelling hebt bewezen.

3.4 De hoofdstelling van de algebra

Voordat we verder gaan, geven we eerst een formele definitie van de term polynoom en een aantal daarmee verband houdende veel gebruikte termen.

Definitie: Een *polynoom* (Engels: *polynomial*) is een functie van de vorm $p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$. De complexe getallen $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ heten de *coëfficiënten*, en het complexe getal z heet de *variabele*. We veronderstellen altijd dat $\alpha_n \neq 0$ (want anders kun je de term $\alpha_n z^n$ beter weglaten). De andere coëfficiënten kunnen wél nul zijn. Het getal n heet de *graad* van het polynoom.

Bij elk complex getal z geeft zo'n polynoom een complex getal $p(z)$ als *functiewaarde*. Als voor een zekere z_0 geldt dat $p(z_0) = 0$ dan heet z_0 een *nulpunt* van het polynoom. Het getal z_0 is dan een *oplossing* van de vergelijking

$$\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0$$

Zo'n vergelijking heet een *n-degraadsvergelijking*. In plaats van een oplossing van de vergelijking zegt men ook wel een *wortel* van de vergelijking, zelfs al komen er in de schrijfwijze van zo'n oplossing geen wortels voor.

Voor elk *n*-degraadspolynoom $p(z)$ met $n > 1$ geldt de volgende stelling.

Factorstelling: *Als $p(z)$ een nulpunt z_0 heeft, dan bestaat er een polynoom $q(z)$ waarvoor geldt dat $p(z) = (z - z_0)q(z)$. Je kunt dan dus een factor $(z - z_0)$ van $p(z)$ afsplitsen.*

Een eerstegraadspolynoom heet ook wel een *lineair* polynoom; de bijbehorende vergelijking noemt men dan ook vaak een *lineaire* vergelijking. Een tweedegraadsvergelijking heet ook wel een *kwadratische* vergelijking of *vierkantsvergelijking*. Vierkantsvergelijkingen kun je oplossen met de *abc-formule*. Complexe vierkantsvergelijkingen hebben altijd twee complexe oplossingen z_1 en z_2 . Het bijbehorende polynoom $p(z) = \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$ kan dan geschreven worden als $p(z) = \alpha_2 (z - z_1)(z - z_2)$. Als de discriminant nul is, vallen z_1 en z_2 samen en dan geldt dus $p(z) = \alpha_2 (z - z_1)^2$.

In het algemeen geldt voor complexe *n*-degraadspolynomen de volgende stelling, die bekend staat als de *hoofdstelling van de algebra* en die voor het eerst bewezen is door C.F. Gauss in het begin van de negentiende eeuw.

Hoofdstelling van de algebra: *Bij elk *n*-degraads polynoom $p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$ met $n \geq 1$ zijn er *n* complexe getallen z_1, \dots, z_n zo, dat $p(z) = \alpha_n (z - z_1) \dots (z - z_n)$.*

De getallen z_1, \dots, z_n zijn de nulpunten van $p(z)$. Ze hoeven niet verschillend te zijn. Komt een nulpunt k maal voor, dan spreekt men van een *k-voudig* nulpunt; k heet de *multipliciteit* van het nulpunt. Elk *n*-degraadspolynoom met $n \geq 1$ heeft dus precies *n* complexe nulpunten als je ze elk met hun juiste multipliciteit telt.

3 Wortels en polynomen

3.12 Splits de volgende reële polynomen in reële lineaire factoren en reële kwadratische factoren met een negatieve discriminant.

(Hint: bepaal eerst alle complexe nulpunten.)

- a. $z^3 + 1$
- b. $z^3 - 1$
- c. $z^4 - 1$
- d. $z^5 - 32$
- e. $z^6 + 27$
- f. $z^4 + 2z^2 + 1$
- g. $z^4 - 2z^2 + 2$

3.13 Stel dat n een oneven getal is en dat

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

een reëel n -degraadspolynoom is. Ook zonder gebruik te maken van complexe getallen kun je bewijzen dat $p(x)$ minstens één reëel nulpunt heeft, namelijk door $p(x)$ te schrijven als

$$p(x) = x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

en het gedrag van $p(x)$ voor grote positieve en grote negatieve x -waarden met elkaar te vergelijken. Geef zo'n bewijs.

Over het oplossen van n -degraadsvergelijkingen

Bij vierkantsvergelijkingen kan men de oplossingen vinden met de abc -formule. Ook voor derdegraads- en vierdegraadsvergelijkingen zijn er zulke exacte formules. Die zijn echter een stuk ingewikkelder; voor de liefhebbers behandelen we ze in de Toegiften van dit boek. Voor n -degraadsvergelijkingen met $n \geq 5$ bestaan er geen vergelijkbare algebraïsche methodes om op een dergelijke manier alle oplossingen te vinden. In zulke gevallen zal men zijn toevlucht vaak nemen tot numerieke methodes waarmee de nulpunten kunnen worden benaderd. De *hoofdstelling van de algebra* garandeert dus dat er altijd n oplossingen zijn (mits geteld met de juiste multipliciteit), maar de stelling geeft geen algemene methode om ze te vinden!

3.5 Reële polynomen

Wanneer alle coëfficiënten van een polynoom reële getallen zijn, noemen we het een *reëel polynoom*. Het is dan van de vorm

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

voor zekere reële getallen a_n, \dots, a_0 . We veronderstellen weer dat $a_n \neq 0$. Ook zo'n reëel polynoom heeft n complexe nulpunten, maar die hoeven niet reëel te zijn. Zo heeft $p(z) = z^2 + 1$ geen reële nulpunten. We kunnen wel direct zeggen dat er *hoogstens* n reële nulpunten zijn. Omdat reële polynomen natuurlijk veel voorkomen, is het goed om er een aantal speciale eigenschappen van af te leiden. De belangrijkste is de volgende stelling.

Stelling: *Als $z_0 = x_0 + i y_0$ een niet-reëel nulpunt is van het reële polynoom $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ dan is de geconjugeerde $\bar{z}_0 = x_0 - i y_0$ ook een nulpunt van $p(z)$.*

Het bewijs, dat heel eenvoudig is, berust op drie eigenschappen die onmiddellijk uit de definitie van geconjugeerde volgen:

1. Als a een reëel getal is, dan is $\bar{a} = a$.
2. Voor elk tweetal complexe getallen α en β geldt $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$.
3. Voor elk tweetal complexe getallen α en β geldt $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$.

Uit de derde eigenschap volgt in het bijzonder dat $\overline{z^k} = (\bar{z})^k$ voor elke k .

Bewijs: Stel $z_0 = x_0 + i y_0$ is een nulpunt van $p(z)$, dus $p(z_0) = 0$. Dan geldt

$$\begin{aligned} p(\bar{z}_0) &= a_n (\bar{z}_0)^n + a_{n-1} (\bar{z}_0)^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 \\ &= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} \\ &= \overline{p(z_0)} = \overline{0} = 0 \end{aligned}$$

Als er in de ontbinding $p(z) = a_n(z - z_1) \dots (z - z_n)$ een factor $(z - z_k)$ is waarvoor $z_k = x_k + i y_k$ niet reëel is, dan is er dus ook een factor $(z - \bar{z}_k)$. We nemen ze samen en werken de haakjes uit:

$$(z - z_k)(z - \bar{z}_k) = z^2 - (z_k + \bar{z}_k)z + z_k \bar{z}_k = z^2 - 2x_k z + x_k^2 + y_k^2$$

Dit is een reëel kwadratisch polynoom met discriminant $4x_k^2 - 4(x_k^2 + y_k^2) = -4y_k^2$. Die is negatief, zoals verwacht. Afsplitsen van die kwadratische factor geeft een polynoom van graad $n - 2$ waarop we weer hetzelfde kunnen toepassen, enzovoort. We hebben hiermee bewezen:

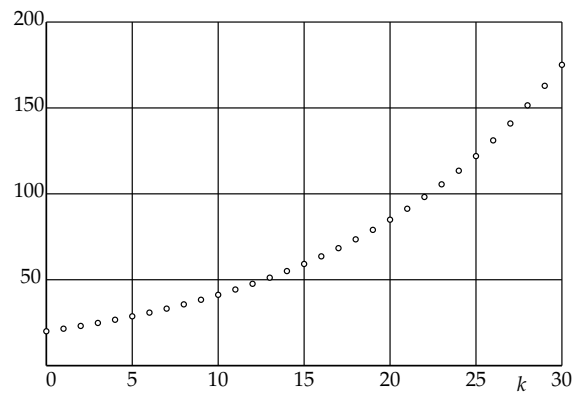
Stelling: *Elk reëel polynoom kan geschreven worden als een product van reële lineaire polynomen en reële kwadratische polynomen met een negatieve discriminant.*

Een direct gevolg is dat de graad van een reëel polynoom zonder reële nulpunten altijd even is. Bijgevolg heeft elk reëel polynoom van oneven graad minstens één reëel nulpunt.

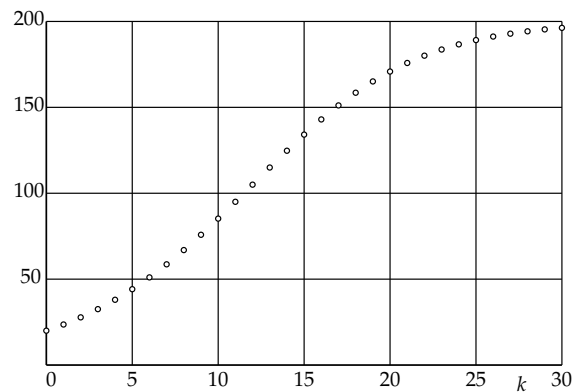
4 Lineaire recursies

Dit hoofdstuk gaat over reële getallenrijen die door een lineaire recurrente betrekking gedefinieerd worden. Een voorbeeld dat daarbij een prominente rol zal spelen, is de bekende rij van Fibonacci. Met behulp van complexe getallen zullen we een volledig overzicht geven van de methodes om uit zo'n betrekking een formule af te leiden voor de k -de term van zo'n rij. Alle theorie uit de vorige twee hoofdstukken wordt daarbij toegepast.

4 Lineaire recursies



Een voorbeeld van een discreet exponentieel groeimodel, gegeven door de recurrente betrekking $x_{k+1} = g x_k$. Hier is $x_0 = 20$ en $g = 1.075$ genomen.



Een voorbeeld van een discreet logistisch groeimodel, gegeven door de recurrente betrekking $x_{k+1} = x_k + c x_k \left(1 - \frac{x_k}{M}\right)$. Hier is $x_0 = 20$, $c = 0.2$ en $M = 200$ genomen.

4.1 Recursief gedefinieerde rijen

Veel verschijnselen in de werkelijkheid kunnen gemodelleerd worden door een rij reële getallen

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots$$

die aan bepaalde wetmatigheden voldoet. Stel bijvoorbeeld dat je de groei van een bacteriënpopulatie wilt modelleren. In zo'n model zou je onder x_k de populatieomvang kunnen verstaan k uur na een zeker aanvangstijdstip. Een heel eenvoudig model wordt beschreven door

$$x_{k+1} = g x_k \quad \text{voor } k = 0, 1, 2, \dots$$

Hierbij neem je dus aan dat de populatie elk uur met een vaste groeifactor g toeneemt. Omdat $x_1 = g x_0$, $x_2 = g x_1 = g^2 x_0$, $x_3 = g x_2 = g^3 x_0$, enzovoort, geldt voor alle k dat

$$x_k = g^k x_0$$

Dit heet een *discreet exponentieel groeimodel*. De wetmatigheid $x_{k+1} = g x_k$ heet een *recursieve definitie* omdat elk element van de rij (behalve de startwaarde x_0) in zijn voorganger wordt uitgedrukt. In het algemeen heet een wetmatigheid van de vorm

$$x_{k+1} = f(x_k) \quad \text{voor } k = 0, 1, 2, \dots$$

waarbij $f(x)$ een gegeven functie is, een *recurrente betrekking van de eerste orde*. Een voorbeeld hiervan is

$$x_{k+1} = x_k + c x_k \left(1 - \frac{x_k}{M}\right) \quad \text{voor } k = 0, 1, 2, \dots$$

die het zogenaamde *discrete logistische groeimodel* beschrijft. Dit is een model voor begrensde groeiprocessen.

Het kan ook zijn dat elke x_{k+1} van zijn twee voorganger x_k en x_{k-1} afhangt. Dan spreekt men van een recurrente betrekking *van de tweede orde*. Een bekend voorbeeld is de *rij van Fibonacci*, die gegeven wordt door

$$x_{k+1} = x_k + x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

en de twee *startwaarden* $x_0 = x_1 = 1$. Het is niet moeilijk om die rij voort te zetten:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Elke term is immers de som van zijn twee voorgangers. Maar lastiger is het om een formule te geven die x_k geeft als functie van k .

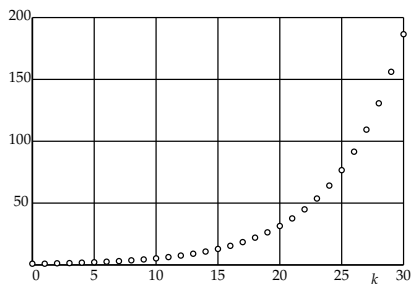
We hoeven ons niet te beperken tot recurrente betrekkingen van orde 1 of 2. Hangt x_{k+1} af van zijn n voorgangers $x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-n+1}$ dan spreekt men van een *recurrente betrekking van de n -de orde*. Er zijn dan nog n startwaarden nodig om de rij te helemaal vast te leggen.

4 Lineaire recursies

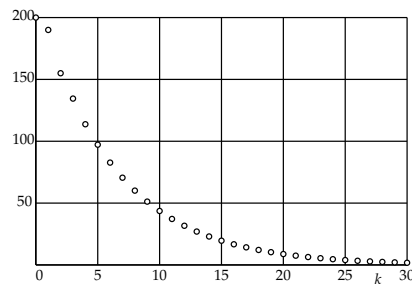
Hieronder zie je enige voorbeelden van oplossingsrijen van lineaire recurrente betrekkingen van de tweede orde, dat wil zeggen betrekkingen van de vorm

$$x_{k+1} = p x_k + q x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

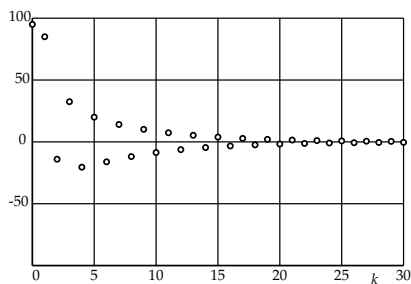
De grafieken geven een indruk van de grote verscheidenheid aan verschijningsvormen van zulke rijen. Telkens zijn de waarden van p en q en de startwaarden x_0 en x_1 gegeven.



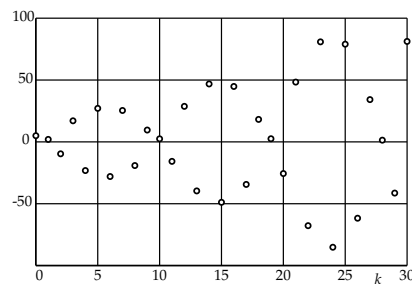
$$p = 0.5, q = 0.83, x_0 = 1, x_1 = 1$$



$$p = 0.5, q = 0.3, x_0 = 200, x_1 = 190$$



$$p = -0.5, q = 0.3, x_0 = 95, x_1 = 85$$



$$p = -2, q = -1.13, x_0 = 5, x_1 = 2$$

4.1 Bereken in elk van de hierboven gegeven gevallen de discriminant en de wortels van de karakteristieke vergelijking. Rond je antwoorden af op vier decimalen.

4.2 Lineaire recursies van orde 2

Een recurrente betrekking van de vorm

$$x_{k+1} = p x_k + q x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

waarbij p en q willekeurige gegeven constanten zijn, heet een *lineaire recurrente betrekking van de tweede orde*. (Iets vollediger luidt de vakterm: *homogene lineaire recurrente betrekking van de tweede orde met constante coëfficiënten* maar wij zullen die uitgebreide terminologie hier niet verder gebruiken of toelichten.) We zullen in dit hoofdstuk een algemene oplossingsmethode presenteren, dat wil zeggen een methode waarmee je een formule kunt vinden die x_k uitdrukt in k en de startwaarden x_0 en x_1 . In bepaalde gevallen, afhankelijk van de constanten p en q , zullen we daarbij complexe getallen gebruiken.

Het idee is als volgt. We laten de startwaarden voorlopig even terzijde, en concentreren ons op de recurrente betrekking zelf. Geïnspireerd door het discrete exponentiële groeimodel proberen we of er oplossingen zijn van de vorm $x_k = \alpha^k$. Invullen in de recurrente betrekking geeft dan

$$\alpha^{k+1} = p \alpha^k + q \alpha^{k-1}$$

Delen door α^{k-1} en alles naar het linkerlid brengen geeft vervolgens

$$\alpha^2 - p \alpha - q = 0$$

Dit heet de *karakteristieke vergelijking* van de recurrente betrekking. Het is een kwadratische vergelijking waaraan α blijkaar moet voldoen. Je ziet dat k er niet meer in voorkomt! De *abc*-formule geeft de oplossingen:

$$\alpha_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

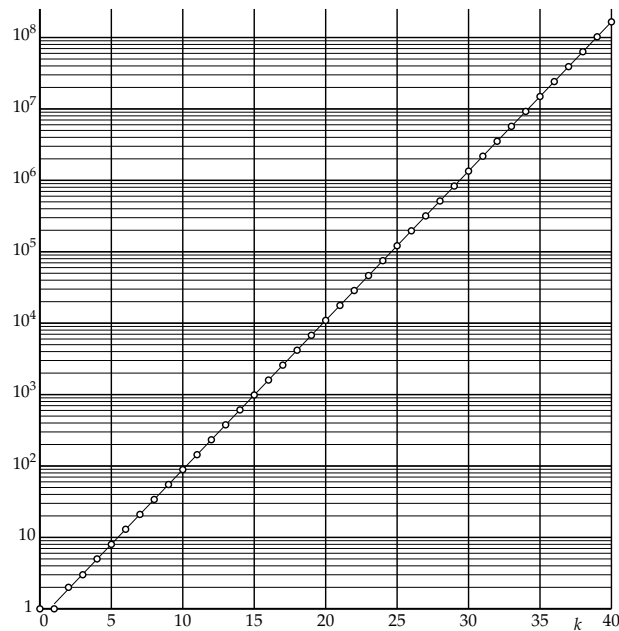
De aard van de oplossingen hangt af van de discriminant $D = p^2 + 4q$. Als $D > 0$ is, zijn de twee oplossingen reëel, als $D = 0$ zijn ze reëel en vallen ze samen, en als $D < 0$ zijn ze toegevoegd complex. Elke oplossing α van de karakteristieke vergelijking geeft een oplossingsrij $\{\alpha^k\}$ van de lineaire recurrente betrekking.

We behandelen de drie gevallen $D > 0$, $D < 0$ en $D = 0$ aan de hand van voorbeelden. Maar eerst merken we op dat voor lineaire recurrente betrekkingen het *superpositiebeginsel* geldt: als $\{x_k\}$ en $\{y_k\}$ allebei oplossingsrijen zijn, dan is voor elke keuze van A_1 en A_2 ook de *lineaire combinatie* $\{z_k\} = \{A_1 x_k + A_2 y_k\}$ van de twee rijen een oplossing. Invullen geeft namelijk

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= A_1 x_{k+1} + A_2 y_{k+1} = A_1 (p x_k + q x_{k-1}) + A_2 (p y_k + q y_{k-1}) \\ &= p (A_1 x_k + A_2 y_k) + q (A_1 x_{k-1} + A_2 y_{k-1}) \\ &= p z_k + q z_{k-1} \end{aligned}$$

dus ook de rij $\{z_k\}$ is een oplossingsrij.

4.2 Omdat de rij van Fibonacci zo snel stijgt, is het lastig er een grafiek van te maken. Hieronder is dat gedaan met een logaritmische schaalverdeling op de verticale as. Daarbij worden dus niet de punten (k, x_k) getekend maar de punten (k, y_k) waarbij $y_k = \log x_k$.



- Verklaar de getallen die bij de verticale as genoteerd staan.
- Neem de afstand tussen de horizontale lijnen die gemarkeerd zijn als '1' en '10' als lineaire eenheid op de verticale as. Op welke hoogtes zijn de tussenliggende horizontale lijnen dan getekend?
- Op de bladzijde hiertegenover is aangetoond dat $x_k = A_1\alpha_1^k + A_2\alpha_2^k$, waarbij A_1, A_2, α_1 en α_2 de daar berekende waarden hebben. Ook is aangetoond dat $A_2\alpha_2^k \rightarrow 0$ als $k \rightarrow \infty$, met andere woorden, dat x_k op den duur vrijwel gelijk wordt aan $A_1\alpha_1^k$. Verklaar hiermee waarom de getekende punten vrijwel op een rechte lijn liggen. Die lijn is ook in de figuur getekend.
- Die rechte lijn heeft een vergelijking van de vorm $y = a + bk$ voor zekere constanten a en b . Geef de exacte waarden van a en b en ga na of die waarden in overeenstemming zijn met de tekening.

4.3 De rij van Fibonacci

Bij de rij van Fibonacci is $p = q = 1$ en dan is $D = p^2 + 4q = 5$ positief. De twee reële oplossingen zijn $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ze geven twee oplossingsrijen van de recurrenente betrekking $x_{k+1} = x_k + x_{k-1}$, namelijk

$$1, \alpha_1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \dots$$

en

$$1, \alpha_2, \alpha_2^2, \alpha_2^3, \dots$$

Geen van beide voldoen ze aan de startwaarden $x_0 = x_1 = 1$, maar daar valt wel wat aan te doen door een geschikte *lineaire combinatie* te nemen, dat wil zeggen een rij van de vorm $x_k = A_1 \alpha_1^k + A_2 \alpha_2^k$. Voor elke paar A_1 en A_2 voldoet die rij ook aan de recurrenente betrekking, en naar blijken zal kun je A_1 en A_2 zo kiezen, dat $x_0 = 1$ en $x_1 = 1$ geldt. Er moet dan namelijk gelden dat

$$\begin{aligned} (x_0 = 1) & \quad A_1 + A_2 = 1 \\ (x_1 = 1) & \quad A_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + A_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{aligned}$$

Dit is een stelsel van twee vergelijkingen waaruit je A_1 en A_2 kunt oplossen. Het resultaat (zelf doen!) is $A_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, $A_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ zodat

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha_1^{k+1} - \alpha_2^{k+1})$$

Daarmee is de gezochte formule voor x_k gevonden!

