Bestaat er dan toch een wortel uit -1?

Complexe getallen en complexe functies

Jan van de Craats

Universiteit van Amsterdam, Open Universiteit

CWI Vacantiecursus 2007

Wat zijn complexe getallen?

Wat zijn complexe getallen?

Complexe getallen zijn paren reële getallen.

Wat zijn complexe getallen?

Complexe getallen zijn paren reëele getallen.

Het zijn getallen omdat je ze kunt optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Wat zijn complexe getallen?

Complexe getallen zijn paren reële getallen.

Het zijn getallen omdat je ze kunt optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Nieuwe notatie: in plaats van (a, b) schrijven we

$$a + b\,\mathrm{i} \qquad \text{of} \qquad a + \mathrm{i}\,b$$

Wat zijn complexe getallen?

Complexe getallen zijn paren reële getallen.

Het zijn getallen omdat je ze kunt optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Nieuwe notatie: in plaats van (a, b) schrijven we

$$a + b\,\mathrm{i} \qquad \text{of} \qquad a + \mathrm{i}\,b$$

Optellen en aftrekken ('coördinaatsgewijs'):

$$(a_1 + b_1\,\mathrm{i}\,) \pm (a_2 + b_2\,\mathrm{i}\,) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\,\mathrm{i}$$

Wat zijn complexe getallen?

Complexe getallen zijn paren reëele getallen.

Het zijn getallen omdat je ze kunt optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Nieuwe notatie: in plaats van (a, b) schrijven we

$$a + b\,\mathrm{i} \qquad \text{of} \qquad a + \mathrm{i}\,b$$

Optellen en aftrekken ('coördinaatsgewijs'):

$$(a_1 + b_1\,\mathrm{i}\,) \pm (a_2 + b_2\,\mathrm{i}\,) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\,\mathrm{i}$$

Dit is de gewone vectoroptelling in $\mathbb{R}^2$.

Wat zijn complexe getallen?

Vermenigvuldigen:

$$(a_1 + b_1\,\mathrm{i}\,)(a_2 + b_2\,\mathrm{i}\,) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\mathrm{i}$$

Wat zijn complexe getallen?

Vermenigvuldigen:

$$(a_1 + b_1\,\mathrm{i}\,)(a_2 + b_2\,\mathrm{i}\,) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\mathrm{i}$$

Korte schrijfwijzen:

$$a + 0\,\mathrm{i} = a, \quad 0 + b\,\mathrm{i} = b\,\mathrm{i}\,, \quad 1\,\mathrm{i} = \mathrm{i}\,, \quad -1\,\mathrm{i} = -\,\mathrm{i}$$

Wat zijn complexe getallen?

Vermenigvuldigen:

$$(a_1 + b_1\,\mathrm{i}\,)(a_2 + b_2\,\mathrm{i}\,) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\mathrm{i}$$

Korte schrijfwijzen:

$a + 0\,\mathrm{i} = a, \quad 0 + b\,\mathrm{i} = b\,\mathrm{i}\,, \quad 1\,\mathrm{i} = \mathrm{i}\,, \quad -1\,\mathrm{i} = -\,\mathrm{i}$

Dan geldt dus: $\mathrm{i}^2 = (0 + 1\,\mathrm{i}\,)(0 + 1\,\mathrm{i}\,) = -1 + 0\,\mathrm{i} = -1$

Maar ook: $(-\,\mathrm{i}\,)^2 = (0 - 1\,\mathrm{i}\,)(0 - 1\,\mathrm{i}\,) = -1 + 0\,\mathrm{i} = -1$

Wat zijn complexe getallen?

Vermenigvuldigen:

$$(a_1 + b_1\,\mathrm{i}\,)(a_2 + b_2\,\mathrm{i}\,) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\mathrm{i}$$

Korte schrijfwijzen:

$a + 0\mathrm{i} = a, \quad 0 + b\,\mathrm{i} = b\,\mathrm{i}\,, \quad 1\,\mathrm{i} = \mathrm{i}\,, \quad -1\,\mathrm{i} = -\,\mathrm{i}$

Dan geldt dus: $\mathrm{i}^2 = (0 + 1\,\mathrm{i}\,)(0 + 1\,\mathrm{i}\,) = -1 + 0\mathrm{i} = -1$

Maar ook: $(-\,\mathrm{i}\,)^2 = (0 - 1\,\mathrm{i}\,)(0 - 1\,\mathrm{i}\,) = -1 + 0\mathrm{i} = -1$

Vermenigvuldigen is dus gewoon haakjes uitwerken en gebruiken dat $\mathrm{i}^2 = -1$!

Wat zijn complexe getallen?

Oplossingen van de vergelijking

$$x^2 = -1$$

zijn blijkbaar $x = \mathrm{i}$ en $x = -\mathrm{i}$. Dit zijn de 'wortels' uit -1.

Wat zijn complexe getallen?

Oplossingen van de vergelijking

$$x^2 = -1$$

zijn blijkbaar $x = \mathrm{i}$ en $x = -\mathrm{i}$. Dit zijn de 'wortels' uit -1.

Opgave: bewijs zelf dat er geen andere oplossingen zijn.

Wat zijn complexe getallen?