Het is verbazingwekkend dat deze uitdrukking voor elke k een *geheel* getal voorstelt. Wie het niet gelooft, controleert het maar! Controleer in elk geval zelf dat $x_0 = 1$ en $x_1 = 1$.

Omdat $\alpha_1 \approx 1.6180339887$ geldt $\alpha_1 > 1$ waardoor $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_1^{k+1} = \infty$. Voor α_2 geldt $\alpha_2 \approx -0.6180339887$ dus $|\alpha_2| < 1$ zodat $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_2^{k+1} = 0$. De rij $\{\alpha_2^k\}$ gaat zeer snel naar nul, en dat betekent dat x_k voor grote k vrijwel gelijk is aan $\frac{1}{\sqrt{5}} \alpha_1^{k+1}$. Omdat x_k altijd een geheel getal is, kun je x_k vinden door deze benadering af te ronden. Zo geldt bijvoorbeeld $\frac{1}{\sqrt{5}} \alpha_1^{41} \approx 165580140.99$ en dus is $x_{40} = 165580141$.

De bovenstaande oplossingsmethode is toepasbaar bij lineaire recurrenente betrekkingen van de tweede orde wanneer de discriminant van de karakteristieke vergelijking positief is. De reële oplossingen daarvan leveren twee speciale 'basisoplossingsrijen' $\{\alpha_1^k\}$ en $\{\alpha_2^k\}$. Bij gegeven startwaarden x_0 en x_1 kun je dan altijd een lineaire combinatie $\{A_1 \alpha_1^k + A_2 \alpha_2^k\}$ vinden die aan deze startwaarden voldoet. Je moet daarvoor het stelsel $A_1 + A_2 = x_0$, $A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 = x_1$ oplossen.

4 Lineaire recursies

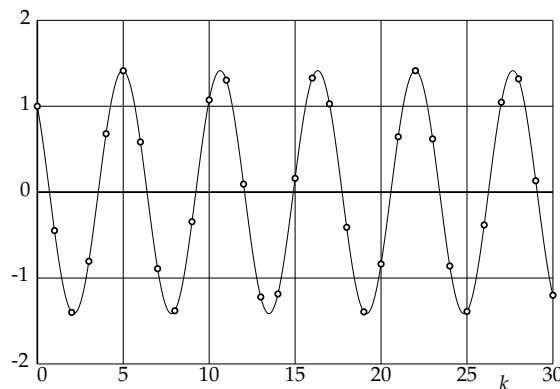
4.3 Stel dat $\{x_k\}$ de oplossingsrij is van het probleem op de tegenoverliggende bladzijde, dat wil zeggen dat

$$x_{k+1} = 2x_k - 5x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

met startwaarden $x_0 = 1, x_1 = -1$. Noem $y_k = \frac{x_k}{(\sqrt{5})^k}$. Dan geldt dus

$$y_k = \cos(k\varphi) - \sin(k\varphi)$$

Hieronder is die rij $\{y_k\}$ getekend voor $k = 0, \dots, 30$.



- Geef de recurrente betrekking waaraan de rij $\{y_k\}$ voldoet en geef ook de startwaarden y_0 en y_1 .
- In de bovenstaande tekening is ook de grafiek van een functie $f(t)$ getekend waarvoor $f(k) = y_k$. Geef het (voor de hand liggende) functievoorschrift van $f(t)$.
- De grafiek van $f(t)$ is zo te zien een sinusoïde. Toon aan dat dit inderdaad het geval is door $f(t)$ te schrijven in de standaardvorm

$$f(t) = A \cos(2\pi\nu t + \chi)$$

Bereken daarbij de amplitude A , de frequentie ν en de fasehoek χ (χ is de Griekse letter 'chi'). Geef zowel exacte antwoorden als antwoorden in 4 decimalen nauwkeurig. Controleer je antwoorden aan de hand van de bovenstaande grafiek. Bedenk daarbij dat de periode T gelijk is aan $T = \frac{1}{\nu}$.

- Ook deze opgave gaat over het voorbeeld op de tegenoverliggende pagina.
 - Bereken de constanten A_1 en A_2 die horen bij de daar gegeven startwaarden $x_0 = 1$ en $x_1 = -1$. (Je zult complexe getallen als antwoorden krijgen.)
 - Geef in het algemeen formules voor A_1 en A_2 uitgedrukt in C_1 en C_2 .

4.4 Een oscillerende rij

Voor de lineaire recurrente betrekking

$$x_{k+1} = 2x_k - 5x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

is de karakteristieke vergelijking

$$\alpha^2 - 2\alpha + 5 = 0$$

De discriminant $D = 4 - 20 = -16$ is negatief. De oplossingen zijn $\alpha_1 = 1 + 2i$ en $\alpha_2 = 1 - 2i$. Het is handig om ze in de (r, φ) -notatie te schrijven:

$$\alpha_1 = \sqrt{5} e^{i\varphi} \quad \text{en} \quad \alpha_2 = \sqrt{5} e^{-i\varphi}$$

waarbij $\varphi = \arctan 2 \approx 1.1071$. De twee 'basisoplossingen' zijn

$$\alpha_1^k = (\sqrt{5})^k e^{ik\varphi} \quad \text{en} \quad \alpha_2^k = (\sqrt{5})^k e^{-ik\varphi}$$

en de 'algemene oplossing' heeft nu de gedaante

$$x_k = A_1 \alpha_1^k + A_2 \alpha_2^k = (\sqrt{5})^k (A_1 e^{ik\varphi} + A_2 e^{-ik\varphi})$$

waarin A_1 en A_2 (complexe) constanten zijn die zo gekozen moeten worden dat aan zekere gegeven startwaarden x_0 en x_1 voldaan is. Het is echter handig om de algemene oplossing eerst met behulp van de relaties van Euler (zie bladzijde 15) als volgt te herschrijven

$$x_k = (\sqrt{5})^k ((A_1 + A_2) \cos(k\varphi) + i(A_1 - A_2) \sin(k\varphi))$$

oftewel

$$x_k = (\sqrt{5})^k (C_1 \cos(k\varphi) + C_2 \sin(k\varphi))$$

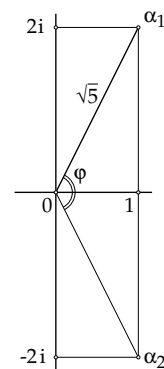
waarbij $C_1 = A_1 + A_2$ en $C_2 = i(A_1 - A_2)$. Door C_1 en C_2 reëel te kiezen, krijg je reële oplossingsrijen.

Als bijvoorbeeld gegeven is dat $x_0 = 1$ en $x_1 = -1$ dan moet je het volgende stelsel vergelijkingen oplossen:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 \\ C_1 \sqrt{5} \cos \varphi + C_2 \sqrt{5} \sin \varphi &= -1 \end{aligned}$$

Als je nu echter bedenkt dat $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ en $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (zie de figuur hierboven), dan vind je gemakkelijk dat $C_1 = 1$ en $C_2 = -1$ en daarmee de gezochte formule voor de oplossingsrij

$$x_k = (\sqrt{5})^k (\cos(k\varphi) - \sin(k\varphi))$$



4 Lineaire recursies

4.5 Schrijf de oplossingsrij $\{x_k\}$ van elk van de volgende lineaire recurrente betrekkingen in de beide vormen

$$x_k = c^k (C_1 \cos(k\varphi) + C_2 \sin(k\varphi)) = 2r c^k \cos(k\varphi + \chi)$$

Geef de waarden van c , C_1 , C_2 , φ , r en χ daarbij exact of op vier decimalen afgerond.

- a. $x_{k+1} = 2x_k - 5x_{k-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$
- b. $x_{k+1} = 2x_k - 5x_{k-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$
- c. $x_{k+1} = 2x_k - 5x_{k-1}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$
- d. $x_{k+1} = x_k - x_{k-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = -1$
- e. $x_{k+1} = x_k - \frac{1}{2}x_{k-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$

4.5 Een oscillerende rij (vervolg)

In de vorige paragraaf vonden we de algemene oplossing van de lineaire recurrenente betrekking

$$x_{k+1} = 2x_k - 5x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

in de vorm

$$x_k = A_1 \alpha_1^k + A_2 \alpha_2^k = (\sqrt{5})^k (A_1 e^{ik\varphi} + A_2 e^{-ik\varphi})$$

waarbij $\alpha_1 = 1 + 2i = \sqrt{5} e^{i\varphi}$ en $\alpha_2 = 1 - 2i = \sqrt{5} e^{-i\varphi}$. De constanten A_1 en A_2 zijn complexe getallen. Zoek je naar reële oplossingsrijen, dan kun je beter de volgende vorm gebruiken

$$x_k = (\sqrt{5})^k (C_1 \cos(k\varphi) + C_2 \sin(k\varphi))$$

Voor reële waarden van C_1 en C_2 krijg je dan een reële oplossingsrij. De bijdrage $C_1 \cos(k\varphi) + C_2 \sin(k\varphi)$ in het rechterlid kun je met behulp van gonioformules schrijven in de vorm $A \cos(k\varphi + \chi)$ zoals je in de opgave op bladzijde 40 in een concreet geval hebt kunnen controleren. Met complexe getallen gaat dat, zonder gonioformules, nog eenvoudiger, zoals we nu zullen laten zien.

Uit $C_1 = A_1 + A_2$ en $C_2 = i(A_1 - A_2)$ (zie bladzijde 41) volgt $C_1 - iC_2 = 2A_1$ en $C_1 + iC_2 = 2A_2$. Daarom zijn A_1 en A_2 *geconjugeerde complexe getallen* wanneer C_1 en C_2 reële getallen zijn. In dat geval geldt dat $A_1 = r e^{i\chi}$ en $A_2 = r e^{-i\chi}$ met $r = |A_1| = |A_2|$ en $\chi = \arg(A_1) = -\arg(A_2)$. De oplossingsrij $\{x_k\}$ kan dan dus geschreven worden als

$$\begin{aligned} x_k &= (\sqrt{5})^k (A_1 e^{ik\varphi} + A_2 e^{-ik\varphi}) = r(\sqrt{5})^k (e^{i\chi} e^{ik\varphi} + e^{-i\chi} e^{-ik\varphi}) \\ &= r(\sqrt{5})^k (e^{i(k\varphi+\chi)} + e^{-i(k\varphi+\chi)}) = 2r(\sqrt{5})^k \cos(k\varphi + \chi) \end{aligned}$$

zoals we wilden aantonen. In het voorbeeld op bladzijde 41 hebben we $x_0 = 1$, $x_1 = -1$ genomen, waaruit we hebben afgeleid dat $C_1 = 1$ en $C_2 = -1$. Daar geldt dus $A_1 = \frac{1}{2}(1 + i)$ en $A_2 = \frac{1}{2}(1 - i)$ dus $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\chi = \frac{1}{4}\pi$ met als gevolg dat

$$x_k = \sqrt{2} (\sqrt{5})^k \cos\left(k\varphi + \frac{1}{4}\pi\right)$$

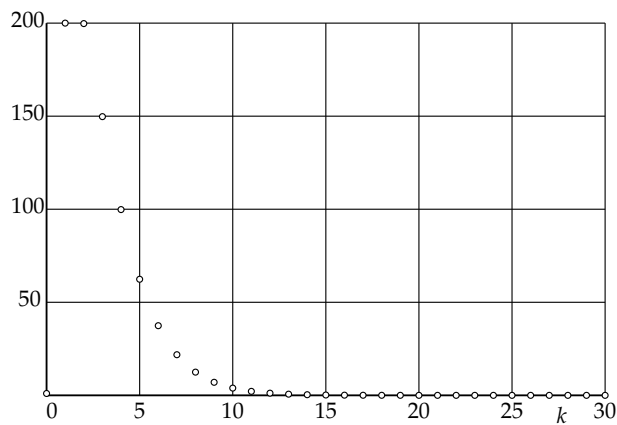
En voor de rij $\{y_k\}$ van bladzijde 40 geldt dus

$$y_k = \sqrt{2} \cos\left(k\varphi + \frac{1}{4}\pi\right)$$

zoals je waarschijnlijk zelf ook al hebt afgeleid.

4 Lineaire recursies

4.6 Hieronder zie je de oplossingsrij $\{x_k\}$ van het voorbeeld op de tegenoverliggende bladzijde met startwaarden $x_0 = 1$ en $x_1 = 200$. Controleer dat de punten x_2, x_3 en x_4 correct getekend zijn en bewijs dat $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$.



4.7 Bereken de oplossingsrij van elk van de volgende lineaire recurrente betrekkingen met de erbij gegeven startwaarden.

- $x_{k+1} = -4x_k - 4x_{k-1}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$
- $x_{k+1} = 4x_k - 4x_{k-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$
- $x_{k+1} = x_k - \frac{1}{4}x_{k-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$
- $x_{k+1} = -x_k - \frac{1}{4}x_{k-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = -1$
- $x_{k+1} = -2x_k - x_{k-1}$, $x_0 = 10$, $x_1 = 1$

4.6 Samenvallende wortels

Voor de lineaire recurrente betrekking

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{4} x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

is de karakteristieke vergelijking

$$\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4} = 0$$

De discriminant is nu nul en de enige wortel is $\alpha = \frac{1}{2}$. We vinden dus maar één basisoplossing $\{\frac{1}{2^k}\}$, en dat is niet genoeg om bij twee willekeurige startwaarden x_0 en x_1 een oplossingsrij te maken. Hieronder zullen we laten zien dat ook de rij $\{k \frac{1}{2^k}\}$ een oplossingsrij is. De algemene oplossing is nu dus van de vorm

$$x_k = A_1 \frac{1}{2^k} + A_2 k \frac{1}{2^k}$$

Bij gegeven startwaarden x_0 en x_1 , bijvoorbeeld $x_0 = -1$ en $x_1 = 2$, kun je nu weer de juiste A_1 en A_2 vinden door een (2×2) -stelsel op te lossen. In dit geval krijg je dan $A_1 = -1$ en $A_2 = 5$.

De algemene afleiding in het geval $D = 0$ gaat als volgt. In de betrekking

$$x_{k+1} = p x_k + q x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

geldt $D = p^2 + 4q = 0$ als $q = -\frac{1}{4}p^2$. In dat geval geeft de *abc*-formule als enige wortel van de karakteristieke vergelijking $\alpha = \frac{p}{2}$. De recurrente betrekking kun je nu helemaal in termen van α schrijven, want $p = 2\alpha$ en $q = -\frac{1}{4}p^2 = -\alpha^2$. Het resultaat is

$$x_{k+1} = 2\alpha x_k - \alpha^2 x_{k-1} \quad \text{voor } k = 1, 2, 3, \dots$$

Deel linker- en rechterlid door α^{k+1} en noem $y_k = x_k / \alpha^k$, dan ontstaat hieruit $y_{k+1} = 2y_k - y_{k-1}$ oftewel $y_{k+1} - y_k = y_k - y_{k-1}$. Bijgevolg geldt voor iedere k

$$y_{k+1} - y_k = y_k - y_{k-1} = y_{k-1} - y_{k-2} = \dots = y_1 - y_0$$

Neem nu als startwaarden $x_0 = 0$, $x_1 = \alpha$, dus $y_0 = 0$ en $y_1 = 1$. Dan krijg je $y_2 = 2$, $y_3 = 3$ enzovoort, dus $y_k = k$ voor iedere k zodat $x_k = y_k \alpha^k = k \alpha^k$. We hebben hiermee een tweede basisoplossingsrij gevonden, namelijk $\{k \alpha^k\}$, naast de rij $\{\alpha^k\}$ die we al kenden want α is de (enige) oplossing van de karakteristieke vergelijking. De algemene oplossing in het geval $D = 0$ is dus

$$x_k = A_1 \alpha^k + A_2 k \alpha^k$$

zoals we wilden aantonen.

4 Lineaire recursies

Gemengde opgaven.

4.8 Geef bij de volgende lineaire recurrenente betrekkingen de oplossingsrij die aan de gegeven startwaarden voldoet.

- a. $x_{k+1} = 2x_k + 3x_{k-1}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 2$
- b. $x_{k+1} = 3x_k - 2x_{k-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = -1$
- c. $x_{k+1} = 4x_k - 13x_{k-1}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$
- d. $x_{k+1} = 2x_k - 5x_{k-1}$, $x_0 = 2$, $x_1 = -1$
- e. $x_{k+1} = 3x_k - 3x_{k-1} + x_{k-2}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$
(Hint: $\alpha = 1$ is een oplossing van de karakteristieke vergelijking.)

4.7 Lineaire recursies van hogere orde

Wat we voor lineaire recurrente betrekkingen van de tweede orde hebben gedaan, kunnen we ook voor lineaire recurrente betrekkingen van hogere orde doen. We geven hier voor de volledigheid de resultaten kort en overzichtelijk weer, zonder op details in te gaan. Een lineaire recurrente betrekking van orde n heeft de vorm

$$x_{k+1} = p_1 x_k + p_2 x_{k-1} + \dots + p_n x_{k-n+1} \quad \text{voor } k = n-1, n, n+1, \dots$$

Een oplossingsrij wordt vastgelegd door n startwaarden x_0, \dots, x_{n-1} en de karakteristieke vergelijking is nu van de graad n , namelijk

$$\alpha^n - p_1 \alpha^{n-1} - \dots - p_{n-1} \alpha - p_n = 0$$

Als deze vergelijking n verschillende wortels heeft, leveren die n basisoplossingsrijen, waaruit door lineaire combinaties de algemene oplossing kan worden gevormd. Als een wortel α multipliciteit m heeft met $m > 1$, dan zijn de volgende m rijen basisoplossingen:

$$\{\alpha^k\}, \quad \{k \alpha^k\}, \quad \{k^2 \alpha^k\}, \dots, \{k^{m-1} \alpha^k\}$$

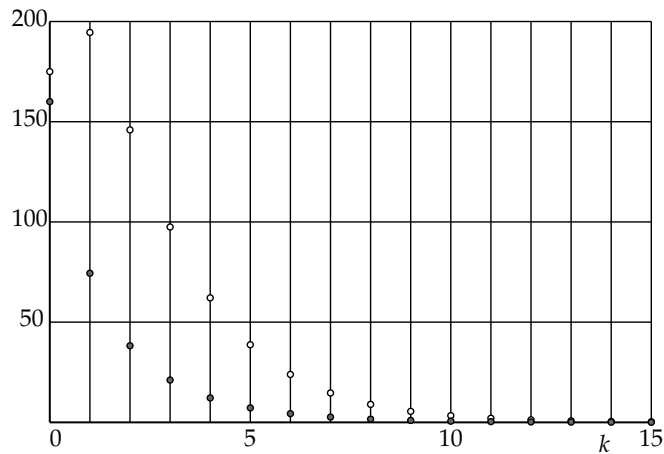
Zo krijg je dus in alle gevallen in totaal n basisoplossingen waarmee via lineaire combinaties de algemene oplossing kan worden gevormd.

4.8 Realistische modellen

Met het bovenstaande is een wiskundig volledige behandeling gegeven van een bepaald type lineaire recursies (namelijk homogeen en met constante coëfficiënten). In veel toepassingen worden ze gebruikt om het verloop van een proces in de tijd te modelleren waarbij x_k de waarde voorstelt van een zekere grootte x op het tijdstip $t_k = t_0 + kT$. In het model worden zekere startwaarden x_0, x_1, \dots gegeven, waarna de recurrente betrekking het verdere verloop van de grootte x beschrijft. Omdat er daarbij na het opstarten van het proces geen verdere toevoegingen van buitenaf plaatsvinden, zal x op den duur in de ruststand terugkeren, dat wil zeggen dat $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$. Dit is het geval als alle wortels α van de karakteristieke vergelijking, reëel of complex, voldoen aan $|\alpha| < 1$, met andere woorden, als ze binnen de eenheidscirkel liggen. In 'realistische' modellen zal dit altijd het geval zijn.

Je kunt opmerken dat de rij van Fibonacci (zie paragraaf 4.3), die oorspronkelijk bedoeld was om de groei van een konijnenpopulatie te modelleren, niet aan deze voorwaarde voldoet want een van de twee wortels, $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$, is groter dan 1. Maar dat is dan ook geen realistisch model want $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty$. Het werkt hoogstens gedurende een beperkt tijdsbestek, en het gaat ook verder uit van tal van verregaande, irreële simplificaties. Het is overigens in toepassingen van de wiskunde heel gebruikelijk om te werken met modellen die slechts een beperkte geldigheid hebben.

4 Lineaire recursies



Ontwikkeling in de tijd van het economische model

$$p_k = 0.49 p_{k-1} + 0.68 q_{k-1}$$

$$q_k = 0.032 p_{k-1} + 0.43 q_{k-1}$$

waarin p_k (witte punten) en q_k (zwarte punten) de productie, respectievelijk de investering op tijdstip k voorstelt. Hier is $p_0 = 175$ en $q_0 = 160$ genomen.

4.9 Een economisch voorbeeld

In een leerboek economie vond ik het volgende eenvoudige model voor het verband tussen productie en investeringen. Productie wordt gemodelleerd door een rij $\{p_k\}$ en investeringen door $\{q_k\}$ waarbij p_k en q_k de productie, respectievelijk de investering op tijdstip k voorstelt. Het model is

$$\begin{aligned} p_k &= 0.49 p_{k-1} + 0.68 q_{k-1} \\ q_k &= 0.032 p_{k-1} + 0.43 q_{k-1} \end{aligned}$$

De vraag is na te gaan hoe de rijen $\{p_k\}$ en $\{q_k\}$ zich in de tijd ontwikkelen bij gegeven startwaarden p_0 en q_0 . Voor de overzichtelijkheid formuleren we het probleem gelijk wat algemener, namelijk als

$$p_k = a p_{k-1} + b q_{k-1} \quad (4.1)$$

$$q_k = c p_{k-1} + d q_{k-1} \quad (4.2)$$

We kunnen dit als volgt vertalen naar een lineaire recurrente betrekking van orde 2 voor de rij $\{p_k\}$. Neem $k+1$ in plaats van k in vergelijking (4.1) en substitueer vervolgens eerst (4.2) en daarna (4.1) als volgt:

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= a p_k + b q_k = a p_k + b(c p_{k-1} + d q_{k-1}) = a p_k + bc p_{k-1} + db q_{k-1} \\ &= a p_k + bc p_{k-1} + d(p_k - a p_{k-1}) = (a+d)p_k + (bc-ad)p_{k-1} \end{aligned}$$

De startwaarden zijn p_0 en $p_1 = a p_0 + b q_0$ en de karakteristieke vergelijking is

$$\alpha^2 - (a+d)\alpha + (ad-bc) = 0$$

met discriminant $D = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc$. In het gegeven voorbeeld was $a = 0.49$, $b = 0.68$, $c = 0.032$ en $d = 0.43$ dus $D = 0.09064$. De twee wortels van de karakteristieke vergelijking zijn $\alpha_1 = 0.6105323885$ en $\alpha_2 = 0.3094676115$ en de algemene oplossing is dus van de vorm

$$p_k = A_1 \alpha_1^k + A_2 \alpha_2^k$$

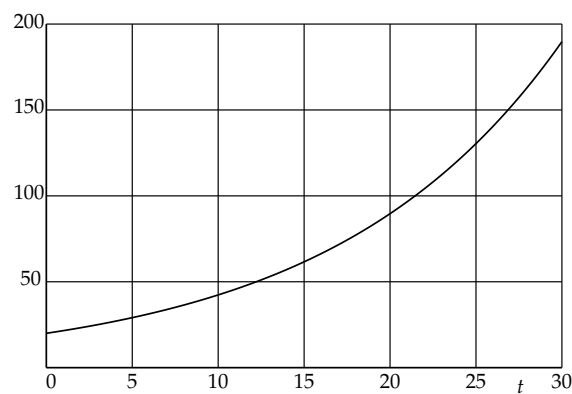
Omdat de beide wortels in absolute waarde kleiner dan 1 zijn, zal $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0$.

Dezelfde methode toegepast op rij $\{q_k\}$ levert merkwaardigerwijs *dezelfde* recurrente betrekking op (ga na!). Alleen de startwaarden zijn anders, namelijk q_0 en $q_1 = c p_0 + d q_0$. In dit model geldt dus ook $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = 0$, met andere woorden, in het model komen de productie en de investeringen op den duur tot stilstand.

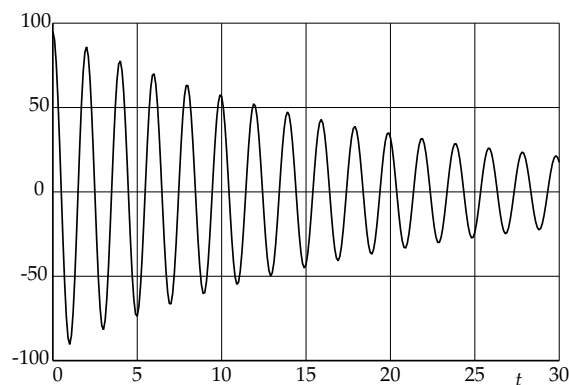
5 Lineaire differentiaalvergelijkingen

In veel toepassingen in de techniek en de exacte wetenschappen wordt gewerkt met *differentiaalvergelijkingen* om continue processen te modelleren. Het gaat dan meestal om een functie $y(t)$ die een grootte beschrijft die in de tijd varieert. In zo'n model kunnen wetmatigheden in het proces uitgedrukt worden in vergelijkingen waarin naast de functie $y(t)$ zelf ook de afgeleiden $y'(t)$, $y''(t)$, ... voorkomen. Men spreekt dan over differentiaalvergelijkingen. De *orde* van zo'n differentiaalvergelijking wordt bepaald door de hoogste afgeleide die erin voorkomt. Bij differentiaalvergelijkingen van de eerste orde komt naast $y(t)$ alleen $y'(t)$ voor, bij differentiaalvergelijkingen van de tweede orde speelt ook $y''(t)$ mee enzovoort. In dit hoofdstuk bespreken we zogenaamde *lineaire* differentiaalvergelijkingen. Net als bij de lineaire recursies kun je ook hier een *karakteristieke vergelijking* opstellen waarvan de wortels bepalend zijn voor het gedrag van de oplossingen. En ook hier kun je met complexe getallen de oplossingsfuncties (nu zijn het oplossingsfuncties en niet oplossingsrijen) gemakkelijk bepalen.

5 Lineaire differentiaalvergelijkingen



Een voorbeeld van een continu exponentieel groeimodel, gegeven door de differentiaalvergelijking $y'(t) = ay(t)$. Hier is $y(0) = 20$ en $a = 0.075$.



Een voorbeeld van een gedempte trilling bij een massa-veersysteem met als differentiaalvergelijking $mu''(t) + du'(t) + ku(t) = 0$. Hier is $m = 1$, $d = 0.1$, $k = 10$ genomen met beginwaarden $u(0) = 95$ en $u'(0) = -1$.

5.1 Inleiding

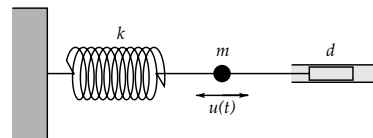
Een vergelijking waarin naast een functie $y(t)$ ook nog een of meer afgeleiden van $y(t)$ voorkomen, heet een differentiaalvergelijking. Een van de eenvoudigste voorbeelden is de differentiaalvergelijking

$$y'(t) = ay(t)$$

die voor $a > 0$ continue exponentiële groei modelleert. Een *oplossing* is een functie $y(t)$ die voor alle t aan de differentiaalvergelijking voldoet. In het algemeen zijn er oneindig veel oplossingen, die in dit geval allemaal van de vorm $y(t) = Ae^{at}$ zijn. Een *startwaarde*, bijvoorbeeld $y(0)$, legt de constante A vast.

In dit hoofdstuk behandelen we zogenaamde lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde, dat wil zeggen dat er naast $y(t)$ ook nog de eerste afgeleide $y'(t)$ en de tweede afgeleide $y''(t)$ in voorkomen. Een natuurkundig voorbeeld waarin zo'n differentiaalvergelijking gebruikt wordt, is het zogenaamde *massaveersysteem*.

Stel dat een puntmassa m bevestigd is aan een veer met veerconstante k en een demper met wrijvingsfactor d . Onder $u(t)$ verstaan we de uitwijking van de massa vanuit de evenwichtsstand op tijdstip t .

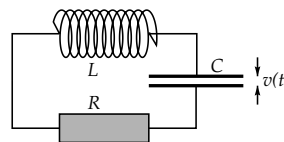


De massa is dan onderhevig aan twee terugdrijvende krachten: de veerkracht die evenredig is aan de uitwijking $u(t)$ en de dempingskracht die evenredig is met de snelheid $u'(t)$. Volgens de wet van Newton is de som van die krachten gelijk aan de massa m maal de versnelling $u''(t)$, dus $mu''(t) = -ku(t) - du'(t)$ oftewel

$$mu''(t) + du'(t) + ku(t) = 0$$

Wanneer men zo'n systeem op $t = 0$ een bepaalde beginuitwijking $u(0)$ en beginsnelheid $u'(0)$ geeft, zal het een gedempte trilling gaan uitvoeren.

Een ander voorbeeld komt uit de electrotechniek. In een stroomkring zijn een weerstand R , een condensator met capaciteit C en een inductiespoel met zelfinductie L in serie geschakeld. We meten het spanningsverschil $v(t)$ over de condensator.



Men kan aantonen dat $v(t)$ dan voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$LCv''(t) + RCv'(t) + v(t) = 0$$

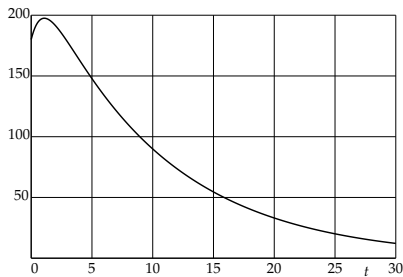
Ook hier is het zo dat het systeem bij gegeven beginwaarden $v(0)$ en $v'(0)$ een gedempte trilling gaat uitvoeren. In dit hoofdstuk zullen we algemene formules afleiden voor de oplossingsfuncties van dit soort differentiaalvergelijkingen.

5 Lineaire differentiaalvergelijkingen

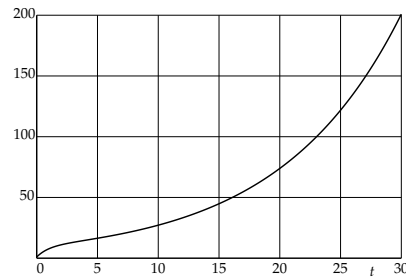
Hieronder zie je enige voorbeelden van grafieken van oplossingsfuncties van lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde van de vorm

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

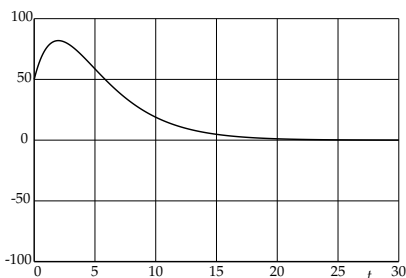
De grafieken geven een indruk van de grote verscheidenheid aan verschijningsvormen van zulke oplossingsfuncties. Telkens zijn de waarden van a , b en c en de beginwaarden $y(0)$ en $y'(0)$ gegeven.



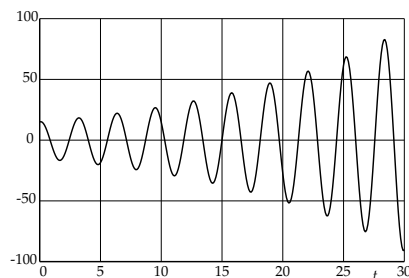
$$a = 1, b = 1.1, c = 0.1 \\ y(0) = 180, y'(0) = 40$$



$$a = 1, b = 0.9, c = -0.1 \\ y(0) = 1, y'(0) = 10$$



$$a = 1, b = 0.7, c = 0.1225 \\ y(0) = 50, y'(0) = 40$$



$$a = 1, b = -0.12, c = 4 \\ y(0) = 15, y'(0) = 5$$

5.1 Bereken bij elk van de vier hierboven gegeven differentiaalvergelijkingen de wortels en de discriminant van de karakteristieke vergelijking.

5.2 Lineaire differentiaalvergelijkingen van orde 2

Een differentiaalvergelijking van de vorm

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

waarbij a , b en c willekeurige gegeven reële constanten zijn met $a \neq 0$, heet een *lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde*. Eigenlijk is de volledige term: *lineaire homogene differentiaalvergelijking van de tweede orde met constante coëfficiënten* maar wij zullen die uitgebreide terminologie hier niet gebruiken en ook niet toelichten. Omdat $a \neq 0$ is, kunnen we de vergelijking delen door a , met andere woorden, we kunnen veronderstellen dat $a = 1$. Met het oog op de vele toepassingen waarin a , b en c vaak een specifieke fysische betekenis hebben, zullen we dit hier echter niet doen.

We zullen in dit hoofdstuk een algemene oplossingsmethode presenteren, dat wil zeggen een methode waarmee je een formule kunt vinden voor $y(t)$ in termen van a , b en c en zekere *startwaarden*, die hier de vorm hebben van $y(0) = y_0$ en $y'(0) = m_0$. Met andere woorden, op het tijdstip $t = 0$ zijn de functiewaarde $y(0)$ en de afgeleide $y'(0)$ gegeven. We zullen zien dat daardoor de oplossingsfunctie $y(t)$ volledig wordt bepaald.

Het idee is als volgt. We laten de startwaarden voorlopig even terzijde, en concentreren ons op de differentiaalvergelijking zelf. Geïnspireerd door het continue exponentiële groeimodel proberen we of er oplossingsfuncties zijn van de vorm $y(t) = e^{\lambda t}$ (λ is de Griekse letter 'lambda'). Invullen in de differentiaalvergelijking geeft dan $a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0$, oftewel, na delen door $e^{\lambda t}$,

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Dit is de *karakteristieke vergelijking* van de differentiaalvergelijking. Elke wortel λ geeft een oplossing $e^{\lambda t}$. Je ziet dat in de karakteristieke vergelijking de variabele t niet meer voorkomt! Het is een zuiver algebraïsche vergelijking. De aard van de oplossingen wordt bepaald door het teken van de discriminant $D = b^2 - 4ac$. Als $D > 0$ is, zijn de twee wortels reëel, als $D = 0$ zijn ze reëel en vallen ze samen, en als $D < 0$ zijn ze toegevoegd complex.

We behandelen de drie gevallen $D > 0$, $D = 0$ en $D < 0$ aan de hand van voorbeelden. Maar eerst merken we op dat voor lineaire differentiaalvergelijkingen ook weer het *superpositiebeginsel* geldt: als $y_1(t)$ en $y_2(t)$ allebei oplossingsfuncties zijn, dan is voor elke keuze van A_1 en A_2 ook de *lineaire combinatie* $z(t) = A_1 y_1(t) + A_2 y_2(t)$ een oplossingsfunctie. Je kunt dit zelf gemakkelijk nagaan.

5 Lineaire differentiaalvergelijkingen

5.2 Bepaal de oplossingsfunctie van elk van de volgende differentiaalvergelijkingen met de gegeven startwaarden.

- $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 1$
- $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0$
- $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$
- $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$
- $6y''(t) + 5y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2$

5.3 Bepaal de oplossingsfunctie van elk van de volgende differentiaalvergelijkingen met de gegeven startwaarden.

- $y''(t) - y'(t) + \frac{1}{4}y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$
- $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 1$
- $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$
- $4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$
- $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

5.4 In deze opgave leer je de achtergrond van de op de tegenoverliggende bladzijde gegeven oplossingsmethode voor het geval $D = 0$. Stel voor het gemak dat de differentiaalvergelijking de volgende vorm heeft

$$y''(t) - 2py'(t) + p^2y(t) = 0$$

De karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 2p\lambda + p^2 = 0$ heeft discriminant $D = 0$. De enige wortel is $\lambda = p$. Stel nu $z(t) = e^{-pt}y(t)$, met andere woorden, $y(t) = e^{pt}z(t)$. Dat lijkt een vreemde truc, maar we zullen laten zien dat de oorspronkelijke differentiaalvergelijking voor de functie $y(t)$ hierdoor getransformeerd wordt in een zeer eenvoudig oplosbare differentiaalvergelijking voor $z(t)$. En hebben we $z(t)$ gevonden, dan hebben we ook $y(t)$ te pakken!

- Bereken $y'(t)$ en $y''(t)$ door differentiëren met de productregel en de kettingregel van $y(t) = e^{pt}z(t)$.
- Laat hiermee zien dat

$$y''(t) - 2py'(t) + p^2y(t) = e^{pt}z''(t)$$

- Concludeer hieruit dat $z(t)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking $z''(t) = 0$ (bedenk dat een e-macht nooit nul is!).
- Leid hieruit af dat $z(t) = A_1 + A_2t$ voor zekere constanten A_1 en A_2 . (Hint: twee maal integreren.)
- Concludeer hieruit dat de algemene oplossingsfunctie van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking gelijk is aan

$$y(t) = (A_1 + A_2t)e^{pt}$$

5.3 Positieve discriminant

Als $D = b^2 - 4ac > 0$ is, zijn er twee verschillende reële oplossingen λ_1 en λ_2 van de karakteristieke vergelijking, en de algemene oplossing heeft dan de gedaante

$$y(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

Merk op dat

$$y'(t) = \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 t}$$

en dus geldt $y(0) = A_1 + A_2$ en $y'(0) = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$.

Neem bijvoorbeeld de differentiaalvergelijking

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0$$

De wortels van de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ zijn $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = -1$. Wanneer hierbij de startwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = -2$ gegeven zijn, kun je A_1 en A_2 oplossen uit de vergelijkingen $A_1 + A_2 = 1$ en $2A_1 - A_2 = -2$. De oplossing van dit stelsel is $A_1 = -\frac{1}{3}$ en $A_2 = \frac{4}{3}$. De oplossingsfunctie is dus

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{4}{3}e^{-t}$$

5.4 Discriminant nul

Als $D = b^2 - 4ac = 0$ is, is er maar één oplossing, namelijk $\lambda = -\frac{b}{2a}$. Naast de basisoplossingsfunctie $y_1(t) = e^{\lambda t}$ is er dan ook een basisoplossingsfunctie $y_2(t) = te^{\lambda t}$. De algemene oplossing is dan

$$y(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t} = (A_1 + tA_2) e^{\lambda t}$$

Neem bijvoorbeeld de differentiaalvergelijking

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$$

De enige oplossing van de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ is $\lambda = -2$ en de algemene oplossingsfunctie is dus

$$y(t) = (A_1 + tA_2) e^{-2t}$$

Wanneer hierbij de startwaarden $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$ gegeven zijn, vinden we $A_1 = -1$ en $A_2 = -2$ (controleer!), dus dan is de gezochte oplossingsfunctie

$$y(t) = (-1 - 2t) e^{-2t}$$

5 Lineaire differentiaalvergelijkingen

5.5 Bepaal de oplossingsfunctie van elk van de volgende differentiaalvergelijkingen met de gegeven startwaarden.

- $y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 1$
- $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0$
- $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$
- $y''(t) - 2y'(t) + 10y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$
- $y''(t) + 4y'(t) + 8y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2$

5.6 Schrijf alle oplossingsfuncties van de vorige opgave in de vorm

$$y(t) = 2r e^{pt} \cos(qt + \chi)$$

5.7 Op bladzijde 53 zijn voorbeelden gegeven van differentiaalvergelijkingen voor massaveersystemen en stroomkringen. Ga na dat in het theoretische geval van wrijving nul ($d = 0$), respectievelijk weerstand nul ($R = 0$), alle oplossingsfuncties zuivere sinusoiden zijn ('harmonische trillingen'). Wat is de frequentie in termen van m en k , respectievelijk L en C ? (Bedenk dat die constanten positief zijn op fysische gronden). Hoe hangt de amplitude af van de beginwaarden $u(0)$ en $u'(0)$, respectievelijk $v(0)$ en $v'(0)$?

(Bij de standaardsinusoïde $A \cos(qt + \chi)$ met $A > 0$ en $q > 0$ heet A de amplitude, $\frac{q}{2\pi}$ de frequentie en χ de fasehoek.)

5.8 Toon aan dat $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ voor een massaveersysteem met een positieve wrijving d en dat $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$ voor een stroomkring met een positieve weerstand R . Onderscheid hierbij de gevallen $D > 0$, $D = 0$ en $D < 0$ maar gebruik wel dat alle fysische constanten (m , d en k , respectievelijk L , C en R) positief zijn.

5.5 Negatieve discriminant

We beginnen met een voorbeeld, namelijk de differentiaalvergelijking

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 0$$

Deze heeft als karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

met discriminant $D = 4 - 20 = -16 < 0$. De twee wortels zijn $\lambda_1 = 1 + 2i$ en $\lambda_2 = 1 - 2i$, en de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is dus (vergelijk ook paragraaf 4.4 op bladzijde 41)

$$\begin{aligned} y(t) &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^{(1+2i)t} + A_2 e^{(1-2i)t} \\ &= e^t (A_1 e^{2it} + A_2 e^{-2it}) \\ &= e^t ((A_1 + A_2) \cos 2t + i(A_1 - A_2) \sin 2t) \\ &= e^t (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) \end{aligned}$$

Kies je voor C_1 en C_2 reële constanten, dan is de oplossingsfunctie ook reëel. In dat geval is $A_1 = \frac{1}{2}(C_1 - iC_2)$ en $A_2 = \frac{1}{2}(C_1 + iC_2)$ (vergelijk paragraaf 4.5 op bladzijde 43) dus dan zijn A_1 en A_2 toegevoegd complex.

De oplossingsfunctie $y(t)$ kun je dan ook schrijven als het product van een e-macht en een standaardsinusoïde. Dat is voor de toepassingen, waarin uit de standaardvorm van een sinusoïde belangrijke constanten zoals de amplitude en de fasehoek kunnen worden gehaald, vaak van groot belang. Schrijf daartoe $A_1 = r e^{i\chi}$ en $A_2 = r e^{-i\chi}$ (χ is de Griekse letter 'chi'). Dan is

$$\begin{aligned} y(t) &= e^t (A_1 e^{2it} + A_2 e^{-2it}) = e^t (r e^{i\chi} e^{2it} + r e^{-i\chi} e^{-2it}) \\ &= r e^t (e^{i(2t+\chi)} + e^{-i(2t+\chi)}) = 2r e^t \cos(2t + \chi) \end{aligned}$$

Voor een willekeurige differentiaalvergelijking met een karakteristieke vergelijking met een negatieve discriminant met wortels $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ kan de algemene reële oplossing geschreven worden als

$$y(t) = e^{pt} (C_1 \cos qt + C_2 \sin qt) = 2r e^{pt} \cos(qt + \chi)$$

waarbij $C_1 - iC_2 = r e^{i\chi}$. Bij gegeven startwaarden $y(0)$ en $y'(0)$ geldt $y(0) = C_1$ en $y'(0) = pC_1 + qC_2$ dus $C_2 = -\frac{p}{q}y(0) + \frac{1}{q}y'(0)$.

5 Lineaire differentiaalvergelijkingen

Gemengde opgaven.