Oplossingen van de vergelijking

$$x^2 = -1$$

zijn blijkbaar $x = \mathrm{i}$ en $x = -\mathrm{i}$. Dit zijn de 'wortels' uit -1.

Opgave: bewijs zelf dat er geen andere oplossingen zijn.

Evenzo zijn $\pm 2\mathrm{i}$ de wortels uit -4, etc. Alle negatieve getallen hebben dus twee wortels.

Wat zijn complexe getallen?

We kunnen nu elke reële vierkantsvergelijking oplossen, ook als de discriminant negatief is:

Wat zijn complexe getallen?

We kunnen nu elke reële vierkantsvergelijking oplossen, ook als de discriminant negatief is:

Voorbeeld:

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

Wat zijn complexe getallen?

We kunnen nu elke reële vierkantsvergelijking oplossen, ook als de discriminant negatief is:

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 5 &= 0 \\ (x+1)^2 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Wat zijn complexe getallen?

We kunnen nu elke reële vierkantsvergelijking oplossen, ook als de discriminant negatief is:

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 5 &= 0 \\ (x+1)^2 + 4 &= 0 \\ (x+1)^2 &= -4 \end{aligned}$$

Wat zijn complexe getallen?

We kunnen nu elke reële vierkantsvergelijking oplossen, ook als de discriminant negatief is:

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 5 &= 0 \\ (x+1)^2 + 4 &= 0 \\ (x+1)^2 &= -4 \end{aligned}$$

Dit geeft $x + 1 = \pm 2\,\mathrm{i}$ oftewel $x = -1 + 2\,\mathrm{i}$ of $x = -1 - 2\,\mathrm{i}$.

Wat zijn complexe getallen?

We kunnen nu elke reële vierkantsvergelijking oplossen, ook als de discriminant negatief is:

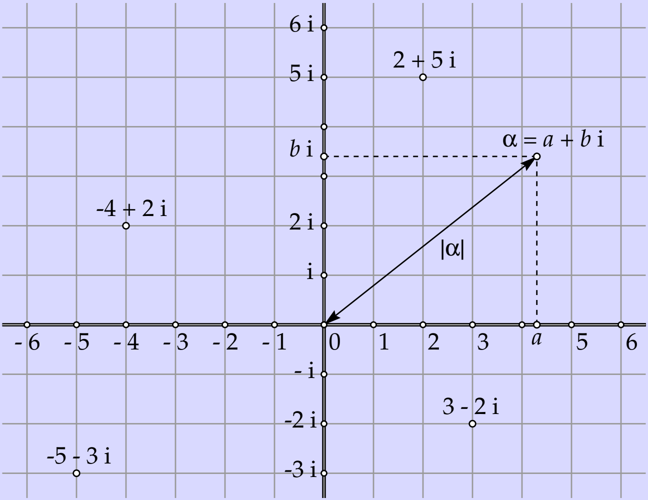
Voorbeeld:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 5 &= 0 \\ (x+1)^2 + 4 &= 0 \\ (x+1)^2 &= -4 \end{aligned}$$

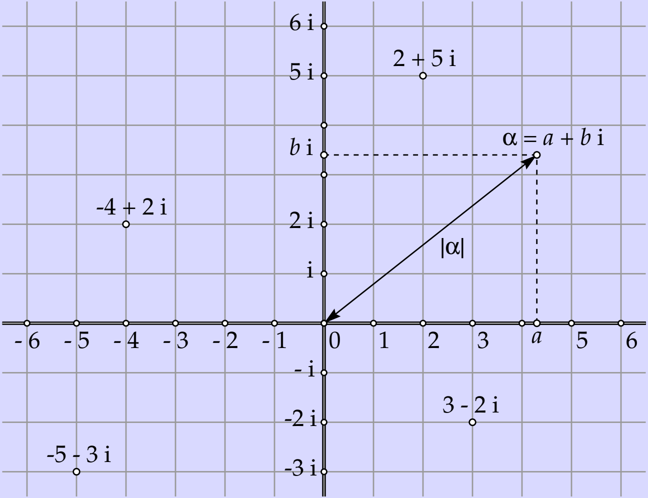
Dit geeft $x + 1 = \pm 2\,\mathrm{i}$ oftewel $x = -1 + 2\,\mathrm{i}$ of $x = -1 - 2\,\mathrm{i}$.

Je kunt dus gewoon de *abc*-formule toepassen!

Het complexe vlak

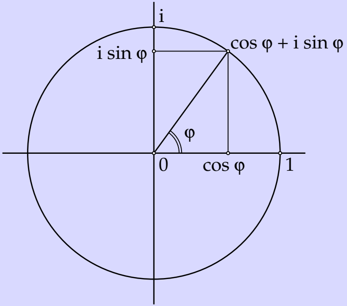


Het complexe vlak

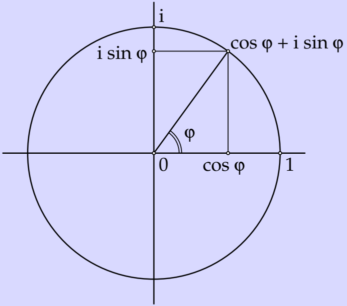


$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{(Pythagoras)}$$

Complexe getallen op de eenheidscirkel



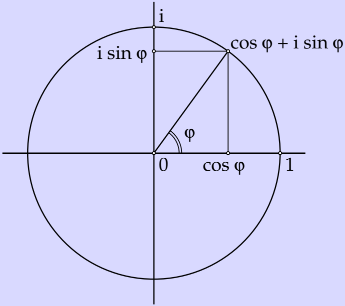
Complexe getallen op de eenheidscirkel



'Korte notatie' (Euler):