5.9 Bepaal de oplossingsfunctie van elk van de volgende differentiaalvergelijkingen met de gegeven startwaarden.

a. $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$

b. $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0$

c. $y''(t) + 3y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 3$

d. $y''(t) - y'(t) - 12y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

e. $y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

f. $y^{(3)}(t) - 2y'(t) = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 0$

g. $y^{(3)}(t) + 8y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1$

5.6 Lineaire differentiaalvergelijkingen van hogere orde

Wat we voor lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde hebben gedaan, kunnen we ook voor lineaire differentiaalvergelijkingen van hogere orde doen. Zo'n vergelijking heeft de vorm

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

Een oplossingsfunctie $y(t)$ wordt vastgelegd door n beginvoorwaarden $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ en de karakteristieke vergelijking is nu van de graad n , namelijk

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Wanneer deze vergelijking n verschillende (reële of complexe) wortels heeft, leveren die n basisoplossingsfuncties, waaruit door lineaire combinaties de algemene oplossing kan worden gevormd. Wanneer een wortel λ multipliciteit m heeft met $m > 1$, dan zijn de volgende m functies basisoplossingsfuncties:

$$e^{\lambda t}, \quad t e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad t^{m-1} e^{\lambda t}$$

Op deze manier leveren de oplossingen van de karakteristieke vergelijking dus in alle gevallen n basisoplossingen waarmee de algemene oplossing kan worden gevormd.

5.7 Realistische modellen

Wanneer een lineaire differentiaalvergelijking een wiskundig model is van een proces waarin de evolutie in de tijd van een grootte y gemodelleerd wordt als een differentieerbare functie $y(t)$ die op elk tijdstip t aan de differentiaalvergelijking voldoet, wordt die evolutie volledig bepaald door de differentiaalvergelijking en de n beginvoorwaarden. In zulke situaties zal het systeem op den duur naar de ruststand terugkeren, dat wil zeggen dat $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. Dit is het geval als alle wortels λ van de karakteristieke vergelijking, reëel of complex, voldoen aan $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, met andere woorden, als ze in het linkerhalfvlak liggen. In 'realistische' modellen zal dit altijd het geval zijn.

Bij massa-veersystemen en bij stroomkringen met een weerstand, condensator en inductiespoel is dat altijd het geval als de dempingsfactor, respectievelijk de weerstand, positief is. In de geïdealiseerde toestand zonder demping of weerstand blijft het systeem eeuwig oscilleren volgens een sinusoïde (harmonische trilling).

Toegiften

Antwoorden

Formuleoverzicht

Trefwoordenregister

Toegiften

In dit deel vind je een aantal onderwerpen die voor wiskundig geïnteresseerde lezers de moeite waard zijn. Je zou ze bijvoorbeeld als uitgangspunt voor een praktische opdracht kunnen nemen door er zelf nog wat meer informatie over te verzamelen. Het is allemaal lees- en studiestof; opgaven staan er niet bij. Wat je wel nodig hebt, is pen en papier om alle berekeningen zelf te controleren. Soms sla ik eenvoudige uitwerkingen of tussenstapjes over. Die moet je dan zelf invullen. Je snapt de redenering pas als je alles zelf gecontroleerd hebt! En misschien kun je er zelf nog wat opgaven bij verzinnen . . .

T.1 Bewijzen van Euler

Leonhard Euler (1707-1783) was een van de eersten die systematisch de wereld van de complexe getallen in kaart probeerde te brengen. Hij deed dat door in allerlei bekende formules het imaginaire getal $\sqrt{-1}$ in te vullen, en te kijken wat er dan verscheen (Euler was overigens ook degene die voor $\sqrt{-1}$ het symbool i bedacht). Zo ontdekte hij allerlei verbanden die later op een meer formele wijze bewezen zijn, bijvoorbeeld de beroemde formule

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

We geven hier twee totaal verschillende bewijzen die Euler vond van deze formule. Het eerste bewijs berust op het feit dat

$$\frac{d}{dx} \ln(\sqrt{1+x^2} + x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Toegiften

Dat was al ver voor Eulers tijd bekend; je kunt het namelijk direct verifiëren met behulp van de kettingregel:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \ln(\sqrt{1+x^2} + x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} \left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+x^2}} 2x + 1 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

Eulers eerste bewijs

We formuleren Eulers bewijs in termen van differentiaal. De regel die we daarbij gebruiken, is $df(x) = f'(x) dx$. Uitgangspunt is $y = \sin x$. Hieruit volgt dat $dy = \cos x dx$, en met gebruikmaking van de bekende formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

$$dx = \frac{1}{\cos x} dy = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} dy = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

Nu komt Eulers kunstgreep. Hij paste de substitutie $y = -iz$ toe. Daaruit volgt dat ook $dy = -i dz$ en $y^2 = -z^2$, zodat

$$dx = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = -i \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dz = -i d(\ln(\sqrt{1+z^2} + z))$$

Hier gebruikte hij de bovenstaande afgeleide. Vervolgens substitueerde hij weer terug, eerst via $z = iy$ (dit volgt uit $y = -iz$), en daarna via $y = \sin x$. Hij vermenigvuldigde daarbij links en rechts ook nog even met i .

$$\begin{aligned}i dx = d(ix) &= d(\ln(\sqrt{1+z^2} + z)) = d(\ln(\sqrt{1-y^2} + iy)) \\ &= d(\ln(\sqrt{1-\sin^2 x} + i \sin x)) \\ &= d(\ln(\cos x + i \sin x))\end{aligned}$$

Omdat de differentiaal $d(ix)$ en $d(\ln(\cos x + i \sin x))$ gelijk zijn, moeten de functies achter de d een constant verschil hebben. Maar voor $x = 0$ geven ze beide 0 als uitkomst, dus

$$ix = \ln(\cos x + i \sin x)$$

Links en rechts de e -macht nemen geeft

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

zoals bewezen moest worden!

Eulers tweede bewijs

Eulers tweede bewijs verloopt heel anders. Het maakt gebruik van machtreeksen, een instrument dat al door Isaac Newton (1643-1727) bedacht en veelvuldig gebruikt was. Euler gebruikte de bekende reeksontwikkelingen voor de e-machtsfunctie, de cosinus en de sinus. Hier zijn ze

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

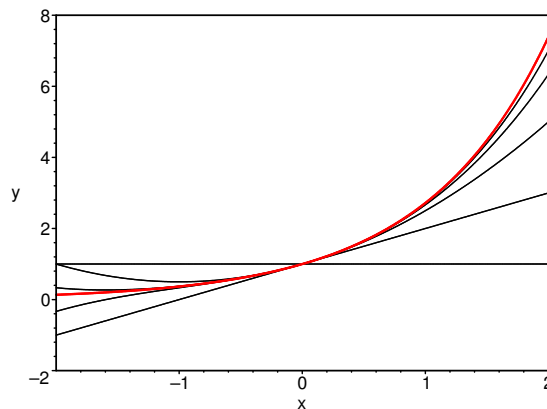
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

In alle reeksen komen *faculteiten* in de noemers voor, dat wil zeggen getallen van de vorm $k! = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times k$. Zo is bijvoorbeeld $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Bij afspraak is $0! = 1$. Die afspraak blijkt gelijk al handig te zijn, want in de reeks voor e^x hadden we het eerste stuk $1 + x$ dus ook kunnen schrijven als $\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!}$. Alle termen zijn dus eigenlijk van dezelfde vorm. Hetzelfde geldt voor de reeksen van de cosinus en de sinus.

De eerste reeks stelt de e-macht voor als een oneindige som van machten van x , een soort 'oneindig polynoom' dus. Om te laten zien hoe dit werkt hebben we hieronder een grafiek gemaakt van de eerste vijf polynoombenaderingen van e^x . Dat zijn de volgende polynomen (de faculteiten hebben we uitgerekend)

$$1, \quad 1 + x, \quad 1 + x + \frac{1}{2}x^2, \quad 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \quad \text{en} \quad 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$



Grafiek van de e-macht (rode grafiek) samen met de eerste vijf polynoombenaderingen.

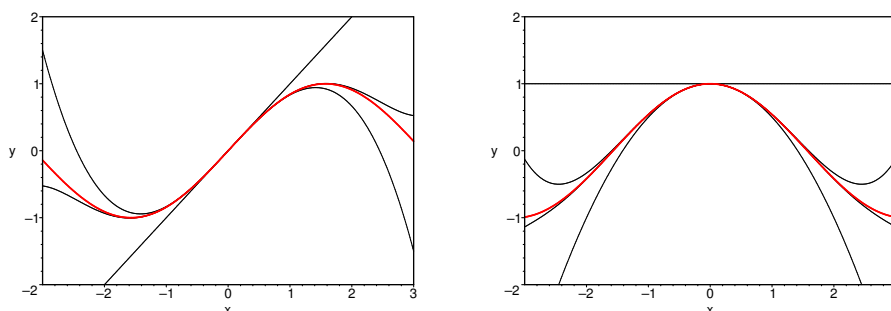
Toegiften

Je ziet dat de benaderingen vlak bij $x = 0$ het beste zijn. De grafieken van de polynomen vouwen zich als het ware vanuit 0 steeds dichter om de grafiek van de e-macht heen. Ga in de figuur zelf na welke grafiek bij welke polynoombenadering hoort.

Alles wat je weet over de e-machtsfunctie kun je met wat moeite ook terugvinden in de reeks. Je weet bijvoorbeeld dat $\frac{d}{dx}e^x = e^x$. Dit zie je als volgt terug in de reeks voor e^x : als je deze reeks differentieert alsof het een polynoom was, dus iedere term apart, dan vind je:

$$\frac{d}{dx}(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots) = 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Dit is precies dezelfde reeks. Differentiëren heeft dus geen effect, net als bij de functie e^x . Ook $e^0 = 1$ klopt netjes met de reeks wanneer je daar $x = 0$ substitueert. Bovendien geeft de reeks ook nieuwe formules cadeau: substitueer je bijvoorbeeld $x = 1$, dan vind je $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$ oftewel $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$ als je de faculteiten uitschrijft.



Grafieken en polynoombenaderingen van de sinus en de cosinus.

Hierboven zie je de grafieken van de sinus en de cosinus en de bijbehorende polynoombenaderingen. Probeer zelf weer na te gaan welke grafieken bij welke polynoombenaderingen horen.

Ook de reeksen voor de cosinus en sinus gedragen zich bij het term voor term differentiëren in overeenstemming met de bekende regels: $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ en

$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, controleer het zelf maar.

Euler had het slimme idee om in de reeks voor de e-macht $i y$ in plaats van x in te vullen. Hij bedacht daarbij dat $(iy)^2 = i^2 y^2 = -y^2$, $(iy)^3 = i^3 y^3 = -iy^3$,

$(iy)^4 = i^4 y^4 = y^4$, $(iy)^5 = i^5 y^5 = iy^5$, enzovoort. Zo kreeg hij

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

Et voilà! Daar stond zijn formule. Zoals gezegd, een strikt formeel bewijs is dit niet, maar zo gaat het in de wiskunde vaak: de grote genieën vinden de grote verbanden; andere grote genieën zetten dan weer de puntjes op de i in een strikt logische zin. Zo is pas in de negentiende eeuw bewezen dat de reeksontwikkelingen voor de e -macht, de cosinus en de sinus zelfs voor alle *complexe* waarden van x convergeren, dat wil zeggen naar een limietwaarde gaan. Dat levert een alternatieve manier om de functies e^z , $\cos z$ en $\sin z$ voor willekeurige complexe waarden van z te definiëren. Alle bekende formules (en nog veel meer) blijken dan ook voor die complexe functies geldig te zijn, maar dat is een verhaal dat we hier niet verder zullen vervolgen.

T.2 De complexe natuurlijke logaritme

In hoofdstuk 2 hebben we de functie e^z voor complexe $z = x + iy$ gedefinieerd als

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

In opgave 2.17 op bladzijde 16 heb je enige eigenschappen van de complexe e -machtsfunctie kunnen bewijzen. We herhalen hier de belangrijkste eigenschappen:

- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ voor elke z_1 en z_2 .
- $|e^z| = e^x$ en $\arg e^z = y$ als $z = x + iy$.
- $e^{z+2k\pi i} = e^z$ voor elk geheel getal k , met andere woorden, de e -macht is *periodiek* met periode $2\pi i$.

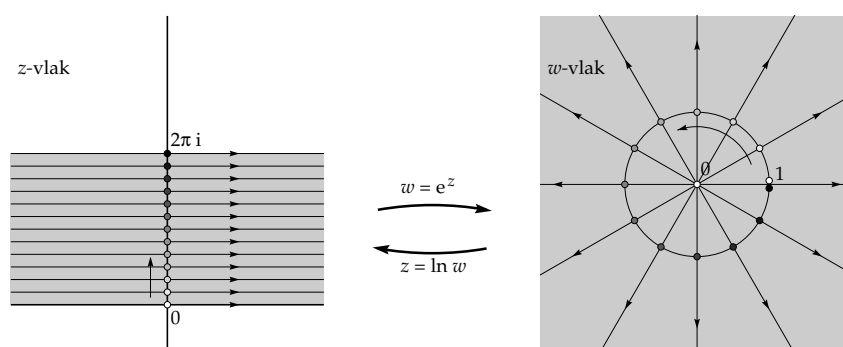
Bovendien hebben we in toegift T.1 via machtreeksen aannemelijk gemaakt dat de e -machtsfunctie gelijk is aan zijn eigen afgeleide, dat wil zeggen dat

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{e^{z+\Delta z} - e^z}{\Delta z} = e^z$$

(Een formeel bewijs hiervan zou hier te ver voeren.) Met dit alles is de complexe e -machtsfunctie een vertrouwd object geworden; in hoofdstuk 5 hebben we er ook al flink mee gewerkt.

Toegiften

In toegift T.1 hebben we ook gezien dat Euler onbekommerd rekende met de natuurlijke logaritme van complexe getallen. Dat roept de vraag op wat precies die natuurlijke logaritme zou moeten zijn. De natuurlijke logaritme is de inverse functie van de e-machtsfunctie, dus die moeten we hiervoor nader onder de loupe nemen. Dat gaat het beste aan de hand van een plaatje, een soort grafiek waarin we voor de functie $w = e^z$ een z -vlak en een w -vlak hebben getekend, met daarin aangegeven welke w -waarden bij welke z -waarden horen.



In het z -vlak is de horizontale strook $0 \leq y \leq 2\pi$ grijs gemaakt. Het stukje van de y -as dat binnen deze strook ligt, wordt op de aangegeven wijze afgebeeld op de eenheidscirkel in het w -vlak. En elke horizontale lijn in het z -vlak komt in het w -vlak terecht op een straal vanuit de oorsprong in het w -vlak. De horizontale strook $0 \leq y \leq 2\pi$ in het z -vlak wordt dus afgebeeld op het *gehele* w -vlak, met uitzondering van de oorsprong. Er is immers geen z waarvoor $e^z = 0$ geldt.

Er is nog wat bijzonder aan de hand: de bovenrand van de strook (dat wil zeggen de lijn $y = 2\pi$) komt op *dezelfde* straal terecht als de onderrand $y = 0$ want voor elke x geldt immers $e^{x+2\pi i} = e^x$. Sterker nog, voor elke z geldt $e^{z+2\pi i} = e^z$, de e-machtsfunctie is immers periodiek met periode $2\pi i$. Nog weer anders gezegd: als we een *willekeurige* horizontale strook nemen met hoogte 2π , dan is het beeld ervan onder de functie $w = e^z$ het gehele w -vlak met uitzondering van het punt $w = 0$.

Wat betekent dat nu voor de inverse functie, de natuurlijke logaritme? Met andere woorden, als we een complex getal w in het w -vlak nemen, wat is dan het complexe getal $z = \ln w$ dat daarbij hoort? Daar is, net als bij de complexe wortelfuncties, weer geen eenduidig antwoord op te geven. Er zijn nu bij elke gegeven $w \neq 0$ zelfs *oneindig veel* kandidaten z voor de titel $\ln w$. Heb je één kandidaat z waarvoor geldt dat $e^z = w$, dan zijn de andere van de vorm $z + 2k\pi i$ voor gehele k . Het is eigenlijk net als met het argument van een complex getal: dat is op gehele veelvoud van 2π na bepaald. En zo is de natuurlijke logaritme van een complex getal tot op gehele veelvoud van $2\pi i$ na bepaald. De natuurlijke

logaritme is dus weer *meerwaardig*. Net als bij de wortelfunctie is de oorsprong ook hier een vertakkingspunt. Loop je in het w -vlak één maal om de oorsprong, dan ga je in het z -vlak van de ene strook naar de volgende strook. Ook dat is in de figuur op bladzijde 70 goed te zien.

Hoe bereken je nu $\ln w$ voor een gegeven complex getal w ? Dat gaat als volgt. Schrijf w in de (r, φ) -notatie, dus $w = re^{i\varphi}$ met $r = |w|$ en $\varphi = \arg w$. Dan is $\ln w = \ln r + i\varphi + 2k\pi i$, dus

$$\ln w = \ln |w| + i \arg w + 2k\pi i$$

Hierbij kunnen we voor $\ln r = \ln |w|$ de 'gewone' reële natuurlijke logaritme van het positieve reële getal $r = |w|$ nemen. We geven wat voorbeelden; controleer ze zelf, ook aan de hand van de figuur op bladzijde 70.

- a. $\ln 1 = 2k\pi i$
- b. $\ln(-1) = \pi i + 2k\pi i$
- c. $\ln e = 1 + 2k\pi i$
- d. $\ln i = \frac{1}{2}\pi i + 2k\pi i$
- e. $\ln(1 + i) = \ln \sqrt{2} + \frac{1}{4}\pi i + 2k\pi i$

Nu we de complexe e-macht en de complexe natuurlijke logaritme kennen, kunnen we ook voor willekeurige complexe getallen α en β met $\alpha \neq e$ definiëren wat α^β is, namelijk

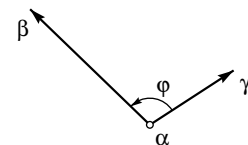
$$\alpha^\beta = e^{\beta \ln \alpha}$$

Een leuke opdracht is nu om te berekenen wat i^i is. Het antwoord verraste zelfs Euler! En kijk ook eens wat er uit $(-1)^{\frac{1}{3}}$ komt. Klopt dat met bladzijde 23?

T.3 Cirkels en koordenvierhoeken

In de laatste opgave van bladzijde 18 is aangetoond dat

$$\frac{(\beta - \alpha)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})}{(\gamma - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha})} = e^{2i\varphi}$$



als φ de hoek tussen de vectoren $\vec{\alpha\gamma}$ en $\vec{\alpha\beta}$ is. Het bewijs was simpel: voor zekere $r > 0$ geldt dat $\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = r e^{i\varphi}$

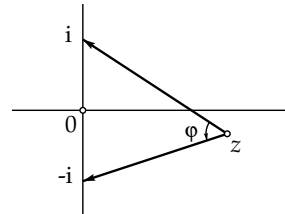
en dus is $\frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\gamma} - \bar{\alpha}} = r e^{-i\varphi}$. Delen geeft het gewenste resultaat. Ik pas dit toe op de situatie dat $\alpha = z$, $\beta = -i$ en $\gamma = i$, waarbij z een punt in het rechterhalfvlak is. Voor de hoek φ geldt dus $0 < \varphi < \pi$. De vergelijking die ontstaat, kan dan geschreven worden als

Toegiften

$$\frac{-i - z}{i - z} = e^{2i\varphi} \frac{i - \bar{z}}{-i - \bar{z}}$$

oftewel

$$(z + i)(\bar{z} + i) = e^{2i\varphi}(z - i)(\bar{z} - i)$$



en dit kan weer geschreven worden als

$$z\bar{z}(1 - e^{2i\varphi}) + i(1 + e^{2i\varphi})z + i(1 + e^{2i\varphi})\bar{z} - (1 - e^{2i\varphi}) = 0$$

Deel deze vergelijking door $2i e^{i\varphi}$ en gebruik de formules van Euler voor $\sin \varphi$ en $\cos \varphi$. Dan ontstaat

$$-(\sin \varphi)z\bar{z} + (\cos \varphi)z + (\cos \varphi)\bar{z} + \sin \varphi = 0$$

Als je vervolgens door $-\sin \varphi$ deelt en

$$m = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1}{\tan \varphi}$$

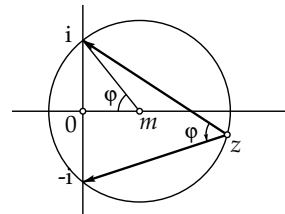
noemt, dan ontstaat de vergelijking

$$z\bar{z} - mz - m\bar{z} - 1 = 0$$

oftewel

$$(z - m)(\bar{z} - m) = 1 + m^2$$

Dit is niets anders dan de vergelijking van de cirkel met middelpunt m (het reële getal m , dus als complex getal ligt het op de reële as) en straal $r = \sqrt{1 + m^2}$. We hebben dus bewezen dat z op deze cirkel ligt! Merk nog op dat je hoek φ ook terugvindt bij het middelpunt m , want $\tan \varphi = \frac{1}{m}$. En bijgevolg geldt ook $\angle(-i, m, i) = 2\varphi$.

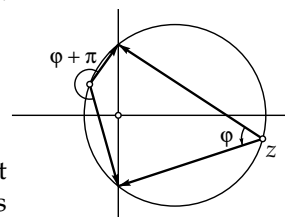


De oogst van deze algebraïsche exercitie is indrukwekkend: allereerst zie je dat *alle* punten z in het rechterhalfvlak waarvoor $\angle(i, z, -i) = \varphi$ geldt, op deze cirkel liggen. Maar je kunt de redenering ook in de omgekeerde richting lezen. Voor alle punten op de cirkel in het rechterhalfvlak geldt dus $\angle(i, z, -i) = \varphi$.

Ook voor de punten op de cirkel in het linkerhalfvlak kom je, terugredenerend, uit op de vergelijking

$$\frac{-i - z}{i - z} = e^{2i\varphi} \frac{i - \bar{z}}{-i - \bar{z}}$$

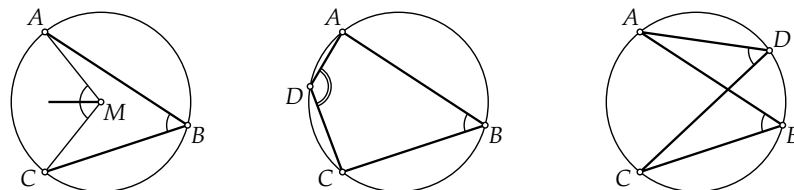
Als je nu bedenkt dat $e^{2i(\varphi+\pi)} = e^{2i\varphi}$, dan zie je dat voor de punten op de cirkel in het linkerhalfvlak dus moet gelden dat $\angle(i, z, -i) = \varphi + \pi$.



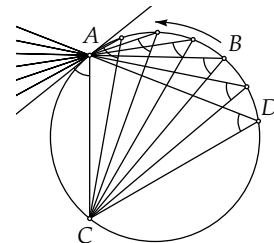
In feite hebben we in het bovenstaande een hele serie stellingen uit de vlakke meetkunde over cirkels bewezen. Immers, de keuze voor de punten i en $-i$ als ‘ankerpunten’ waar de hele berekening op gebaseerd is, is geen beperking van de algemeenheid. Bij elk tweetal punten P en Q in het vlak kunnen we een rechthoekig coördinatenstelsel kiezen waarin $P = (0, 1)$ en $Q = (0, -1)$ is, of uitgedrukt in complexe getallen, waarin $P = i$ en $Q = -i$ is.

Hier is een lijst van stellingen die we bewezen hebben. In alle gevallen hoef je slechts $A = i$ en $C = -i$ te nemen, en voor de punten B of D het variabele punt z te lezen, om de bewijzen van die stellingen uit de bovenstaande berekening te destilleren. Ga dit zelf na.

1. Als de punten A, B en C op een cirkel met middelpunt M liggen, dan geldt $\angle(A, B, C) = \frac{1}{2}\angle(A, M, C)$.
2. Als A, B, C, D in deze volgorde op een cirkel liggen (men noemt $ABCD$ dan een *koordenvierhoek*), dan geldt dat $\angle(A, B, C) + \angle(C, D, A) = \pi$.
3. Als de punten B en D aan weerszijden van een lijn AC liggen en als geldt dat $\angle(A, B, C) + \angle(C, D, A) = \pi$ dan liggen A, B, C en D in deze volgorde op een cirkel, met andere woorden, dan is $ABCD$ een koordenvierhoek.
4. Als de punten B en D aan dezelfde kant van een lijn AC liggen en als geldt dat $\angle(A, B, C) = \angle(A, D, C)$ dan liggen A, B, C en D op een cirkel.



Wanneer je in stelling 3 of stelling 4 het punt B langs de cirkel tot het punt A laat naderen, dan gaat het (verlengde) been AB van $\angle(A, B, C)$ over in de raaklijn in A aan de cirkel, terwijl het been BC overgaat in de koorde AC . Hoek $\angle(A, B, C)$ blijft al die tijd hetzelfde en dus geldt ook de volgende stelling



5. Als AC een koorde van een cirkel is en als D een ander punt op de cirkel is, dan maken de raaklijn aan de cirkel in A en de koorde AC een hoek met elkaar die gelijk is aan $\angle(A, D, C)$ of $\pi - \angle(A, D, C)$.

T.4 De cirkels van Apollonius

Met complexe getallen kun je ook heel gemakkelijk de volgende stelling over cirkels bewijzen.

Als A en B verschillende punten in het vlak zijn en als r een willekeurig positief reëel getal is, dan vormen alle punten C waarvoor geldt dat $d(A, C) = r d(B, C)$ een cirkel, de zogenaamde *cirkel van Apollonius* bij de punten A en B en de afstandsverhouding r (naar Apollonius van Perga, 262-190 v. Chr.). Deze cirkel snijdt elke cirkel door A en B loodrecht.

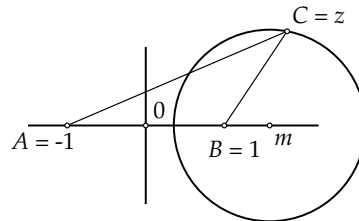
Hierin betekent $d(A, C)$ de afstand tussen A en C enzovoort. De stelling gaat dus over de verzameling van alle punten C waarvoor de afstand van C tot A precies r maal zo groot is als de afstand van C tot B . In het bijzondere geval $r = 1$ zijn de afstanden $d(A, C)$ en $d(B, C)$ gelijk, en dan is die verzameling de *middelloodlijn* van AB . Je zou die lijn kunnen opvatten als een ‘cirkel met straal oneindig’. Zoals we zullen zien, past die lijn dan ook heel goed binnen de collectie van alle cirkels van Apollonius bij A en B . Maar stel in het vervolg dat $r \neq 1$ is.

Neem nu $A = -1$, $B = 1$ en stel dat voor het punt $c = z$ geldt dat $d(A, C) = r d(B, C)$. Dan geldt dus dat $|z + 1| = r |z - 1|$ oftewel

$$(z + 1)(\bar{z} + 1) = r^2(z - 1)(\bar{z} - 1)$$

en dat kun je omwerken tot

$$(1 - r^2)z\bar{z} + (1 + r^2)z + (1 + r^2)\bar{z} + (1 - r^2) = 0$$



Deel deze vergelijking door $1 - r^2$ en noem $m = (r^2 + 1)/(r^2 - 1)$ dan ontstaat de volgende vergelijking (let op de tekens)

$$z\bar{z} - mz - m\bar{z} + 1 = 0$$

Dit is inderdaad een vergelijking van een cirkel, want je kunt dit schrijven als

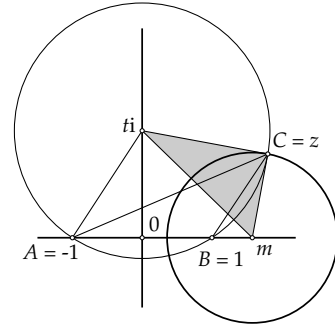
$$(z - m)(\bar{z} - m) = m^2 - 1$$

Werk de haakjes maar uit! Nu zie je dat alle punten $C = z$ die voldoen aan de eis $|z + 1| = r |z - 1|$ op deze cirkel liggen, en omgekeerd dat voor elk punt $C = z$ op die cirkel ook aan $|z + 1| = r |z - 1|$ voldoet. De cirkel heeft het reële getal m als middelpunt en het getal $\sqrt{m^2 - 1}$ als straal. Daarmee is de cirkel van Apollonius gevonden.

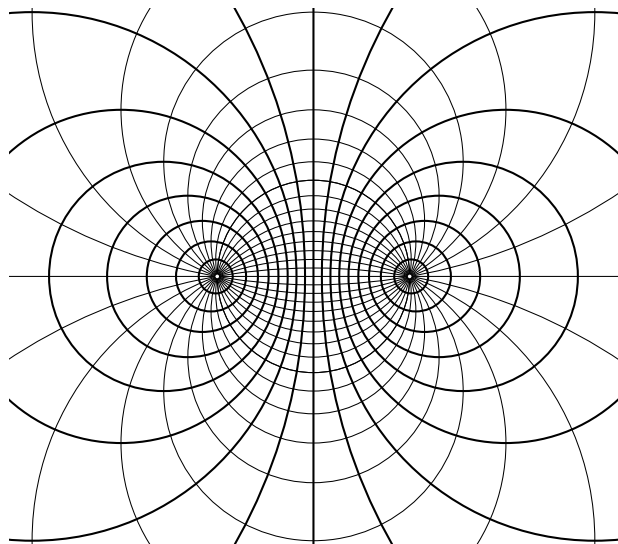
Neem nu een willekeurige cirkel door A en B . Het middelpunt daarvan is een punt op de imaginaire as, dus het is het imaginaire getal $t i$ voor een zeker reëel getal t . De straal van die cirkel kun je vinden door de stelling van Pythagoras toe

te passen op de driehoek met hoekpunten $t i$, 0 en -1 . Die straal is dus gelijk aan $\sqrt{t^2 + 1}$. Maar $|z - m|^2 = m^2 - 1$ en $|m - t i|^2 = m^2 + t^2 = (m^2 - 1) + (t^2 + 1)$.

Ook in de driehoek met hoekpunten z , $t i$ en m geldt dus de stelling van Pythagoras, en dat betekent dat de hoek bij $C = z$ een rechte hoek moet zijn. De stralen van de twee cirkels snijden elkaar dus loodrecht in C . Ook de beide cirkels snijden elkaar dus loodrecht want in een cirkel staat de raaklijn altijd loodrecht op de straal naar het raakpunt en de hoek waaronder twee cirkels elkaar snijden, is per definitie de hoek tussen de raaklijnen in het snijpunt.



Hiermee is de stelling bewezen. We hebben dus aangetoond dat een cirkel van Apollonius loodrecht staat op *elke* cirkel door A en B . Maar dit geldt voor *elke* cirkel van Apollonius, en dus hebben we in feite bewezen dat elke cirkel van Apollonius elke cirkel door A en B loodrecht snijdt. De fraaie figuur die daarbij hoort, zie je hieronder. Je ziet dat elk van de twee collecties ook een rechte lijn (cirkel met straal oneindig) bevat: de Apollonius-collectie bevat de middelloodlijn van AB en de collectie van alle cirkels door de punten A en B bevat ook de lijn door A en B .



T.5 Een bewijs van de Hoofdstelling van de algebra

In hoofdstuk 3 is de *Hoofdstelling van de Algebra* genoemd:

Hoofdstelling van de algebra: Bij elk n -degraads polynoom $p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$ met $n \geq 1$ zijn er n complexe getallen z_1, \dots, z_n zo, dat $p(z) = \alpha_n (z - z_1) \dots (z - z_n)$.

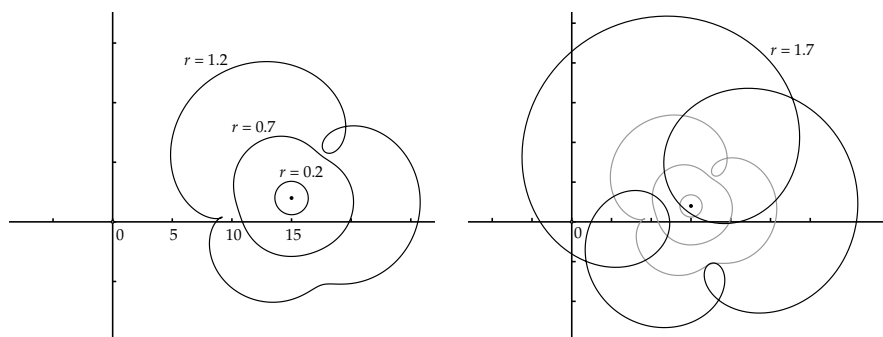
We zullen er nu een bewijs van geven. We maken daarbij gebruik van de *factorstelling* die ook in hoofdstuk 3 genoemd is (zie de bladzijden 28 en 29). Op grond van de factorstelling is het voldoende om aan te tonen dat elk polynoom $p(z)$ van graad groter dan 0 *minstens één* nulpunt heeft. Als je dat nulpunt z_1 noemt, kun je namelijk op grond van de factorstelling een factor $z - z_1$ afsplitsen. Je kunt $p(z)$ dus schrijven als $p(z) = (z - z_1)q(z)$, waarbij $q(z)$ een polynoom van graad $(n - 1)$ is. Op $q(z)$ kun je weer hetzelfde recept toepassen, enzovoort, totdat de graad van het resterende polynoom 0 is geworden. In n stappen vind je dus de volledige ontbinding.

We illustreren het bewijs eerst aan de hand van een voorbeeld. Neem

$$p(z) = z^4 + iz^3 + 7z + 15 + 2i$$

We zullen laten zien dat $p(z)$ minstens één nulpunt heeft met een methode die op alle polynomen toegepast kan worden. We bekijken de functie $w = p(z)$ en tekenen het beeld in het w -vlak van een cirkel $|z| = r$ in het z -vlak. Dit beeld is voor elke positieve reële r een zekere gesloten kromme K_r in het w -vlak.

Als r heel klein is, is de term $7z$ in het polynoom $p(z)$ ook heel klein. De term iz^3 is nog veel kleiner, en z^4 is nog weer veel kleiner. Alle termen van $p(z)$ behalve de constante term $15 + 2i$ zijn dus heel klein. De beeldkromme K_r van $|z| = r$ zal in het w -vlak dus heel dicht bij het punt $15 + 2i$ liggen.

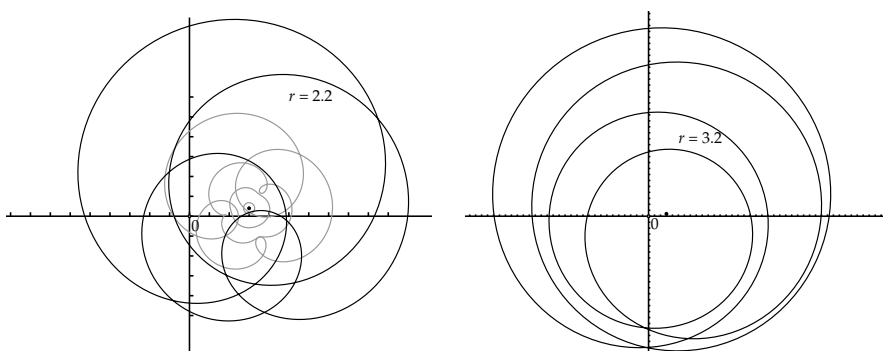


Neem je vervolgens wat grotere waarden voor r , dan kan de kromme K_r in het w -vlak zich ook wat verder van het punt $15 + 2i$ gaan verwijderen. In de bovenstaande figuur hebben we een aantal van die krommen in het w -vlak getekend.

In de linkerfiguur bij $r = 0.2$, $r = 0.7$ en $r = 1.2$. Voor $r = 0.2$ is het vrijwel een cirkel met middelpunt $15 + 2i$. Snap je waarom? Voor $r = 0.7$ en $r = 1.2$ is de kromme al wat grilliger geworden. Je zou een animatie kunnen maken waarbij je r geleidelijk laat toenemen zodat die krommen K_r ook geleidelijk in elkaar overgaan.

In de rechterfiguur (die iets is uitgezoomd) zijn we aangekomen bij $r = 1.7$. De kromme K_r heeft nu drie krullen gekregen, maar wat belangrijker is, hij moet onderweg voor een tussenliggende waarde van r de oorsprong gepasseerd zijn! Dat betekent dat er daar een nulpunt van $p(z)$ moet zijn, een punt z_0 waarvoor $p(z_0) = 0$ geldt.

In feite zijn we nu klaar: we hebben een nulpunt gevonden. Maar voor het vervolg is het toch goed om te kijken wat er gebeurt als r nog verder toeneemt. In de onderstaande figuur is links $r = 2.2$ genomen. De kromme K_r heeft nu drie krullen, en twee ervan lopen om de oorsprong heen. Er zal voor een tussenliggende r -waarde dus nóg wel een nulpunt zijn bijgekomen. De rechterfiguur (die nog weer verder is uitgezoomd) hoort bij $r = 3.2$. De beeldkromme K_r loopt nu vier maal om de oorsprong heen.



Wat zou er gebeuren als r nog verder toeneemt? Dat kun je zien als je $p(z)$ schrijft als

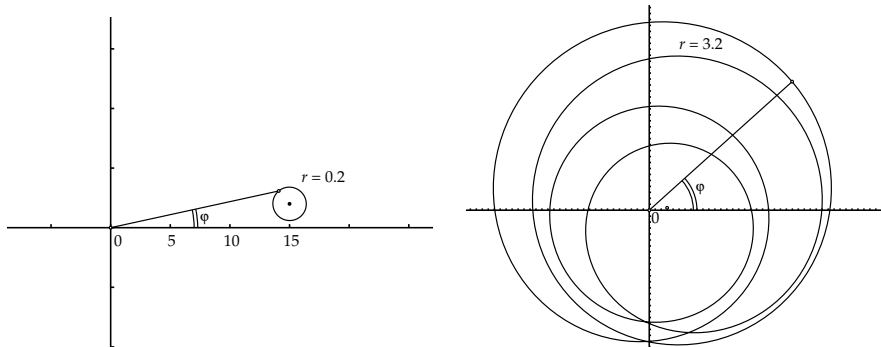
$$p(z) = z^4 \left(1 + \frac{i}{z} + \frac{7}{z^3} + \frac{15 + 2i}{z^4} \right)$$

Alle termen tussen de haakjes behalve de 1 worden op den duur verwaarloosbaar klein, en voor grote r is $p(z)$ dus vrijwel gelijk aan z^4 . De functie $w = z^4$ heeft als beeld van de cirkel $|z| = r$ in het z -vlak de cirkel $|w| = r^4$ in het w -vlak die vier maal doorlopen wordt als z één maal over de cirkel $|z| = r$ loopt. De functie $w = p(z)$ zal dus voor grote r ongeveer hetzelfde gedrag vertonen.

We kunnen die redenering als volgt nader preciseren. Bekijk voor een punt z op de cirkel met straal r in het z -vlak het argument $\varphi = \arg(p(z))$ van het beeldpunt $w = p(z)$ op K_r in het w -vlak. De toename $\Delta\varphi$ van φ als z éénmaal de cirkel $|z| = r$

Toegiften

tegen de klok in doorloopt, noemen we het *omloopsgetal* van de kromme K_r . Als K_r niet door de oorsprong gaat, is het omloopsgetal een geheel aantal malen 2π . Voor kleine positieve r , bijvoorbeeld $r = 0.2$, is het omloopsgetal $\Delta\varphi = 0$, maar voor grote r , bijvoorbeeld $r = 3.2$ is het $\Delta\varphi = 4 \times 2\pi = 8\pi$.



Als r geleidelijk toeneemt, blijft het omloopsgetal constant zolang K_r de oorsprong niet passeert (bedenk dat in de oorsprong het argument φ niet gedefinieerd is; voor een kromme door de oorsprong is het omloopsgetal dus ook niet gedefinieerd). We weten zeker dat $\Delta\varphi = 4 \times 2\pi = 8\pi$ is voor grote r want wegens $\arg(w_1 w_2) = \arg(w_1) + \arg(w_2)$ (zie bladzijde 17) is

$$\arg(p(z)) = \arg z^4 + \arg \left(1 + \frac{i}{z} + \frac{7}{z^3} + \frac{15 + 2i}{z^4} \right)$$

en de toename van de tweede term is voor grote r nul. Zou $p(z)$ geen nulpunten hebben, dan zou $\Delta\varphi$ voor alle $r > 0$ dezelfde waarde moeten hebben, en dat is dus niet waar.

Nu het algemene geval van een n -degraadspolynoom

$$p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

met $n \geq 1$ en $\alpha_n \neq 0$. We willen bewijzen dat $p(z)$ minstens één nulpunt heeft. Je mag natuurlijk aannemen dat $\alpha_0 \neq 0$ is, want anders is $z_0 = 0$ een nulpunt. Volg nu dezelfde redenering als boven en bekijk de beeldkromme K_r in het w -vlak van de cirkel $|z| = r$ in het z -vlak. Voor kleine r ligt die kromme vlak bij α_0 , dus zeker buiten de oorsprong en dan is het omloopsgetal 0. Voor heel grote r is die kromme vrijwel de cirkel $|w| = |\alpha_n| r^n$ (die bovendien n maal doorlopen wordt) en dan is het omloopsgetal $2n\pi$. Onderweg van kleine r naar grote r moet K_r de oorsprong dus zeker minstens één maal gepasseerd zijn. Daarmee is het bewijs voltooid.

T.6 De derdegraadsvergelijking

Complexe getallen zijn in de zestiende eeuw bedacht door Italiaanse rekenmeesters in een poging een soort ‘*abc*-formule’ te vinden voor derdegraadsvergelijkingen. Bij de door Scipio del Ferro (ca. 1465-1526) en Niccolo Tartaglia (ca. 1499-1557) gevonden oplossing van het probleem, die in 1545 door Geronimo Cardano (1501-1576) in zijn *Ars Magna* gepubliceerd werd, bleek het noodzakelijk te zijn om op een formele manier te rekenen met vierkantswortels uit negatieve getallen, althans in die gevallen waarin de derdegraadsvergelijking drie verschillende reële oplossingen had. In zijn in 1572 verschenen *Algebra* bracht Rafaele Bombelli (1526-1573) enige klaarheid in de duisternis door een algemene theorie voor deze ‘imaginaire getallen’ te ontwikkelen. De meetkundige voorstelling van complexe getallen als punten in het vlak is pas veel later gevonden: eerst door C. Wessel (1797), daarna herontdekt door J.R. Argand (1806) en vervolgens opnieuw door Carl Friedrich Gauss (1777-1855), die er veelvuldig gebruik van maakte.

In deze paragraaf zullen we niet de oude Italiaanse methode presenteren, maar een andere methode die de meetkundige aspecten meer benadrukt. Er moet overigens bij gezegd worden dat dit soort methodes, hoe mooi en belangrijk ze ook zijn vanuit wiskundig standpunt bekeken, voor de praktijk nauwelijks nut hebben. Er zijn veel snellere numerieke methodes bekend om de wortels van derde- en hogeregraadsvergelijkingen te berekenen. Die geven echter geen exacte antwoorden, maar benaderingen in elke gewenste nauwkeurigheid.

Eerst een opmerking over tweedegraadsvergelijkingen. Als

$$z^2 - pz + q = 0$$

zo’n vergelijking is, en z_1 en z_2 zijn de (eventueel samenvallende) wortels, dan geldt $p = z_1 + z_2$ en $q = z_1 z_2$. Je ziet dit door het linkerlid te schrijven in de vorm $(z - z_1)(z - z_2)$ en de haakjes uit te werken:

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2$$

Hieruit volgt in het bijzonder dat we z_1 en z_2 gemakkelijk kunnen vinden als $p = z_1 + z_2$ en $q = z_1 z_2$ bekend zijn: stel de vierkantsvergelijking $z^2 - pz + q = 0$ op en los die op met de *abc*-formule.

Nu de derdegraadsvergelijking. Op bladzijde 83 geven we het oplossingsrecept. Dat is dus de ‘*abc*-formule’ voor derdegraadsvergelijkingen! Het zal nog een heel verhaal zijn om dat recept te verklaren. Om dat zo overzichtelijk mogelijk te houden, schrijven we de derdegraadsvergelijking in de vorm

$$z^3 - 3a_1 z^2 + 3a_2 z - a_3 = 0 \tag{1}$$

dus met afwisselend plus- en mintekens, en een factor 3 bij de kwadratische en de lineaire term. Het bijbehorende polynoom noemen we $P(z)$. Wortels van de vergelijking corresponderen met nulpunten van $P(z)$.