$$e^{\,i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$$

Complexe getallen op de eenheidscirkel

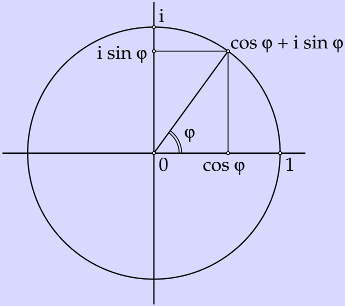


'Korte notatie' (Euler):

$$e^{\,i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$$

Wat gebeurt als je twee van zulke getallen met elkaar vermenigvuldigt?

Complexe getallen op de eenheidscirkel



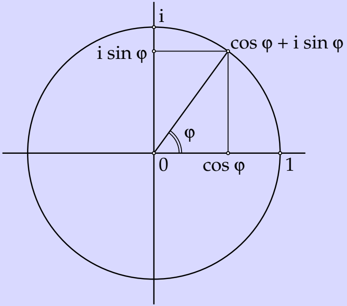
'Korte notatie' (Euler):

$$e^{\,i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$$

Wat gebeurt als je twee van zulke getallen met elkaar vermenigvuldigt?

$$(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2)$$

Complexe getallen op de eenheidscirkel



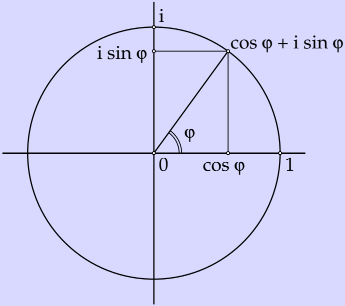
'Korte notatie' (Euler):

$$e^{\,i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$$

Wat gebeurt als je twee van zulke getallen met elkaar vermenigvuldigt?

$$
\begin{aligned}
&(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2)\\
=\ &(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2)\\
&\qquad + i\,(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)
\end{aligned}
$$

Complexe getallen op de eenheidscirkel



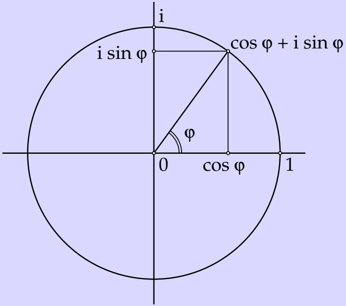
'Korte notatie' (Euler):

$$e^{\,i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$$

Wat gebeurt als je twee van zulke getallen met elkaar vermenigvuldigt?

$$\begin{aligned}
&(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2) \\
= \; &(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\
&\qquad + i\,(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) \\
= \; &\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1+\varphi_2)
\end{aligned}$$

Complexe getallen op de eenheidscirkel



'Korte notatie' (Euler):

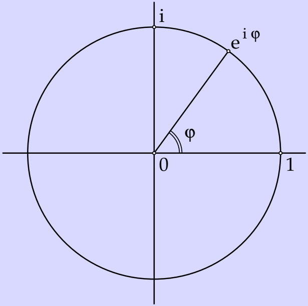
$$e^{\,i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$$

Wat gebeurt als je twee van zulke getallen met elkaar vermenigvuldigt?

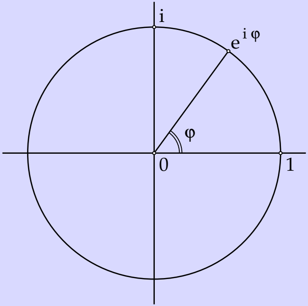
$$\begin{aligned}
&(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2)\\
=\;&(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2)\\
&\qquad\qquad + i\,(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\\
=\;&\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1+\varphi_2)
\end{aligned}$$

en dus geldt: $e^{\,i\varphi_1}e^{\,i\varphi_2} = e^{\,i(\varphi_1+\varphi_2)}$

Complexe getallen op de eenheidscirkel



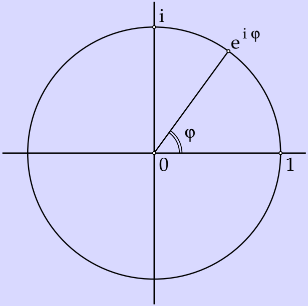
Complexe getallen op de eenheidscirkel



Het getal $e^{\,i\,\varphi}$ is het punt op de eenheidscirkel met argument φ (in radialen).

Dit is dus niet de gewone (reële) e-machtfunctie want de exponent is imaginair.

Complexe getallen op de eenheidscirkel

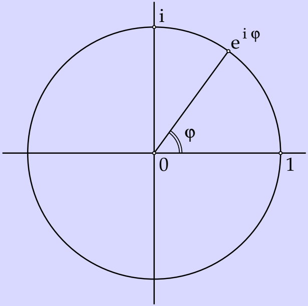


Het getal $e^{\,i\varphi}$ is het punt op de eenheidscirkel met argument φ (in radialen).

Dit is dus niet de gewone (reële) e-machtfunctie want de exponent is imaginair.