Overigens, om in het vervolg een overvloed aan Griekse letters te voorkomen, spreken we nu af dat alle voorkomende gewone letters, zoals bijvoorbeeld a_1 , a_2 en a_3 , ook complexe getallen kunnen voorstellen. Natuurlijk zullen we later ook speciale aandacht besteden aan het geval dat $P(z)$ een reëel polynoom is, maar voor onze oplossingsmethode zal dat niet uitmaken.

Bijzondere gevallen

We weten al dat vergelijking (1) drie oplossingen z_1 , z_2 en z_3 heeft. Twee of drie daarvan kunnen samenvallen. Als dat gebeurt, zijn de oplossingen gemakkelijk te bepalen, want een dubbel nulpunt van een polynoom is ook een nulpunt van de afgeleide. Die is in dit geval van de graad 2, en je kunt de nulpunten daarvan dus met de *abc*-formule vinden. Ga daarna na of zo'n nulpunt ook een nulpunt van $P(z)$ is. Zo ja, dan vind je via de factorstelling ook het derde nulpunt. We zullen daarom vanaf nu veronderstellen dat de gegeven derdegraadsvergelijking drie *verschillende* oplossingen z_1 , z_2 en z_3 heeft.

Er is nóg een situatie waarin de oplossingen gemakkelijk te vinden zijn, namelijk wanneer 'derdemachtafsplitsen' tot een vorm zonder term met z leidt. Daarmee bedoelen we het volgende. Wegens

$$z^3 - 3a_1z^2 + 3a_2z - a_3 = (z - a_1)^3 + 3(a_2 - a_1^2)z - (a_3 - a_1^3)$$

heeft het rechterlid geen term met z als

$$a_2 - a_1^2 = 0 \tag{2}$$

Dan is de oorspronkelijke vergelijking dus te schrijven als

$$(z - a_1)^3 = a_3 - a_1^3$$

met als oplossingen

$$z_{1,2,3} = a_1 + \sqrt[3]{a_3 - a_1^3}$$

Hier staan inderdaad *drie* oplossingen, want er zijn drie derdemachtswortels (behalve als $a_3 - a_1^3 = 0$; dan is a_1 dus een drievoudige wortel).

De grote lijn

Vanaf nu veronderstellen we dus dat de wortels z_1 , z_2 en z_3 van vergelijking (1) verschillend zijn en dat $a_2 - a_1^2 \neq 0$. Het idee is nu om vier getallen h_1 , h_2 , p en q te vinden met $p \neq 0$, $q \neq 0$ en $h_1 \neq h_2$ waarvoor geldt dat

$$z^3 - 3a_1z^2 + 3a_2z - a_3 = p(z - h_1)^3 + q(z - h_2)^3 \tag{3}$$

Als dit lukt, kunnen we de oorspronkelijke vergelijking dus schrijven als

$$p(z - h_1)^3 + q(z - h_2)^3 = 0$$

en die is eenvoudig oplosbaar:

$$\left(\frac{z-h_1}{z-h_2}\right)^3 = \frac{-q}{p}$$

Noem voor het gemak even $R = \frac{-q}{p}$, dan is

$$\frac{z-h_1}{z-h_2} = \sqrt[3]{R}$$

Zoals we weten, zijn er drie complexe derdemachtswortels r_1, r_2 en r_3 van R en dit geeft dus de vergelijkingen

$$\frac{z-h_1}{z-h_2} = r_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4)$$

Vermenigvuldig links en rechts met $z-h_2$

$$z-h_1 = (z-h_2)r_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

dan krijg je na herschikken

$$z(1-r_i) = h_1 - h_2r_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Delen door $1-r_i$ levert dan de drie oplossingen

$$z_i = \frac{h_1 - h_2r_i}{1 - r_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5)$$

De details

We werken dit idee nu uit. Vergelijking (3) geeft na haakjes uitwerken en gelijkstellen van de coëfficiënten van de machten van z

$$1 = p + q \quad (6)$$

$$a_1 = ph_1 + qh_2 \quad (7)$$

$$a_2 = ph_1^2 + qh_2^2 \quad (8)$$

$$a_3 = ph_1^3 + qh_2^3 \quad (9)$$

Dit zijn vier vergelijkingen voor de vier onbekenden h_1, h_2, p en q . Oplossen van dit stelsel vraagt wat trucs. Eerst een truc om h_1 en h_2 te vinden. We vermenigvuldigen vergelijking (6) met vergelijking (8) en trekken daar het kwadraat van vergelijking (7) vanaf. Het linkerlid is dan $1 \cdot a_2 - a_1^2$ en het rechterlid is $(p+q)(ph_1^2 + qh_2^2) - (ph_1 + qh_2)^2$. Maar dat rechterlid is via haakjes uitwerken en termen samen nemen te schrijven als $pq(h_1 - h_2)^2$. Nog wat korter geformuleerd: $(6) \times (8) - (7)^2$ levert

$$a_2 - a_1^2 = (p+q)(ph_1^2 + qh_2^2) - (ph_1 + qh_2)^2 = pq(h_1 - h_2)^2$$

Toegiften

Evenzo volgt uit $(6) \times (9) - (7) \times (8)$

$$a_3 - a_1 \cdot a_2 = (p + q)(ph_1^3 + qh_2^3) - (ph_1 + qh_2)(ph_1^3 + qh_2^3) = pq(h_1 - h_2)^2(h_1 + h_2)$$

en uit $(7) \times (9) - (8)^2$

$$a_1 \cdot a_3 - a_2^2 = (ph_1 + qh_2)(ph_1^3 + qh_2^3) - (ph_1^2 + qh_2^2)^2 = pq(h_1 - h_2)^2 h_1 h_2$$

Noem nu

$$\begin{aligned} A &= a_2 - a_1^2 && (= pq(h_1 - h_2)^2) \\ B &= a_3 - a_1 a_2 && (= pq(h_1 - h_2)^2(h_1 + h_2)) \\ C &= a_1 a_3 - a_2^2 && (= pq(h_1 - h_2)^2 h_1 h_2) \end{aligned}$$

dan is om te beginnen $A \neq 0$ zoals we aan het begin al hadden verondersteld, want anders konden we (1) oplossen via 'derdemachtsplitsen' (zie ook (2)). Dat betekent dat $B/A = h_1 + h_2$ en $C/A = h_1 h_2$. Daarmee kun je h_1 en h_2 vinden als oplossingen van de vierkantsvergelijking

$$h^2 - \frac{B}{A}h + \frac{C}{A} = 0$$

oftewel, na vermenigvuldigen met A en terugsubstitueren,

$$(a_2 - a_1^2)h^2 - (a_3 - a_1 a_2)h + (a_1 a_3 - a_2^2) = 0 \quad (10)$$

Merk nog op dat $h_1 \neq h_2$ omdat anders $A = a_2 - a_1^2 = pq(h_1 - h_2)^2 = 0$ zou zijn. De discriminant

$$D = B^2 - 4AC = (a_3 - a_1 a_2)^2 - 4(a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2)$$

is dus niet nul. Later zullen we nader ingaan op de betekenis van D .

We hebben nu dus h_1 en h_2 gevonden, en we weten dat $h_1 \neq h_2$. Rest nog de bepaling van p en q , of liever gezegd het quotiënt $R = \frac{-q}{p}$, want dat quotiënt is het enige dat we nodig hebben. Dat gaat het gemakkelijkst via (6) en (7). Vermenigvuldig (6) met h_1 en trek daar (7) vanaf, dan krijg je $h_1 - a_1 = q(h_1 - h_2)$. Vermenigvuldig (6) met h_2 en trek daar (7) vanaf, dan krijg je $h_2 - a_1 = p(h_2 - h_1)$. Deel ze op elkaar, dan ontstaat

$$R = \frac{-q}{p} = \frac{h_1 - a_1}{h_2 - a_1} \quad (11)$$

Daarmee is het gezochte quotiënt bepaald en zijn alle ingrediënten voor de oplossing gevonden. Merk nog op dat $R = \frac{h_1 - a_1}{h_2 - a_1} \neq 1$ wegens $h_1 \neq h_2$. Dit is van belang omdat anders de oplossing via vergelijking (5) spaak loopt!

Het oplossingsrecept

Het is je inmiddels waarschijnlijk gaan duizelen van alle letters, quotiënten en wortels. Toch is deze methode uiteindelijk nog vrij overzichtelijk samen te vatten in de vorm van een oplossingsrecept. Hieronder staat het; het is niet moeilijk om het met behulp van bijvoorbeeld een computeralgebrapakket te programmeren. Zo'n pakket moet natuurlijk wel raad weten met complexe getallen!

Oplossingsrecept voor derdegraadsvergelijkingen:

1. Schrijf de vergelijking in de vorm (1).
2. Controleer of er meervoudige wortels zijn. Zo ja, los de vergelijking dan op met behulp van de afgeleide.
3. Controleer of $a_2 - a_1^2 = 0$. Zo ja, los de vergelijking dan op via 'derdemachtafsplitsen'.
4. Stel de vierkantsvergelijking (10) op en bepaal de wortels h_1 en h_2 met de *abc*-formule.
5. Bereken de derdemachtswortels r_1, r_2, r_3 van het getal $R = \frac{h_1 - a_1}{h_2 - a_1}$.
6. De oplossingen van (1) zijn nu

$$z_i = \frac{h_1 - h_2 r_i}{1 - r_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Twee voorbeelden met reële polynomen

We illustreren de methode aan de hand van twee voorbeelden. In beide gevallen kun je de wortels met een beetje handigheid ook wel direct vinden, maar hier gaat het erom het recept te demonstreren. Het eerste voorbeeld is de volgende vergelijking

$$z^3 - 3z^2 - z + 3 = 0$$

Hier is dus

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{3}, \quad a_3 = -3$$

en

$$A = a_2 - a_1^2 = -\frac{4}{3}, \quad B = a_3 - a_1 a_2 = -\frac{8}{3}, \quad C = a_1 a_3 - a_2^2 = -\frac{28}{9}$$

Je ziet dat $A \neq 0$. (De test dat er geen meervoudige wortels zijn kun je zelf wel uitvoeren.) De vierkantsvergelijking (10) kan worden vereenvoudigd tot

$$3h^2 - 6h + 7 = 0$$

met als oplossingen

$$h_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 84}}{6} = 1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}i$$

Toegiften

Hieruit volgt

$$R = \frac{h_1 - a_1}{h_2 - a_1} = -1$$

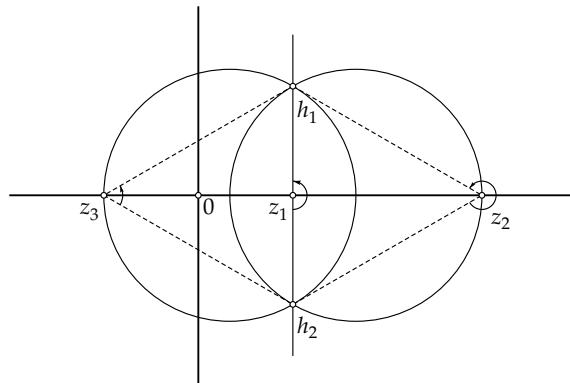
zodat (zie ook bladzijde 23)

$$r_1 = -1, \quad r_2 = e^{-\pi i/3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i, \quad r_3 = e^{\pi i/3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

en

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{h_1 - h_2 r_1}{1 - r_1} = 1 \\ z_2 &= \frac{h_1 - h_2 r_2}{1 - r_2} = 3 \\ z_3 &= \frac{h_1 - h_2 r_3}{1 - r_3} = -1 \end{aligned}$$

waarbij die laatste twee berekeningen enig doorzettingsvermogen, of een goed computeralgebrapakket vragen. Wat je in elk geval hier gedemonstreerd ziet, is dat je om tot de drie *reële* oplossingen te komen, gebruik moest maken van *complexe* (niet-reële) hulppunten h_1 en h_2 . De discriminant $D = B^2 - 4AC = -\frac{256}{27}$ is dan ook negatief.



In de bovenstaande figuur is de situatie geschetst. Daarbij zijn ook de cirkels of rechte lijnen getekend door de drietallen punten (z_1, z_2, z_3) , (h_1, z_1, h_2) , (h_1, z_2, h_2) en (h_1, z_3, h_2) . De eerste 'cirkel' is in feite een rechte lijn (een cirkel met straal oneindig); dat geldt ook voor de 'cirkel' (h_1, z_1, h_2) . De 'cirkel' (z_1, z_2, z_3) snijdt de andere drie cirkels onder rechte hoeken, de andere drie snijden elkaar in h_1 en h_2 onder hoeken van $\frac{1}{3}\pi$ radialen.

Dat is altijd het geval bij oplossingen van een derdegraadsvergelijking: de drie cirkels (h_1, z_i, h_2) door h_1 en h_2 snijden elkaar altijd onder hoeken van $\frac{1}{3}\pi$. Voor het bewijs kun je gebruik maken van stelling 5 op bladzijde 74 en het feit dat de

hoeken $\angle(h_1, z_1, h_2)$, $\angle(h_1, z_2, h_2)$ en $\angle(h_1, z_3, h_2)$ onderling steeds $\frac{2}{3}\pi$ verschillen omdat de getallen $r_i = \frac{z_i - h_1}{z_i - h_2}$ de drie derdemachtswortels zijn van R (zie (4) op bladzijde 81). Met wat je weet over de cirkels van Apollonius (zie bladzijde 74) kun je ook makkelijk aantonen dat de cirkel (z_1, z_2, z_3) de drie cirkels door h_1 en h_2 loodrecht snijdt. Uit (4) volgt namelijk door de absolute waarde te nemen dat $|r_i| = \frac{|z_i - h_1|}{|z_i - h_2|}$ voor $i = 1, 2, 3$. Maar $|r_i| = \sqrt[3]{|R|}$ (reële derdemachtswortel) en die is dus voor alle r_i hetzelfde. De z_i liggen dus op de cirkel van Apollonius van h_1 en h_2 met afstandsverhouding $\sqrt[3]{|R|}$. Ook in het volgende voorbeeld zul je dit geïllustreerd zien.

Bij het tweede voorbeeld hebben we voor het vereenvoudigen van enige tussenschappen gebruik gemaakt van het computeralgebrapakket Maple omdat de berekeningen met de hand zeer omslachtig zijn. Het gaat om de vergelijking

$$z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0$$

dus

$$a_1 = -\frac{2}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = -2$$

en

$$A = a_2 - a_1^2 = -\frac{1}{9}, \quad B = a_3 - a_1 a_2 = -\frac{16}{9}, \quad C = a_1 a_3 - a_2^2 = \frac{11}{9}$$

Je ziet dat $A \neq 0$. De vierkantsvergelijking (10) kan worden vereenvoudigd tot

$$h^2 - 16h - 11 = 0$$

met als oplossingen

$$h_{1,2} = 8 \pm 5\sqrt{3}$$

Hieruit volgt

$$R = \frac{h_1 - a_1}{h_2 - a_1} = \frac{26 - 15\sqrt{3}}{26 + 15\sqrt{3}} = 1351 - 780\sqrt{3} \quad (\approx 0.000370)$$

zodat (met dank aan Maple)

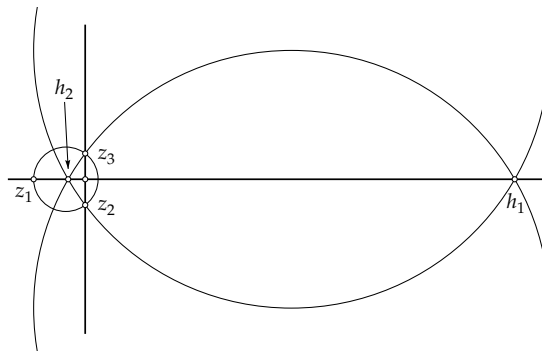
$$\begin{aligned} r_1 &= 7 - 4\sqrt{3} \quad (\approx 0.0718) \\ r_2 &= (7 - 4\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) \\ r_3 &= (7 - 4\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) \end{aligned}$$

Toegiften

en (opnieuw met dank aan Maple)

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{h_1 - h_2 r_1}{1 - r_1} = -2 \\z_2 &= \frac{h_1 - h_2 r_2}{1 - r_2} = -i \\z_3 &= \frac{h_1 - h_2 r_3}{1 - r_3} = i\end{aligned}$$

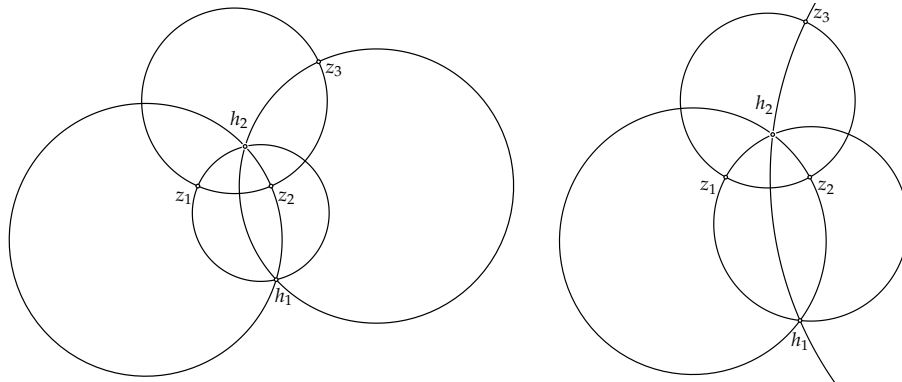
Je ziet dat er nu twee *reële* hulppunten h_1 en h_2 zijn, maar twee toegevoegd complexe oplossingen en één reële oplossing. De discriminant $D = B^2 - 4AC = \frac{100}{27}$ is nu dan ook positief.



In de bovenstaande figuur is de situatie geschetst. Ook hierbij snijdt de cirkel (z_1, z_2, z_3) (een cirkel van Apollonius) de cirkels (z_1, h_1, h_2) , (z_2, h_1, h_2) en (z_3, h_1, h_2) loodrecht, terwijl die laatste drie cirkels elkaar in h_1 en h_2 onder hoeken van $\frac{1}{3}\pi$ snijden. In dit geval is (z_1, h_1, h_2) een rechte lijn; je zou weer kunnen zeggen een 'cirkel met straal oneindig'.

Nog twee voorbeelden

We geven hieronder nog twee voorbeelden, waarbij we de numerieke berekeningen met behulp van het computeralgebrapakket Maple hebben uitgevoerd. Het doel is te illustreren dat ook in deze gevallen de cirkel (z_1, z_2, z_3) de drie cirkels (h_1, z_1, h_2) , (h_1, z_2, h_2) en (h_1, z_3, h_2) loodrecht snijdt, en dat deze drie cirkels elkaar onderling in h_1 en h_2 onder hoeken van $\frac{1}{3}\pi$ (60 graden) snijden. De vergelijkingen zijn weer zo gekozen, dat je de oplossingen ook gemakkelijk direct kunt zien.



In de linkerfiguur gaat het om de derdegraadsvergelijking

$$z^3 - (2.3 + 3.4i)z^2 - z + (2.3 + 3.4i) = 0$$

met als oplossingen $z_1 = -1$, $z_2 = 1$, $z_3 = 2.3 + 3.4i$ en (afgerond, met dank aan Maple) $h_1 = 1.139734626 - 2.558580999i$ en $h_2 = 0.2908819995 + 1.082998113i$.

De rechterfiguur heeft betrekking op de vergelijking

$$z^3 - (0.9 + 3.7i)z^2 - z + (0.9 + 3.7i) = 0$$

met als oplossingen $z_1 = -1$, $z_2 = 1$, $z_3 = 0.9 + 3.7i$ en (afgerond, met dank aan Maple) $h_1 = 0.7687668752 - 3.413044312i$ en $h_2 = 0.1187445689 + 1.015354660i$.

De discriminant

We hebben al een paar keer de discriminant $D = B^2 - 4AC$ genoemd. Je kunt hem uitdrukken in a_1 , a_2 en a_3 , maar ook in p , q , h_1 en h_2 , en zelfs in de drie wortels z_1 , z_2 en z_3 . Hier is het resultaat:

$$D = (a_3 - a_1a_2)^2 - 4(a_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2) \quad (12)$$

$$= (pq)^2(h_1 - h_2)^6 \quad (13)$$

$$= -\frac{1}{27}(z_1 - z_2)^2(z_2 - z_3)^2(z_3 - z_1)^2 \quad (14)$$

Uitdrukking (14) laat zien dat de discriminant nul is wanneer er minstens twee wortels samenvallen, en omgekeerd. In de eerste twee voorbeelden kun je (14) ook gemakkelijk controleren. Doen! Overigens, je ziet nu dat je stap (2) in het oplossingsrecept van bladzijde 83 kunt kortsluiten door direct de discriminant $D = B^2 - 4AC$ uit te rekenen en te controleren of $D = 0$ is. Zo ja, dan zijn er meervoudige wortels, zo nee, dan zijn alle wortels verschillend.

De afleiding van (13) niet moeilijk, maar die van (14) uit (12) is veel lastiger. Dat gaat het beste met computeralgebra (niet zelf proberen met pen en papier!). Je

Toegiften

moet dan gebruik maken van de relaties

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 + z_3 &= 3a_1 \\z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 &= 3a_2 \\z_1z_2z_3 &= a_3\end{aligned}$$

die volgen uit

$$\begin{aligned}z^3 - 3a_1z^2 + 3a_2z - a_3 &= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \\&= z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)z - z_1z_2z_3\end{aligned}$$

De reële derdegraadsvergelijking

De determinant D kunnen we ook goed gebruiken als we willen onderzoeken hoe het zit bij een *reële* derdegraadsvergelijking. Dan zijn a_1 , a_2 en a_3 dus reële getallen en hetzelfde geldt voor A , B en C . Het teken van de discriminant bepaalt dan of h_1 en h_2 reëel ($D > 0$) of toegevoegd complex ($D < 0$) zijn.