Bijzondere gevallen:

Complexe getallen op de eenheidscirkel



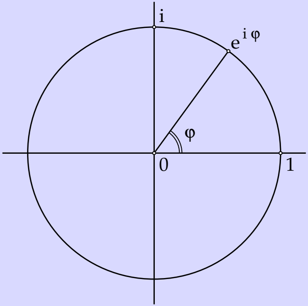
Het getal $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}$ is het punt op de eenheidscirkel met argument φ (in radialen).

Dit is dus niet de gewone (reële) e-machtfunctie want de exponent is imaginair.

Bijzondere gevallen:

- $\mathrm{e}^{\,\pi\,\mathrm{i}} = -1$

Complexe getallen op de eenheidscirkel



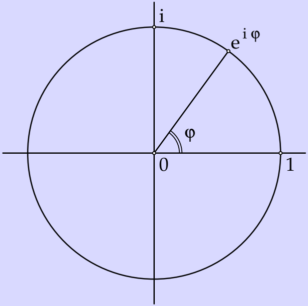
Het getal $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}$ is het punt op de eenheidscirkel met argument φ (in radialen).

Dit is dus niet de gewone (reële) e-machtfunctie want de exponent is imaginair.

Bijzondere gevallen:

- $\mathrm{e}^{\,\pi\,\mathrm{i}} = -1$
- $\mathrm{e}^{\,-\pi\,\mathrm{i}} = -1$

Complexe getallen op de eenheidscirkel



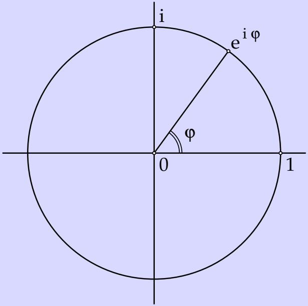
Bijzondere gevallen:

- $\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}} = -1$
- $\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}} = -1$
- $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\pi \mathrm{i}} = \mathrm{i}$

Het getal $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}$ is het punt op de eenheidscirkel met argument φ (in radialen).

Dit is dus niet de gewone (reële) e-machtfunctie want de exponent is imaginair.

Complexe getallen op de eenheidscirkel



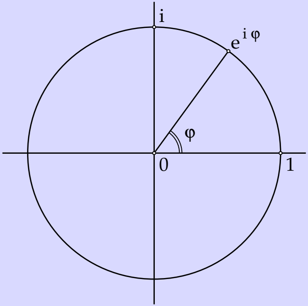
Het getal $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ is het punt op de eenheidscirkel met argument φ (in radialen).

Dit is dus niet de gewone (reële) e-machtfunctie want de exponent is imaginair.

Bijzondere gevallen:

- $\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}} = -1$
- $\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}} = -1$
- $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\pi \mathrm{i}} = \mathrm{i}$
- $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}} = 1$

Complexe getallen op de eenheidscirkel



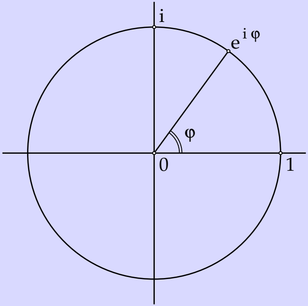
Het getal $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\varphi}$ is het punt op de eenheidscirkel met argument φ (in radialen).

Dit is dus niet de gewone (reële) e-machtfunctie want de exponent is imaginair.

Bijzondere gevallen:

- $\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}} = -1$
- $\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}} = -1$
- $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\pi \mathrm{i}} = \mathrm{i}$
- $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}} = 1$
- $\mathrm{e}^{2k\pi \mathrm{i}} = 1$ (k geheel)

Complexe getallen op de eenheidscirkel



Het getal $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}$ is het punt op de eenheidscirkel met argument φ (in radialen).

Dit is dus niet de gewone (reële) e-machtfunctie want de exponent is imaginair.

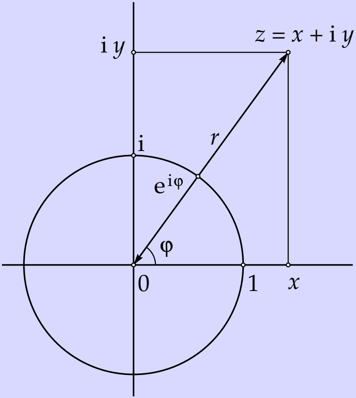
Bijzondere gevallen:

- $\mathrm{e}^{\,\pi\,\mathrm{i}} = -1$
- $\mathrm{e}^{\,-\pi\,\mathrm{i}} = -1$
- $\mathrm{e}^{\,\frac{1}{2}\pi\,\mathrm{i}} = \mathrm{i}$
- $\mathrm{e}^{\,2\pi\,\mathrm{i}} = 1$
- $\mathrm{e}^{\,2k\pi\,\mathrm{i}} = 1$ (k geheel)

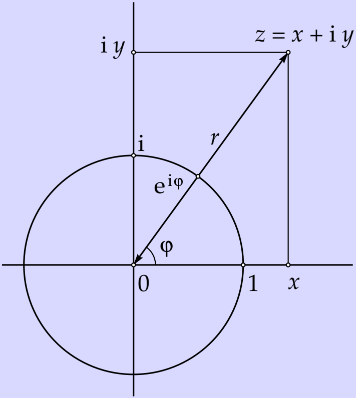
Verder geldt:

- $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_1}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_2} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\varphi_1+\varphi_2)}$
- $\dfrac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_1}}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_2}} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\varphi_1-\varphi_2)}$
- $\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}\right)^k = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,k\varphi}$ (k geheel)

De polaire notatie

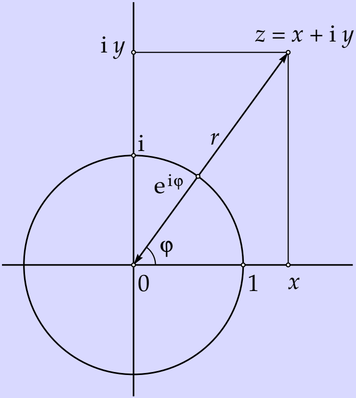


De polaire notatie



$$z = x + \mathrm{i}y = r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\varphi}$$

De polaire notatie

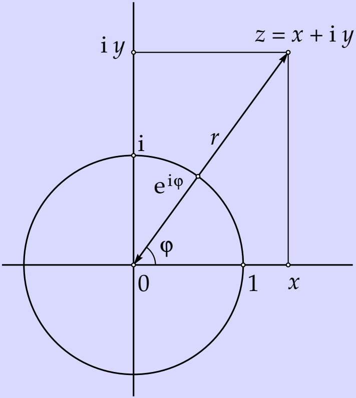


$$z = x + \mathrm{i}\,y = r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\varphi}$$

met

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

De polaire notatie



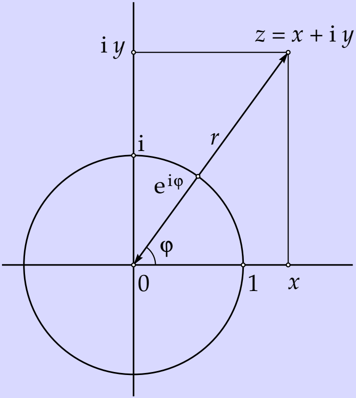
$$z = x + \mathrm{i}\,y = r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\varphi}$$

met

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

De polaire notatie



$$z = x + \mathrm{i}y = r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\varphi}$$

met

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

$$\tan\varphi = y/x$$

De polaire notatie

Polaire notatie is handig voor vermenigvuldigen en delen:

De polaire notatie

Polaire notatie is handig voor vermenigvuldigen en delen:

Vermenigvuldigen: $z_1 z_2 = r_1 r_2 \, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}$

De polaire notatie

Polaire notatie is handig voor vermenigvuldigen en delen:

Vermenigvuldigen: $z_1 z_2 = r_1 r_2 \, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Delen: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\varphi_1 - \varphi_2)}$

De polaire notatie

Polaire notatie is handig voor vermenigvuldigen en delen:

Vermenigvuldigen: $z_1 z_2 = r_1 r_2 \, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Delen: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Bij vermenigvuldigen worden de absolute waarden met elkaar vermenigvuldigd en de argumenten bij elkaar opgeteld.

Bij delen worden de absolute waarden gedeeld en de argumenten van elkaar afgetrokken.

De complexe e-machtfunctie

Hoe wordt de functie $w = \mathrm{e}^z$ gedefinieerd?

De complexe e-machtfunctie

Hoe wordt de functie $w = \mathrm{e}^{z}$ gedefinieerd?

$$w = \mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y)$$

De complexe e-machtfunctie

Hoe wordt de functie $w = \mathrm{e}^{z}$ gedefinieerd?

$$w = \mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y)$$

Dan geldt

De complexe e-machtfunctie

Hoe wordt de functie $w = \mathrm{e}^z$ gedefinieerd?

$$w = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y)$$

Dan geldt

- $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$ voor elke z_1 en z_2

De complexe e-machtfunctie

Hoe wordt de functie $w = \mathrm{e}^{z}$ gedefinieerd?

$$w = \mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y)$$

Dan geldt

- $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$ voor elke z_1 en z_2
- $|\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}| = \mathrm{e}^{x}$

De complexe e-machtfunctie

Hoe wordt de functie $w = \mathrm{e}^{z}$ gedefinieerd?

$$w = \mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

Dan geldt

- $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$ voor elke z_1 en z_2
- $|\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}| = \mathrm{e}^{x}$
- $\arg\left(\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}\right) = y + 2k\pi$ (k geheel)

De complexe e-machtfunctie

Hoe wordt de functie $w = \mathrm{e}^z$ gedefinieerd?

$$w = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

Dan geldt

- $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$ voor elke z_1 en z_2
- $|\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}| = \mathrm{e}^x$
- $\arg\left(\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}\right) = y + 2k\pi$ (k geheel)
- $\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z$ voor elk geheel getal k,

De complexe e-machtfunctie

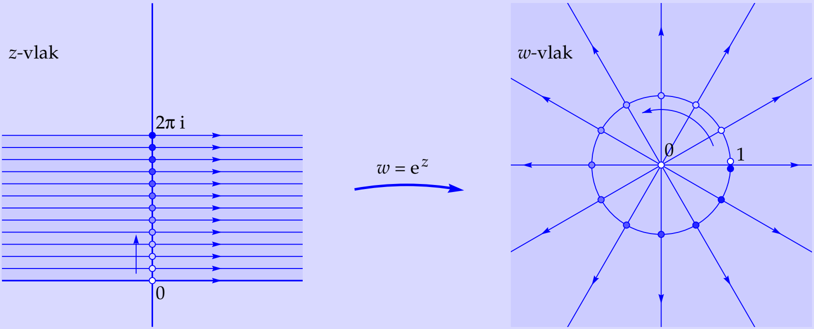
Hoe wordt de functie $w = \mathrm{e}^{z}$ gedefinieerd?

$$w = \mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y)$$

Dan geldt

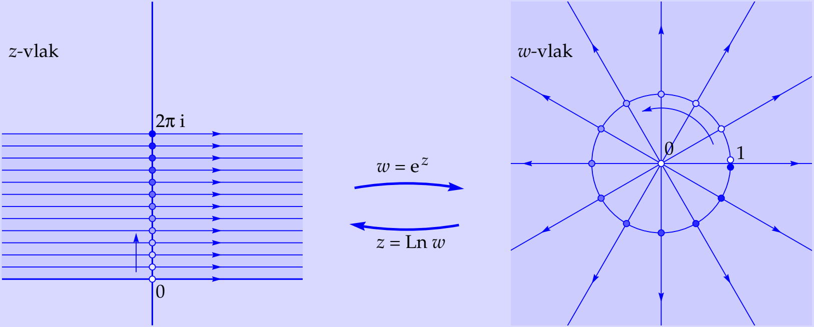
- $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$ voor elke z_1 en z_2
- $\left|\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}\right| = \mathrm{e}^{x}$
- $\arg\left(\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}\right) = y + 2k\pi$ (k geheel)
- $\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{z}$ voor elk geheel getal k,
  de e-machtfunctie is dus *periodiek* met periode $2\pi\mathrm{i}$.

De complexe e-machtfunctie in beeld gebracht

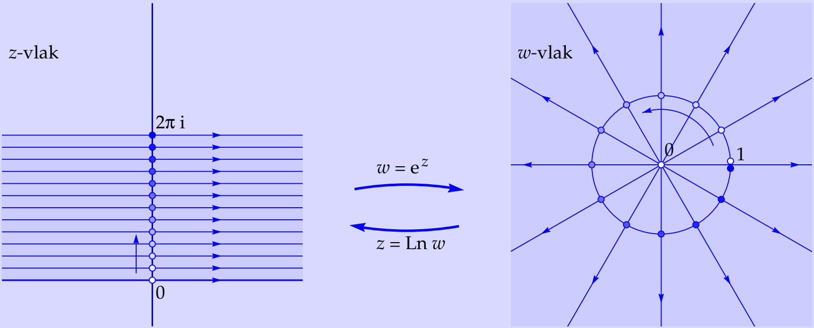


$$w = \mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y)$$

De complexe Ln-functie in beeld gebracht

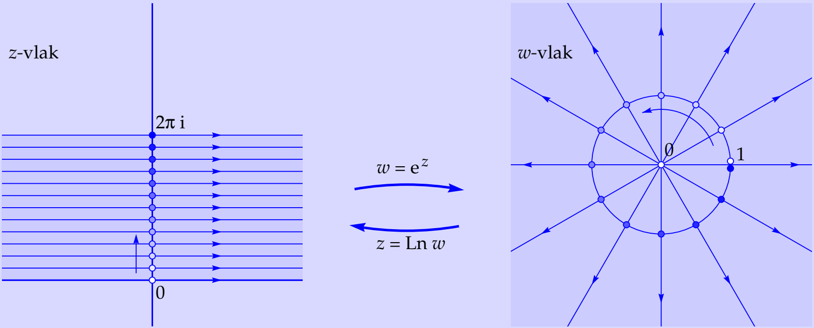


De complexe Ln-functie in beeld gebracht



Gegeven: $w = r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\varphi}$. Voor welke z geldt $w = \mathrm{e}^{z}$?

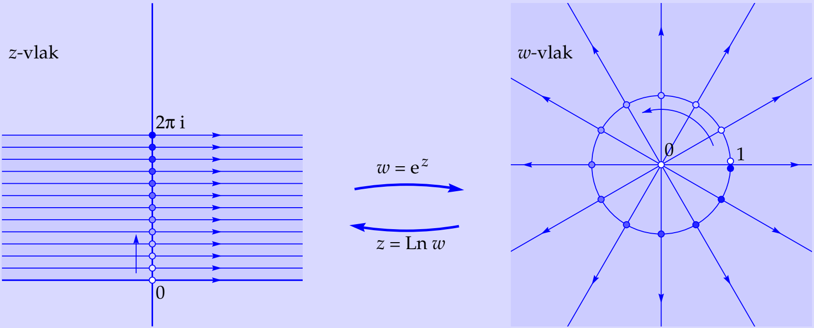
De complexe Ln-functie in beeld gebracht



Gegeven: $w = r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}$. Voor welke z geldt $w = \mathrm{e}^{\,z}$?