Geval 1: $D > 0$. Dan zijn h_1 en h_2 reëel, en $R = \frac{h_1 - a_1}{h_2 - a_1}$ dus ook. Er is dan ook één reële derdemachtswortel $r_1 = \sqrt[3]{R}$ en de andere derdemachtswortels zijn $r_2 = r_1 e^{2\pi i/3}$ en $r_3 = r_1 e^{-2\pi i/3} = \bar{r}_2$. Voor de wortels z_1 , z_2 en z_3 geldt dan dat $z_1 = \frac{h_1 - h_2 r_1}{1 - r_1}$ reëel is terwijl

$$z_3 = \frac{h_1 - h_2 r_3}{1 - r_3} = \frac{h_1 - h_2 \bar{r}_2}{1 - \bar{r}_2} = \bar{z}_2$$

Dan zijn z_2 en z_3 dus toegevoegd complexe wortels.

Geval 2: $D < 0$. Dan is $h_2 = \bar{h}_1$ en $h_1 = \bar{h}_2$ en dus is

$$R = \frac{h_1 - a_1}{h_2 - a_1} = \frac{\bar{h}_2 - a_1}{\bar{h}_1 - a_1} = \frac{1}{\bar{R}}$$

Hieruit volgt dat $R\bar{R} = 1$ dus $|R| = 1$. Ook voor de derdemachtswortels r_i geldt dan $|r_i| = 1$, met andere woorden, $\bar{r}_i = \frac{1}{r_i}$ zodat

$$\bar{z}_i = \frac{\bar{h}_1 - \bar{h}_2 \bar{r}_i}{1 - \bar{r}_i} = \frac{h_2 - h_1/r_i}{1 - 1/r_i} = \frac{h_2 r_i - h_1}{r_i - 1} = z_i$$

dus elke z_i is reëel. Conclusie:

Voor reële derdegraadsvergelijkingen geldt:

1. Als $D = 0$ zijn er twee of drie samenvallende wortels.
2. Als $D > 0$ zijn er twee toegevoegd complexe wortels en één reële wortel.
3. Als $D < 0$ zijn er drie reële wortels.

Hiermee sluiten we onze behandeling van de ‘*abc*-formule’ voor de derdegraadsvergelijking af.

T.7 Vierde- en hogeregraadsvergelijkingen

Reeds de oude Italiaanse rekenmeesters uit de zestiende eeuw ontdekten dat het oplossen van vierdegraadsvergelijkingen kan worden teruggebracht tot het oplossen van vergelijkingen van de derde en de tweede graad. We zullen hieronder laten zien hoe dat gaat. Maar voor hogeregraadsvergelijkingen lukte dat niet meer, ondanks verwoede pogingen van de grootste wiskundigen. Wat was er hier aan de hand? En wat was eigenlijk precies het probleem?

Bij de derdegraadsvergelijking waren oplossingen gevonden in een eindig aantal stappen waarbij er in elke stap alleen maar werd opgeteld, afgetrokken, vermenigvuldigd, gedeeld, machtsverheven en wortelgetrokken. Dat zijn de zogenaamde *algebraïsche bewerkingen* en wat men zocht was dus een *algebraïsche oplossingsmethode*, dat wil zeggen een methode om de oplossingen van een n -degraadsvergelijking te vinden via eindig veel algebraïsche bewerkingen. Dat was gelukt voor $n = 1$ (flauw!), $n = 2$ (*abc*-formule), $n = 3$ en $n = 4$. Maar voor $n \geq 5$ wilde het maar niet lukken.

Pas in 1828 werd een tipje van de sluier opgelicht. Toen bewees de jonggestorven Noorse wiskundige Niels Henrik Abel (1802-1829) dat er geen algemene algebraïsche methode is om vijfdegraadsvergelijkingen op te lossen. Kort daarna vervolmaakte de Franse wiskundige Évariste Galois, die in 1832 bij een duel op 21-jarige leeftijd om het leven kwam, de theorie door te laten zien hoe de ‘oplosbaarheid’ van een n -degraadsvergelijking afhangt van de ‘oplosbaarheid’ van een zekere algebraïsche structuur, de later naar hem genoemde *Galois-groep*, die bij zo’n vergelijking hoort. Uit de theorie van Galois volgt dat er voor elke $n \geq 5$ een n -degraadsvergelijking bestaat waarbij de Galois-groep niet oplosbaar is, en waarvoor er dus ook geen algebraïsche oplossingsmethode bestaat. In de universitaire wiskunde neemt de *Galois-theorie* tegenwoordig een belangrijke plaats in het algebra-onderwijs in. We benadrukken overigens dat er ook in die gevallen wel degelijk snelle numerieke benaderingsmethodes bestaan om de oplossingen te vinden.

De vierdegraadsvergelijking

We presenteren nu de oplossing van de vierdegraadsvergelijking. Het is in wezen ook de oplossingsmethode die Ludovico Ferrari (1522-1565) al in de zestiende eeuw vond.

Schrijf de vergelijking in de vorm

$$z^4 - a_1z^3 + a_2z^2 - a_3z + a_4 = 0$$

Toegiften

(We veronderstellen weer dat alle letters complexe getallen voorstellen.) Stel dat z_1, z_2, z_3 en z_4 de wortels van deze vergelijking zijn. Dan geldt dus

$$\begin{aligned}a_1 &= z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \\a_2 &= z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4 \\a_3 &= z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4 \\a_4 &= z_1z_2z_3z_4\end{aligned}$$

Noem nu

$$\begin{aligned}w_1 &= (z_1 + z_2)(z_3 + z_4) \\w_2 &= (z_1 + z_3)(z_2 + z_4) \\w_3 &= (z_1 + z_4)(z_2 + z_3)\end{aligned}$$

dan geldt (controleer dat zelf!)

$$\begin{aligned}w_1 + w_2 + w_3 &= 2a_2 \\w_1w_2 + w_2w_3 + w_3w_1 &= a_2^2 + a_1a_3 - 4a_4 \\w_1w_2w_3 &= a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat w_1, w_2 en w_3 de oplossingen zijn van de derdegraadsvergelijking

$$w^3 - 2a_2w^2 + (a_2^2 + a_1a_3 - 4a_4)w - (a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2) = 0 \quad (15)$$

en die kunnen we met de methodes uit de vorige paragrafen bepalen. Rest nog de bepaling van de wortels z_i . Stel daartoe $s_{ij} = z_i + z_j$ voor alle i en j met $1 \leq i < j \leq 4$. Dan is $s_{12} + s_{34} = a_1$ en $s_{12}s_{34} = w_1$ en dus zijn s_{12} en s_{34} de oplossingen van de vierkantsvergelijking

$$s^2 - a_1s + w_1 = 0 \quad (16)$$

die je met de *abc*-formule kunt berekenen. Op dezelfde manier kun je ook alle andere s_{ij} berekenen: s_{13} en s_{24} zijn de oplossingen van

$$s^2 - a_1s + w_2 = 0 \quad (17)$$

en s_{14} en s_{23} zijn de oplossingen van

$$s^2 - a_1s + w_3 = 0 \quad (18)$$

Daarna vind je de wortels z_i als volgt:

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{1}{2}(s_{12} + s_{13} - s_{23}) \\z_2 &= \frac{1}{2}(s_{23} + s_{24} - s_{34}) \\z_3 &= \frac{1}{2}(s_{34} + s_{13} - s_{14}) \\z_4 &= \frac{1}{2}(s_{14} + s_{24} - s_{12})\end{aligned}$$

Er zit nog een klein addertje onder het gras: vergelijking (16) levert s_{12} en s_{34} , vergelijking (17) levert s_{13} en s_{24} en vergelijking (18) levert s_{14} en s_{23} . Maar de methode geeft niet aan welke van de twee precies s_{12} is bij (16), welke van de twee s_{13} is bij (17) en welke van de twee s_{23} is bij (18). De oplossing is simpel. Doe een willekeurige keuze en kijk door invullen of $\frac{1}{2}(s_{12} + s_{13} - s_{23})$ een wortel is van de oorspronkelijke vierdegraadsvergelijking. Zo nee, verwissel dan s_{13} en s_{24} en/of s_{23} en s_{14} .

Op deze manier hebben we dus een algebraïsche oplossingsmethode gekregen die op alle vierdegraadsvergelijkingen toepasbaar is.

Voorbeeld

Ook hierbij geven we een voorbeeld waarin je ook direct al de oplossingen kunt berekenen ter illustratie van de methode. We nemen de vergelijking

$$z^4 + 3z^2 - 4 = 0$$

De oplossingen zijn $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = 2i, z_4 = -2i$, en die kennis gebruiken we om na afloop de resultaten van de oplossingsmethode te toetsen.

Er geldt $a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 0$ en $a_4 = -4$, en dus wordt de derdegraadsvergelijking (15) in dit geval eenvoudig

$$w^3 - 6w^2 + 25w = 0$$

met als oplossingen $w_1 = 0, w_2 = 3 + 4i, w_3 = 3 - 4i$ (ga na!). Omdat $a_1 = 0$ worden de vergelijkingen (16), (17) en (18) heel simpel:

$$s^2 = 0, \quad s^2 = -3 - 4i, \quad s^2 = -3 + 4i$$

Ik kies hier $\sqrt{-3 - 4i}$ in het vierde kwadrant, en $\sqrt{-3 + 4i}$ in het eerste kwadrant, en

$$s_{12} = s_{34} = 0, \quad s_{13} = \sqrt{-3 - 4i}, \quad s_{24} = -\sqrt{-3 - 4i}, \\ s_{14} = \sqrt{-3 + 4i}, \quad s_{23} = -\sqrt{-3 + 4i}$$

Dan is dus

$$z_1 = \frac{1}{2}(s_{12} + s_{13} - s_{23}) = \frac{1}{2}(\sqrt{-3 - 4i} + \sqrt{-3 + 4i}) \\ z_2 = \frac{1}{2}(s_{23} + s_{24} - s_{34}) = \frac{1}{2}(-\sqrt{-3 + 4i} - \sqrt{-3 - 4i}) = -z_1 \\ z_3 = \frac{1}{2}(s_{34} + s_{13} - s_{14}) = \frac{1}{2}(\sqrt{-3 - 4i} - \sqrt{-3 + 4i}) \\ z_4 = \frac{1}{2}(s_{14} + s_{24} - s_{12}) = \frac{1}{2}(\sqrt{-3 + 4i} - \sqrt{-3 - 4i}) = -z_3$$

Toegiften

Zouden dit de in het begin al genoemde oplossingen zijn? Dat is in het algemeen bij algebraïsche oplossingsmethoden wel een probleem: je krijgt vaak ontzettend ingewikkelde wortelformules waar je zo op het oog geen touw aan vast kunt knopen. Maar hier is het niet zo moeilijk. Bereken namelijk eens z_1^2 .

$$\begin{aligned}z_1^2 &= \frac{1}{4} ((-3 - 4i) + (-3 + 4i) + 2\sqrt{(-3 - 4i)(-3 + 4i)}) \\ &= \frac{1}{4} (-6 + 2\sqrt{25}) = 1\end{aligned}$$

dus inderdaad $z_1 = 1, z_2 = -1$. Evenzo is

$$\begin{aligned}z_3^2 &= \frac{1}{4} ((-3 - 4i) + (-3 + 4i) - 2\sqrt{(-3 - 4i)(-3 + 4i)}) \\ &= \frac{1}{4} (-6 - 2\sqrt{25}) = -4\end{aligned}$$

zodat inderdaad $z_3 = -2i, z_4 = 2i$.

Antwoorden

1. Rekenen met complexe getallen

1.1 a. $\sqrt{3}i$ b. $3i$ c. $2\sqrt{2}i$ d. $5i$ e. $\sqrt{15}i$

1.2 a. $\sqrt{33}i$ b. $7i$ c. $4\sqrt{3}i$ d. $3\sqrt{5}i$ e. $5\sqrt{3}i$

1.3 a. $\frac{1}{2}\sqrt{2}i$ b. $\frac{1}{3}\sqrt{6}i$ c. $\frac{2}{5}\sqrt{5}i$ d. $\frac{2}{3}\sqrt{3}i$ e. $\frac{1}{7}\sqrt{42}i$

1.4 a. $\frac{1}{5}\sqrt{5}i$ b. $\frac{1}{5}\sqrt{15}i$ c. $\frac{2}{7}\sqrt{7}i$ d. $\frac{3}{5}\sqrt{5}i$ e. $\frac{1}{3}\sqrt{2}i$

1.5 Het eerste, het derde en het vierde gelijkteken zijn in orde, het eerste volgens de definitie van $\sqrt{-1}$ als een getal waarvoor het kwadraat gelijk is aan -1 , en het vierde volgens de definitie van $\sqrt{1}$ als het positieve reële getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 1 . Het derde gelijkteken geldt omdat $(-1)^2 = 1$. Het tweede gelijkteken kan dus niet geldig zijn. Blijkbaar geldt niet voor negatieve reële getallen a dat $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$. (Deze regel geldt wel als $a \geq 0$.)

1.6 a. $1 \pm i$ b. $-2 \pm i$ c. $-1 \pm 3i$ d. $3 \pm i$ e. $2 \pm 2i$

1.7 a. $6 \pm 2i$ b. $2 \pm \sqrt{2}i$ c. $-1 \pm \sqrt{3}i$ d. $3 \pm \sqrt{3}i$ e. $-4 \pm 2i$

Bij de volgende opgaven geven we alleen de uitkomst en de absolute waarde ervan. Teken ze zelf.

1.8 a. $4 - 6i, 2\sqrt{13}$ b. $-4 + 4i, 4\sqrt{2}$ c. $1, 1$ d. $3 - 3i, 3\sqrt{2}$ e. $5 - 3i, \sqrt{34}$

1.9 a. $-5 - 10i, 5\sqrt{5}$ b. $4 + 8i, 4\sqrt{5}$ c. $8, 8$ d. $-8 - 6i, 10$ e. $3 - 4i, 5$

1.10 a. $-i, 1$ b. $1, 1$ c. $i, 1$ d. $-1, 1$ e. $-1, 1$

1.11 a. $-i, 1$ b. $-8i, 8$ c. $128i, 128$ d. $-2 + 2i, 2\sqrt{2}$ e. $-2 - 2i, 2\sqrt{2}$

Bij de volgende opgaven geven de lijnen alleen als een vergelijking in xy -coördinaten. Teken ze zelf.

1.12 a. $x = 4$ b. $x = -3$ c. $y = 2$ d. $y = -2$ e. $x = y$

1.13 a. $x + y = 1$ b. $x = 2y$ c. $x - 2y = 1$ d. $x + y = 5$ e. $y = 0$

Bij de volgende opgaven geven we alleen het middelpunt en de straal.

1.14 a. $0, 4$ b. $1, 3$ c. $2, 2$ d. $3, 1$ e. $-1, 5$

1.15 a. $-3, 4$ b. $i, 5$ c. $-2i, 1$ d. $1 + i, 3$ e. $-3 + i, 2$

1.16 a. $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$ b. $\frac{3}{5} + \frac{3}{10}i$ c. $-\frac{6}{5} - \frac{2}{5}i$ d. $\frac{11}{5} + \frac{3}{5}i$ e. $\frac{8}{13} + \frac{1}{13}i$

Antwoorden

- 1.17 a. $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ b. $-\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$ c. $-i$ d. $-3 - i$ e. i
1.18 a. $\frac{9}{25} + \frac{12}{25}i$ b. $\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$ c. $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ d. $-i$ e. i
1.19 a. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i$ b. $\frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$ c. $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ d. $1 + 2i$ e. i

2. De meetkunde van het complexe rekenen

Bij de volgende opgaven geven we alleen de argumenten.

- 2.1 a. $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ b. $\pi + 2k\pi$ c. $2k\pi$ d. $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ e. $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
2.2 a. $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ b. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ c. $-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ d. $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ e. $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
2.3 a. $\bar{z} = \cos \varphi - i \sin \varphi = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)$ dus $\arg(\bar{z}) = -\varphi = -\arg(z)$.
b. Uit $\bar{z}z = |z|^2 = 1$ volgt $\bar{z} = \frac{1}{z}$.
c. Neem $z_1 = z_2 = z$ in de productregel op bladzijde 13.
d. Neem $z_1 = z^2, z_2 = z$ in de productregel op bladzijde 13.
e. Omdat $\arg(z^3) = 3 \arg(z) = 3\varphi$ en $|z^3| = 1$ geldt
 $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = z^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi$.
f. Pas voor $n > 3$ de bovenstaande redenering nog $n - 3$ maal toe. Dan krijg je
 $\arg(z^n) = n \arg(z)$ en hieruit volgt $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$.
2.4 a. i b. $-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ c. $-i$ d. $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$ e. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$
2.5 a. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ b. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ c. $-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$ d. $-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$
e. $\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$
2.6 a. -1 b. 1 c. i d. -1 e. 1
2.7 a. i b. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ c. i d. $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$ e. 1
2.8 a. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ b. -1 c. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ d. -1 e. -1
2.9 a. i b. i c. $-i$ d. i e. -1
2.10 a. $\overline{e^{i\varphi}} = \overline{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = e^{-i\varphi}$
b. $e^{i\varphi}e^{-i\varphi} = e^0 = 1$ dus $\frac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$.
c. Neem $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ in de productregel op bladzijde 15.
d. Voor $n = 0$ en $n = 1$ is het vanzelfsprekend waar. Voor $n > 1$ pas je de productregel n maal toe. Voor $n \leq -1$ gebruik je onderdeel (b.).
2.11 a. $\frac{d}{d\varphi}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = -\sin \varphi + i \cos \varphi = i(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
b. $\frac{d}{d\varphi} e^{i\varphi} = \frac{d}{d\varphi}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = i(\cos \varphi + i \sin \varphi) = i e^{i\varphi}$
c. Uit (b.) volgt dat $\frac{d}{d\varphi} -i e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$ dus $-i e^{i\varphi}$ is een primitieve functie van $e^{i\varphi}$.
d. $\int_0^\pi e^{i\varphi} d\varphi = [-i e^{i\varphi}]_0^\pi = -i(e^{i\pi} - e^0) = -i(-1 - 1) = 2i$. Op dezelfde manier laat je zien dat $\int_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\varphi = 0$. Opmerking: je kunt deze resultaten ook afleiden door de e-macht met behulp van Eulers formule te schrijven in termen van de cosinus en de sinus. Dat is iets meer werk.
In de volgende opgaven kiezen we het argument steeds in het interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$.

- 2.12 a. $2.2361e^{1.1072i}$ b. $4.4721e^{-0.4636i}$ c. $3.6056e^{-0.9828i}$ d. $3.6056e^{4.1244i}$
 e. $3e^{3.1416i}$
- 2.13 a. $2.2361e^{.4636i}$ b. $2.2361e^{-0.4636i}$ c. $e^{-1.5708i}$ d. $5.0990e^{2.9442i}$
 e. $3e^{-1.5708i}$
- 2.14 a. $-0.8323 + 1.8186i$ b. $1.6209 - 2.5244i$ c. $0.1911 + 0.0591i$
 d. $-0.9614 + 0.7182i$ e. $-1.0000 + 0.0001i$
- 2.15 a. $re^{-i\varphi}$ b. $r^2e^{2i\varphi}$ c. $r^5e^{-5i\varphi}$ d. $r^5e^{-5i\varphi}$ e. $\frac{1}{r}e^{-i\varphi}$
- 2.16 a. $\overline{z_1 z_2} = \overline{r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2}} = \overline{r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}} = r_1 r_2 e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 e^{-i\varphi_1} r_2 e^{-i\varphi_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$ Onderdeel (b.) gaat op dezelfde manier.
- 2.17 a. $e^{z_1 + z_2} = e^{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = e^{x_1 + x_2} e^{i(y_1 + y_2)} = e^{x_1} e^{x_2} e^{iy_1} e^{iy_2} = e^{z_1} e^{z_2}$
 b. $e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$. Omdat x reëel is, is $e^x > 0$ en omdat bovendien y reëel is, is $e^x (\cos y + i \sin y)$ de (r, φ) schrijfwijze van e^z . Als gevolg hiervan is $|e^z| = e^x$ en $\arg(e^z) = y$.
 c. $e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z$ omdat $e^{2k\pi i} = 1$ voor alle gehele k .
- 2.18 $\frac{d}{dt} e^{at} = \frac{d}{dt} e^{(a+ib)t} = \frac{d}{dt} (e^{at} e^{ibt}) = a e^{at} e^{ibt} + i b e^{at} e^{ibt} = (a + ib) (e^{at} e^{ibt}) = a e^{at}$
- 2.19 a. $-3i$ b. $-3 + i$ c. $3 - 5i$ d. -8 e. 0
- 2.20 a. $\overline{z}z + iz - i\overline{z} - 8 = 0$ b. $\overline{z}z - (1+i)z - (1-i)\overline{z} = 0$ c. $\overline{z}z - z - \overline{z} = 0$
 d. $\overline{z}z + (2+i)z + (2-i)\overline{z} + 1 = 0$ e. $\overline{z}z - (1+2i)z - (1-2i)\overline{z} + 4 = 0$
- 2.21 a. $(z+i)(\overline{z}-i) = 1$ dus middelpunt $-i$, straal 1
 b. $(z+(1-i))(\overline{z}+(1+i)) = 4$ dus middelpunt $-1+i$, straal 2
 c. $(z-2i)(\overline{z}+2i) = 0$ dus middelpunt $2i$, straal 0
 d. $(z+2)(\overline{z}+2) = 1$ dus middelpunt -2 , straal 1
 e. $(z+(2+i))(\overline{z}+(2-i)) = 6$ dus middelpunt $-2-i$, straal $\sqrt{6}$
- 2.22 De 'gewone' parametervoorstelling van een cirkel met middelpunt (a, b) en straal r is $x = a + r \cos \varphi$, $y = b + r \sin \varphi$, waarbij de parameter φ loopt van (bijvoorbeeld) $\varphi = 0$ tot $\varphi = 2\pi$. Dan is $z = x + iy = (a + ib) + r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \alpha + r e^{i\varphi}$.
- 2.23 $\left| \frac{\beta}{\alpha} \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} \right| = \left| \frac{\overline{\alpha}}{\alpha} \frac{\beta}{\overline{\beta}} \right| = \left| \frac{\overline{\alpha}}{\alpha} \right| \left| \frac{\beta}{\overline{\beta}} \right| = 1$ en $-\varphi = \arg\left(\frac{\overline{\beta}}{\alpha}\right)$ dus $\varphi = \arg\left(\frac{\overline{\alpha}}{\beta}\right)$ en daarom is $\arg\left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}\right) = 2\varphi$. Hieruit volgt $\frac{\beta}{\alpha} \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = e^{2i\varphi}$.
- 2.24 Pas opgabe 2.23 toe met $\beta - \alpha$ en $\gamma - \alpha$ in plaats van β en α .