$$z = \mathrm{Ln}\, w =$$

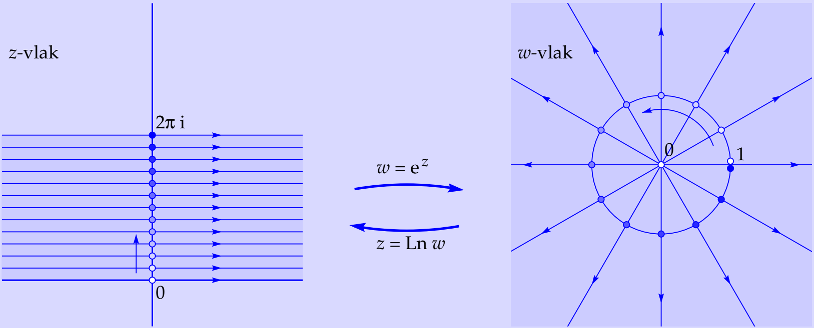
De complexe Ln-functie in beeld gebracht



Gegeven: $w = r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}$. Voor welke z geldt $w = \mathrm{e}^{z}$?

$$z = \operatorname{Ln} w = \ln r + \mathrm{i}\,\varphi + 2k\pi\,\mathrm{i}$$

De complexe Ln-functie in beeld gebracht



Gegeven: $w = r\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}$. Voor welke z geldt $w = \mathrm{e}^{z}$?

$$z = \operatorname{Ln} w = \ln r + \mathrm{i}\,\varphi + 2k\pi\,\mathrm{i}$$

oftewel: $\operatorname{Ln} w = \ln |w| + \mathrm{i}\,\arg w$

Differentieerbaarheid

Een complexe functie $w = f(z)$ heet differentieerbaar in z_0 als

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

bestaat als eindig complex getal.

Differentieerbaarheid

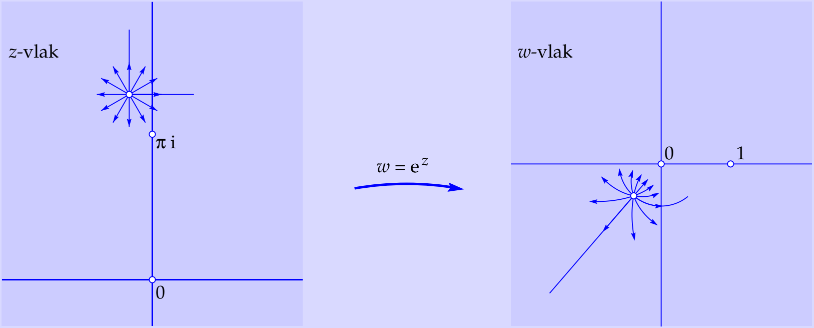
Een complexe functie $w = f(z)$ heet differentieerbaar in z_0 als

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

bestaat als eindig complex getal.

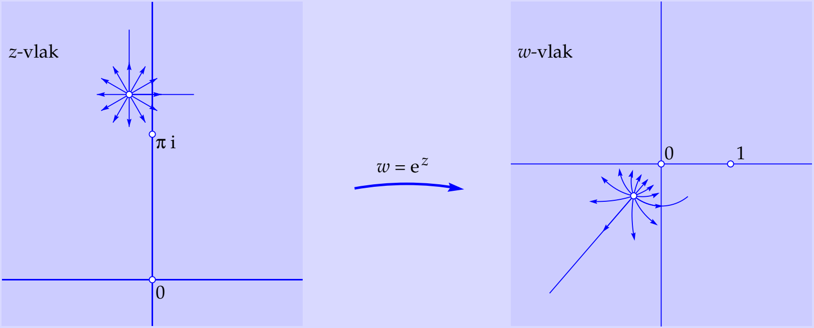
Wat betekent dat meetkundig gezien?

Differentieerbaarheid



Voorbeeld: $w = \mathrm{e}^{z}, \quad z_0 = -\frac{1}{2} + 4\,\mathrm{i}\,.$

Differentieerbaarheid

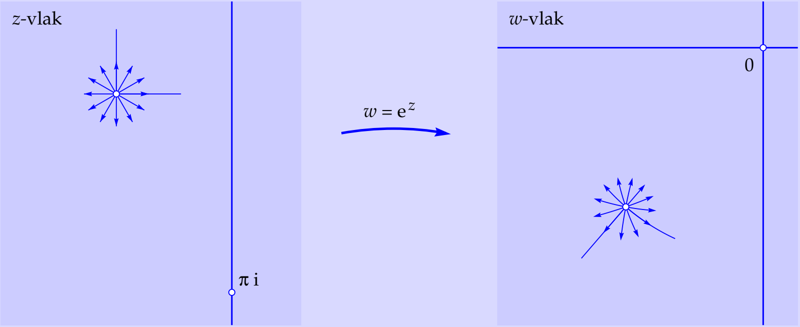


Voorbeeld: $w = \mathrm{e}^{z}, \quad z_0 = -\frac{1}{2} + 4\,\mathrm{i}\,.$

$|\Delta z| = 0.7$

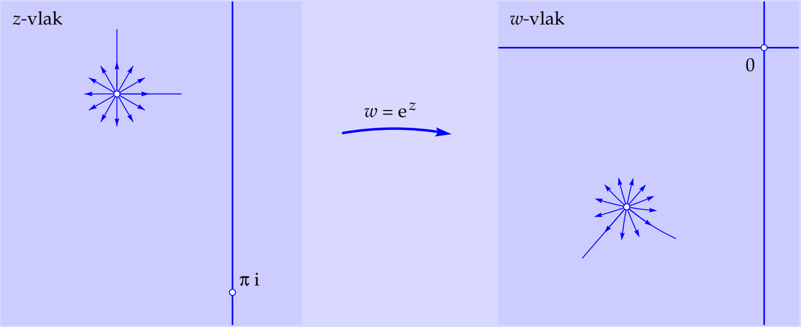
Differentieerbaarheid

Inzoomen: $|\Delta z| = 0.14$



Differentieerbaarheid

Inzoomen: $|\Delta z| = 0.14$



Voor kleine $|\Delta z|$ zijn de rozetjes in het z-vlak en het w-vlak (vrijwel) direct gelijkvormig want

$$\Delta w \approx w'(z_0)\,\Delta z$$

Differentieerbaarheid

Voor complexe functies $w = f(z)$ is differentieerbaarheid dus een zware eis! (direct gelijkvormige rozetjes als $w'(z_0) \neq 0$).

Differentieerbaarheid

Voor complexe functies $w = f(z)$ is differentieerbaarheid dus een zware eis! (direct gelijkvormige rozetjes als $w'(z_0) \neq 0$).

Meetkundig gezien betekent diffferentieerbaarheid conformiteit (gelijkvormigheid in het klein) in alle punten waar $w'(z) \neq 0$.

Differentieerbaarheid

Voor complexe functies $w = f(z)$ is differentieerbaarheid dus een zware eis! (direct gelijkvormige rozetjes als $w'(z_0) \neq 0$).

Meetkundig gezien betekent diffferentieerbaarheid conformiteit (gelijkvormigheid in het klein) in alle punten waar $w'(z) \neq 0$.

Voorbeelden van differentieerbare functies:

Differentieerbaarheid

Voor complexe functies $w = f(z)$ is differentieerbaarheid dus een zware eis! (direct gelijkvormige rozetjes als $w'(z_0) \neq 0$).

Meetkundig gezien betekent diffferentieerbaarheid conformiteit (gelijkvormigheid in het klein) in alle punten waar $w'(z) \neq 0$.

Voorbeelden van differentieerbare functies:

- polynomen

Differentieerbaarheid

Voor complexe functies $w = f(z)$ is differentieerbaarheid dus een zware eis! (direct gelijkvormige rozetjes als $w'(z_0) \neq 0$).

Meetkundig gezien betekent diffferentieerbaarheid conformiteit (gelijkvormigheid in het klein) in alle punten waar $w'(z) \neq 0$.

Voorbeelden van differentieerbare functies:

- polynomen
- rationale functies (mits noemer niet nul)

Differentieerbaarheid

Voor complexe functies $w = f(z)$ is differentieerbaarheid dus een zware eis! (direct gelijkvormige rozetjes als $w'(z_0) \neq 0$).

Meetkundig gezien betekent diffferentieerbaarheid conformiteit (gelijkvormigheid in het klein) in alle punten waar $w'(z) \neq 0$.

Voorbeelden van differentieerbare functies:

- polynomen
- rationale functies (mits noemer niet nul)
- e^{z}, $\cos z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$, $\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$

Differentieerbaarheid

Voor complexe functies $w = f(z)$ is differentieerbaarheid dus een zware eis! (direct gelijkvormige rozetjes als $w'(z_0) \neq 0$).

Meetkundig gezien betekent diffferentieerbaarheid conformiteit (gelijkvormigheid in het klein) in alle punten waar $w'(z) \neq 0$.

Voorbeelden van differentieerbare functies:

- polynomen
- rationale functies (mits noemer niet nul)
- e^z, $\cos z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$, $\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$
- $\mathrm{Ln}\, z$ (mits $z \neq 0$)

Differentieerbaarheid

Voor complexe functies $w = f(z)$ is differentieerbaarheid dus een zware eis! (direct gelijkvormige rozetjes als $w'(z_0) \neq 0$).

Meetkundig gezien betekent diffferentieerbaarheid conformiteit (gelijkvormigheid in het klein) in alle punten waar $w'(z) \neq 0$.

Voorbeelden van differentieerbare functies:

- polynomen
- rationale functies (mits noemer niet nul)
- e^{z}, $\cos z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}$, $\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$
- $\mathrm{Ln}\, z$ (mits $z \neq 0$)
- $\ldots$

Differentieerbaarheid

Verrassende eigenschappen:

Als $f(z)$ differentieerbaar is op een gebied G, dan geldt

Differentieerbaarheid

Verrassende eigenschappen:

Als $f(z)$ differentieerbaar is op een gebied G, dan geldt

- $f(z)$ is op G oneindig vaak differentieerbaar.

Differentieerbaarheid

Verrassende eigenschappen:

Als $f(z)$ differentieerbaar is op een gebied G, dan geldt

- $f(z)$ is op G oneindig vaak differentieerbaar.
- $f(z)$ is analytisch op G, dat wil zeggen: bij elk punt $z_0 \in G$ is er een getal $R > 0$ zo, dat $f(z)$ in de cirkel $|z - z_0| < R$ ontwikkeld kan worden in een convergente machtreeks

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Dank!

Zie verder elk boek over complexe functietheorie, maar vooral ook mijn internetboek

Complexe getallen voor wiskunde D

dat gratis te downloaden is (in pdf) vanaf mijn homepage:

`www.science.uva.nl/~craats`