3. Wortels en polynomen

- 3.1 a. $e^{(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$) b. $e^{(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$) c. $e^{(\frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$)
 d. $\sqrt[3]{8} e^{(\frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$) e. $\sqrt[3]{8} e^{(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$)
- 3.2 a. $\sqrt[6]{2} e^{(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$) b. $3e^{(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$) c. $3e^{(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$)
 d. $e^{(-\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$) e. $2e^{k\pi i}$ ($k = 0, 1$) (dit zijn de getallen 2 en -2)

Antwoorden

- 3.3 a. $e^{(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})i}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) b. $e^{(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})i}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) c. $e^{(\frac{2k\pi}{5})i}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$)
d. $\sqrt[4]{5}e^{(-0.2318 + \frac{k\pi}{2})i}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) e. $\sqrt[6]{6}e^{(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)
- 3.4 a. $\sqrt[8]{2}e^{(-\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2})i}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) b. $2e^{(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5})i}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$)
c. $3e^{(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})i}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) d. $\sqrt[7]{2}e^{(\frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7})i}$ ($k = 0, \dots, 6$) e. $\sqrt[6]{18}e^{(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3})i}$ ($k = 0, 1, 2$)
- 3.5 a. $z^2 - 1$ b. $z^2 - 6z + 5$ c. $z^2 - (1 + i)z + i$ d. $z^2 + iz + 2$ e. $z^2 - 2z + 2$
- 3.6 a. $z^2 + iz$ b. $z^2 - 3z + 2$ c. $z^2 + 2iz$ d. $z^2 - 2z + 5$ e. $z^2 - 2iz - 2$
- 3.7 a. $z^3 - z$ b. $z^3 + z$ c. $z^3 - z^2 + z - 1$ d. $z^3 - 6iz^2 - 11z + 6i$ e. $z^3 - iz^2 - z + i$
- 3.8 a. $z^3 - 6z^2 + 11z - 6$ b. $z^3 - 3z^2 + 4z - 2$ c. $z^3 - 3z^2 + 2z$ d. $z^3 - (1 + i)z^2 + iz$
e. $z^3 - 2iz^2 + z - 2i$
- 3.9 a. $z^3 - 2z^2$ b. $z^3 + 3z$ c. $z^4 - 1$ d. $z^3 - 2z^2 + z - 2$ e. $z^3 - iz^2 - z + i$
f. $z^3 + iz^2 + z + i$
- 3.10 a. enkelvoudig, $z = 0$ (tweevoudig), $z = 2$ b. enkelvoudig, $z = 0$, $z = \sqrt{3}i$,
 $z = -\sqrt{3}i$ c. tweevoudig, $z = 1$, $z = -1$, $z = -i$ d. tweevoudig, $z = i$, $z = -i$
e. enkelvoudig, $z = 1$, $z = -1$, $z = i$ f. tweevoudig, $z = -i$ (ook tweevoudig)
- 3.11 a. $(z - z_0)q(z) = (z - z_0)(\beta_{n-1}z^{n-1} + \dots + \beta_0) =$
 $\beta_{n-1}z^n + (\beta_{n-2} - z_0\beta_{n-1})z^{n-1} + (\beta_{n-3} - z_0\beta_{n-2})z^{n-2} + \dots + (\beta_0 - z_0\beta_1)z - z_0\beta_0$
Nu geldt dat $\beta_{n-1} = \alpha_n$, $\beta_{n-2} = \alpha_{n-1} + z_0\beta_{n-1}$ dus $\beta_{n-2} - z_0\beta_{n-1} = \alpha_{n-1}$ enzovoort.
Hieruit volgt dat $p(z) - (z - z_0)q(z) = \alpha_0 + z_0\beta_0$. Dit is de constante γ .
b. Substitueer $z = z_0$ in $p(z) - (z - z_0)q(z) = \gamma$, dan volgt $p(z_0) = \gamma$.
c. Als $p(z_0) = 0$ dan is $\gamma = 0$ en dus is $p(z) = (z - z_0)q(z)$.
- 3.12 a. $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1)$ b. $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$
c. $z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z - 1)(z + 1)$ d. $z^5 - 32 = (z - 2)(z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 8z + 16)$
e. $z^6 + 27 = (z^2 + 3)(z^2 - 3z + 3)(z^2 + 3z + 3)$ f. $z^4 + 2z^2 + 1 = (z^2 + 1)^2$
g. $z^4 - 2z^2 + 1 = (z - 1)^2(z + 1)^2$
- 3.13 Als je $p(x)$ op de aangegeven wijze schrijft, zie je dat $p(x)$ voor grote *positieve* x -waarden vrijwel gelijk is aan x^n , en dus ook positief is. Ook voor grote *negatieve* x -waarden is $p(x)$ vrijwel gelijk aan x^n , maar x^n is dan negatief (want n is oneven). We zien dus dat $p(x)$ voor grote negatieve x -waarden negatief moet zijn, en voor grote positieve x -waarden positief. Daartussen moet $p(x)$ dus minstens één maal nul worden. Degenen die bedreven zijn in limieten, kunnen het bovenstaande als volgt nader preciseren: er geldt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = 1$$

en evenzo $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{p(x)}{x^n} = 1$.

4. Lineaire recursies

- 4.1 a. kar. vgl.: $\alpha^2 - 0.5\alpha - 0.83 = 0$, $D = 3.57$, $\alpha_1 = 1.1947$, $\alpha_2 = -0.6947$
b. kar. vgl.: $\alpha^2 - 0.5\alpha - 0.3 = 0$, $D = 1.45$, $\alpha_1 = 0.8521$, $\alpha_2 = -0.3521$
c. kar. vgl.: $\alpha^2 + 0.5\alpha - 0.3 = 0$, $D = 1.45$, $\alpha_1 = 0.3521$, $\alpha_2 = -0.8521$
d. kar. vgl.: $\alpha^2 + 2\alpha + 1.13 = 0$, $D = -0.52$, $\alpha_1 = -1 + 0.3606i$, $\alpha_2 = -1 - 0.3606i$

4.2 a. Omdat niet de waarden x_k maar de waarden $y_k = \log x_k$ in de grafiek zijn gezet, zijn de schaalwaarden op de verticale as niet $0, 1, 2, \dots$ genoemd, maar $1 (= 10^0), 10, 10^2, \dots$. Een punt $(k, \log x_k)$ met bijvoorbeeld $x_k = 1000$ ligt dan ook op de horizontale lijn met schaalwaarde $10^3 = 1000$.

b. De horizontale lijnen zijn getekend op hoogte $\log 1 = 0, \log 2, \log 3, \dots, \log 10 = 1, \log 20, \log 30, \dots, \log 100 = 2, \log 200, \log 300 \dots$

c. Omdat x_k op den duur vrijwel gelijk is aan $A_1 \alpha_1^k$ is y_k dan vrijwel gelijk aan $\log(A_1 \alpha_1^k) = \log A_1 + k \log \alpha_1$. Dit is van de vorm $y = a + bk$ met $a = \log A_1$ en $b = \log \alpha_1$ en dus liggen die punten op een rechte lijn.

d. Zie onderdeel (c.). Hier is $A_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ en $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dus $\log A_1 \approx -0.1405$ en $\log \alpha_1 \approx .2090$. Bedenk bij het controleren dat de schalen op de horizontale as en de verticale as niet gelijk zijn!

4.3 a. $y_{k+1} = \frac{2}{5} \sqrt{5} y_k - y_{k-1}, y_0 = 1, y_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

b. $f(t) = \cos(\varphi t) - \sin(\varphi t)$

c. $f(t) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \cos(\varphi t) - \frac{1}{2} \sqrt{2} \sin(\varphi t) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos(\varphi t) - \sin \frac{\pi}{4} \sin(\varphi t) \right) = \sqrt{2} \cos \left(\varphi t + \frac{\pi}{4} \right)$. Er geldt dus $A = \sqrt{2} \approx 1.4142, \nu = \frac{\varphi}{2\pi} \approx 0.1762, \chi = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$. De periodelengte $T = \frac{1}{\nu} \approx 5.6751$ is bijna 6, zoals ook in de figuur te zien is.

4.4 $A_1 = \frac{1}{2}(C_1 - iC_2) = \frac{1}{2}(1 + i), A_2 = \frac{1}{2}(C_1 + iC_2) = \frac{1}{2}(1 - i)$

4.5 a. $c = \sqrt{5}, C_1 = 1, C_2 = -\frac{1}{2}, \varphi = \arctan 2, r = \frac{1}{4} \sqrt{5}, \chi = \arctan \frac{1}{2}$

b. $c = \sqrt{5}, C_1 = 1, C_2 = 0, \varphi = \arctan 2, r = \frac{1}{2}, \chi = 0$

c. $c = \sqrt{5}, C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{2}, \varphi = \arctan 2, r = \frac{1}{4}, \chi = -\frac{\pi}{2}$

d. $c = 1, C_1 = 1, C_2 = -\sqrt{3}, \varphi = \frac{\pi}{3}, r = 1, \chi = \frac{\pi}{3}$

e. $c = \frac{1}{2} \sqrt{2}, C_1 = 1, C_2 = 3, \varphi = \frac{\pi}{4}, r = \frac{1}{2} \sqrt{10}, \chi = -\arctan 3$

4.6 $x_2 = 199.75, x_3 = 149.75, x_4 = 99.8025$. Verder geldt $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k} = 0$ en $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2^k} = 0$ dus ook $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$.

4.7 a. $x_k = -\frac{1}{2} k (-2)^k$ b. $x_k = 2^k - k 2^k$ c. $x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k + k \left(\frac{1}{2}\right)^k$

d. $x_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k + k \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ e. $x_k = 10(-1)^k - 11k(-1)^k$

4.8 a. $x_k = \frac{1}{2} 3^k - \frac{1}{2} (-1)^k$ b. $x_k = -2 \left(2^k\right) + 3$ c. $x_k = \frac{1}{3} (\sqrt{13})^k \sin(k\varphi)$ met

$\varphi = \arctan \frac{3}{2}$ d. $x_k = (\sqrt{5})^k \left(2 \cos(k\varphi) - \frac{3}{2} \sin(k\varphi)\right)$ met $\varphi = \arctan 2$

e. $\alpha = 1$ is zelfs een drievoudige wortel van de karakteristieke vergelijking, dus de algemene oplossing is van de vorm $x_k = A + Bk + Ck^2$. Invullen van $k = 0, k = 1, k = 2$ geeft een stelsel met als oplossing $A = 1, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}$ zodat $x_k = 1 + \frac{1}{2} k - \frac{1}{2} k^2$.

5. Lineaire differentiaalvergelijkingen

5.1 a. kar. vgl.: $\lambda^2 + 1.1\lambda + 0.1 = 0, D = 0.81, \lambda_1 = -0.1, \lambda_2 = -1$

b. kar. vgl.: $\lambda^2 + 0.9\lambda - 0.1 = 0, D = 1.21, \lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = -1$

c. kar. vgl.: $\lambda^2 + 0.7\lambda + 0.1225 = 0, D = 0, \lambda = -0.35$

d. kar. vgl.: $\lambda^2 - 0.12\lambda + 4 = 0, D = -15.9856, \lambda_1 = 0.06 + 1.9991i, \lambda_2 = 0.06 - 1.9991i$

Antwoorden

5.2 a. $y(t) = -e^{-t}$ b. $y(t) = e^{-2t} - 2e^{-t}$ c. $y(t) = \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t}$
d. $y(t) = 4e^{-2t} - 3e^{-3t}$ e. $y(t) = -12e^{-\frac{1}{2}t} + 12e^{-\frac{1}{3}t}$

5.3 a. $y(t) = e^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}te^{\frac{1}{2}t}$ b. $y(t) = -e^{-3t} - 2te^{-3t}$ c. $y(t) = te^{-t}$
d. $y(t) = e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{5}{2}te^{-\frac{1}{2}t}$ e. $y(t) = e^t - te^t$

5.4 a. $y'(t) = pe^{pt}z(t) + e^{pt}z'(t)$, $y''(t) = p^2e^{pt}z(t) + 2pe^{pt}z'(t) + e^{pt}z''(t)$

b. Invullen. c. Delen door e^{pt} (dit is ongelijk aan nul voor alle t)

d. Uit $z''(t) = 0$ volgt $z'(t) = A_2$ voor zekere constante A_2 en hieruit volgt $z(t) = A_2t + A_1$ voor zekere constante A_1 .

e. Invullen in $y(t) = e^{pt}z(t)$.

5.5 a. $y(t) = e^t(-\cos(2t) + \sin(2t))$ b. $y(t) = e^{-t}(-\cos(t) - \sin(t))$
c. $y(t) = e^{-2t}(\cos(t) + 3\sin(t))$ d. $y(t) = e^t \cos(3t)$ e. $y(t) = e^{-2t} \sin(2t)$

5.6 a. $A_1 = \frac{1}{2}(-1 - i)$, $r = |A_1| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\chi = \arg A_1 = \frac{5\pi}{4}$ dus $y(t) = \sqrt{2}e^t \cos(2t + \frac{5\pi}{4})$

b. $A_1 = \frac{1}{2}(-1 + i)$, $r = |A_1| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\chi = \arg A_1 = \frac{3\pi}{4}$ dus $y(t) = \sqrt{2}e^{-t} \cos(t + \frac{3\pi}{4})$

c. $A_1 = \frac{1}{2}(1 - 3i)$, $r = |A_1| = \frac{1}{2}\sqrt{10}$, $\chi = \arg A_1 = -\arctan 3$ dus
 $y(t) = \sqrt{10}e^{-2t} \cos(t - \arctan 3)$

d. $A_1 = \frac{1}{2}$, $r = |A_1| = \frac{1}{2}$, $\chi = \arg A_1 = 0$ dus $y(t) = e^t \cos(3t)$

e. $A_1 = -\frac{1}{2}i$, $r = |A_1| = \frac{1}{2}$, $\chi = \arg A_1 = -\frac{\pi}{2}$ dus $y(t) = e^{-2t} \cos(2t - \frac{\pi}{2})$

5.7 Massaveersysteem met wrijving nul: $mu''(t) + ku = 0$. $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ dus $p = 0$ en
 $q = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Algemene oplossing: $u(t) = 2r \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \chi\right)$. Frequentie $\frac{q}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Amplitude $A = 2r = 2\sqrt{u(0)^2 + \frac{m}{k}u'(0)^2}$

Stroomkring met weerstand nul: $LCv''(t) + v = 0$. $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{1}{LC}}$ dus $p = 0$ en $q = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

Algemene oplossing: $v(t) = 2r \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}}t + \chi\right)$. Frequentie $\frac{q}{2\pi} = \frac{\sqrt{LC}}{2\pi}$. Amplitude

$A = 2r = 2\sqrt{v(0)^2 + \frac{1}{LC}v'(0)^2}$

5.8 Massaveersysteem: karakteristieke vergelijking: $m\lambda^2 + d\lambda + k = 0$. Als $D > 0$ zijn de beide wortels negatief want $\lambda_1\lambda_2 = \frac{k}{m} > 0$ en $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{d}{m} < 0$. De beide basisoplossingen zijn dus *dalende* e-machten en dus geldt $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$. Als $D = 0$ is $\lambda = -\frac{d}{2m} < 0$ en dan geldt dus ook voor de beide basisoplossingen dat ze naar nul gaan als t naar oneindig gaat. Als $D < 0$ is $p = -\frac{d}{2m} < 0$. De algemene oplossing is dan het product van een sinusoïde en een *dalende* e-macht (gedempte trilling), en ook dan is de limiet nul als t naar oneindig gaat.

Bij stroomkringen verloopt de redenering analoog.

5.9 a. $y(t) = e^{-2t}(\cos(t) + 4\sin(t))$ b. $y(t) = e^{-t}(-1 - t)$

c. $y(t) = \cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)$ d. $y(t) = \frac{1}{7}e^{4t} - \frac{1}{7}e^{-3t}$ e. $y(t) = -3e^{-4t} + 4e^{-3t}$

f. $y(t) = 1 + \frac{1}{4}\sqrt{2}(e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t})$

g. $y(t) = \frac{1}{12}e^{-2t} + \frac{1}{12}e^t(-\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t))$

Formuleoverzicht

De 'abc-formule' voor complexe vierkantsvergelijkingen:

$$\text{als } \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0 \text{ en } \alpha \neq 0 \text{ dan is } z = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Formules van Euler:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$
$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

De complexe e-macht:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Omrekenformules voor $z = x + iy = r e^{i\varphi}$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x},$$

hierbij geldt voor de berekening van φ

$$\text{als } x > 0 \text{ dan is } \varphi = \arctan \frac{y}{x} + 2k\pi$$

$$\text{als } x < 0 \text{ dan is } \varphi = \arctan \frac{y}{x} + \pi + 2k\pi$$

De n -demachtswortels van een complex getal $\alpha = r e^{i\varphi}$

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r} e^{(\frac{1}{n}\varphi + \frac{2k\pi}{n})i} \quad \text{voor } k = 0, 1, \dots, n-1$$

Gonioformules makkelijk onthouden:

De makkelijk te onthouden regel $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}$ kun je via de (makkelijk te onthouden) eerste formule van Euler en haakjes uitwerken direct vertalen in de (lastiger te onthouden) basale gonioformules

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \end{aligned}$$

Trefwoordenregister

- (r, φ) -notatie, 17
 abc -formule, 5, 29, 30, 37, 45, 79, 83, 90
 k -voudig nulpunt, 29
 n -degraadspolynomen, 27
 n -degraadsvergelijking, 29, 89
 n -demachtswortels, 23, 27
- Abel, Niels Henrik, 89
absolute waarde, 7, 9
algebraïsche bewerkingen, 89
algemene oplossing, 41, 43, 59, 61
amplitude, 40
Apollonius, 74, 75, 85, 86
arctangens-functie, 17
Argand, 79
argument, 13, 17
- basisoplossingen, 41
basisoplossingsfuncties, 61
basisoplossingsrijen, 39, 47
beginvoorwaarden, 61
Bombelli, Rafaele, 79
- Cardano, Geronimo, 79
cirkel, 72, 73
cirkel, vergelijking van een cirkel, 19
cirkels van Apollonius, 74, 85
coëfficiënten, 29
complexe e -macht, 16, 69, 71
complexe natuurlijke logaritme, 69
complexe vlak, 7
continu exponentieel groeimodel, 52, 53
cosinus, 68, 69
- de Moivre, regel van, 12
decimale punt, iii
derdegraadsvergelijking, 27, 30, 79, 88, 90, 91
- derdemachtafplitsen, 80, 82, 83
derdemachtswortel, 23
determinant, 88
discreet logistisch groeimodel, 35
differentiëren, 14, 16, 68
differentiaalvergelijking, 53
differentialen, 66
discreet exponentieel groeimodel, 34, 35
discreet logistisch groeimodel, 34
discriminant, 5, 29, 37, 55, 59, 82, 86, 87
- e -machtsfunctie, 68, 69
eenheidscirkel, 13
Euler, formules van Euler, 15
Euler, Leonhard, 15, 65, 67, 68
- factorstelling, 29, 76, 80
faculteiten, 67
fasehoek, 40
Ferrari, Ludovico, 89
Ferro, Scipio del Ferro, 79
Fibonacci, 35, 38, 39, 47
formules van Euler, 15
frequentie, 40
- Galois-groep, 89
Galois-theorie, 89
Galois, Évariste, 89
Gauss, Carl Friedrich, 29, 79
geconjugeerde van een complex getal, 9
gedempte trilling, 52, 53
graad, 29
Griekse alfabet, iv
- harmonische trilling, 59, 61
hogeregraadsvergelijking, 89
hoofdstelling van de algebra, 29, 76
- imaginair, 5

- imaginaire as, 7
- imaginaire deel, 7
- imaginaire e-macht, 15
- imaginaire getallen, 7
- integreren, 14

- karacteristieke vergelijking, 37, 45, 47, 55, 57, 59, 61
- koorde, 73
- koordenvierhoek, 73

- lineair polynoom, 29
- lineaire combinatie, 55, 61
- lineaire differentiaalvergelijkingen, 53, 55, 61
- lineaire recurrenente betrekking, 37, 47
- lineaire vergelijking, 29

- massa-veersysteem, 52, 53, 61
- Moivre, regel van de Moivre, 12
- multipliciteit, 29, 61

- natuurlijke logaritme, 70
- Newton, 53, 67
- nulpunt, 29

- omloopsgetal, 78
- omrekenformules, 17
- oplossingsfunctie, 55, 61
- oplossingsrecept voor derdegraadsvergelijkingen, 83
- oplossingsrij, 47

- parametervoorstelling, 18
- polaire notatie, 17
- polynoom, 29
- polynoombenaderingen, 67
- poolcoördinaten, 17

- raaklijn, 73
- radialen, 13
- reëel polynoom, 31
- reële as, 7
- reële deel, 7
- recurrenente betrekking, 35
- recursieve definitie, 35
- reeksontwikkelingen, 67, 69
- regel van De Moivre, 12
- rij van Fibonacci, 35, 38, 39, 47

- sinus, 68, 69
- sinusoïde, 40, 59, 61
- startwaarden, 47
- stroomkring, 53, 61
- superpositiebeginsel, 37

- Tartaglia, Niccolo, 79
- toegevoegd complexe getal, 9
- tweedegraadsvergelijking, 29

- variabele, 29
- vector, 19
- vergelijking van een cirkel, 19
- vertakkingspunt, 25, 71
- vierdegraadsvergelijking, 30, 89
- vierkantsvergelijking, 5, 29, 79, 82, 83, 85, 90
- voerstraal, 13, 17

- Wessel, 79
- wortel, 29
- wortelparadox, 4