Jan van de Craats

De meetkunde van de derdegraadsvergelijking

22 februari 2007

Algemene (complexe) derdegraadsvergelijking

$$z^3 - 3a_1z^2 + 3a_2z - a_3 = 0$$

met a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{C}$

Oplossingen z_1, z_2, z_3

Algemene (complexe) derdegraadsvergelijking

$$z^3 - 3a_1z^2 + 3a_2z - a_3 = 0$$

met a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{C}$

Oplossingen z_1, z_2, z_3

Dan

$$\begin{aligned} 3a_1 &= z_1 + z_2 + z_3 \\ 3a_2 &= z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 \\ a_3 &= z_1z_2z_3 \end{aligned}$$

Hoe bepaal je z_1, z_2 en z_3 als a_1, a_2 en a_3 gegeven zijn?

Algemene derdegraadsvergelijking

$$z^3 - 3a_1z^2 + 3a_2z - a_3 = 0$$

Algemene derdegraadsvergelijking

$$z^3 - 3a_1z^2 + 3a_2z - a_3 = 0$$

Makkelijk oplosbaar (via afgeleide) als er een meervoudige wortel is.

Algemene derdegraadsvergelijking

$$z^3 - 3a_1z^2 + 3a_2z - a_3 = 0$$

Makkelijk oplosbaar (via afgeleide) als er een meervoudige wortel is.
Verder:

$$z^3 - 3a_1z^2 + 3a_2z - a_3 = (z - a_1)^3 + 3(a_2 - a_1^2)z - (a_3 - a_1^3)$$

dus ook makkelijk oplosbaar als

$$a_2 - a_1^2 = 0$$

Algemene derdegraadsvergelijking

$$z^3 - 3a_1 z^2 + 3a_2 z - a_3 = 0$$

Makkelijk oplosbaar (via afgeleide) als er een meervoudige wortel is.
Verder:

$$z^3 - 3a_1 z^2 + 3a_2 z - a_3 = (z - a_1)^3 + 3(a_2 - a_1^2)z - (a_3 - a_1^3)$$

dus ook makkelijk oplosbaar als

$$a_2 - a_1^2 = 0$$

Stel daarom in het vervolg

- geen meervoudige wortel
- $a_2 - a_1^2 \neq 0$

De grote lijn: zoek p, q, h_1, h_2 zo, dat

$$z^3 - 3a_1z^2 + 3a_2z - a_3 = p(z - h_1)^3 + q(z - h_2)^3$$

Dan is de vergelijking dus te schrijven als

$$p(z - h_1)^3 + q(z - h_2)^3 = 0$$

De grote lijn: zoek p, q, h_1, h_2 zo, dat

$$z^3 - 3a_1z^2 + 3a_2z - a_3 = p(z-h_1)^3 + q(z-h_2)^3$$

Dan is de vergelijking dus te schrijven als

$$p(z-h_1)^3 + q(z-h_2)^3 = 0$$

en die is eenvoudig oplosbaar:

$$\left(\frac{z-h_1}{z-h_2}\right)^3 = \frac{-q}{p}$$

De grote lijn: zoek p, q, h_1, h_2 zo, dat

$$z^3 - 3a_1z^2 + 3a_2z - a_3 = p(z-h_1)^3 + q(z-h_2)^3$$

Dan is de vergelijking dus te schrijven als

$$p(z-h_1)^3 + q(z-h_2)^3 = 0$$

en die is eenvoudig oplosbaar:

$$\left(\frac{z-h_1}{z-h_2}\right)^3 = \frac{-q}{p}$$

Noem voor het gemak even $R = \dfrac{-q}{p}$, dan is

$$\frac{z-h_1}{z-h_2} = \sqrt[3]{R}$$

De grote lijn: zoek p, q, h_1, h_2 zo, dat

$$z^3 - 3a_1z^2 + 3a_2z - a_3 = p(z-h_1)^3 + q(z-h_2)^3$$

Dan is de vergelijking dus te schrijven als

$$p(z-h_1)^3 + q(z-h_2)^3 = 0$$

en die is eenvoudig oplosbaar:

$$\left(\frac{z-h_1}{z-h_2}\right)^3 = \frac{-q}{p}$$

Noem voor het gemak even $R = \dfrac{-q}{p}$, dan is

$$\frac{z-h_1}{z-h_2} = \sqrt[3]{R}$$

en als we de drie wortels $\sqrt[3]{R}$ even r_1, r_2, r_3 noemen, dan volgt

$$z_k = \frac{h_1 - h_2r_k}{1-r_k} \quad (k = 1, 2, 3)$$

Meetkundig intermezzo:

Stel dat h_1, h_2 en $R = -\frac{q}{p}$ al gevonden zijn.

Wat betekent

$$\frac{z_k - h_1}{z_k - h_2} = r_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$

(met $r_k^3 = R$) meetkundig?

Meetkundig intermezzo:

Stel dat h_1, h_2 en $R = -\dfrac{q}{p}$ al gevonden zijn.

Wat betekent

$$\frac{z_k - h_1}{z_k - h_2} = r_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$

(met $r_k^3 = R$) meetkundig?

Omdat $r_k = \sqrt[3]{|R|}\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{3}\arg R + \frac{2k}{3}\pi\right)\mathrm{i}}$ geldt $|r_k| = \sqrt[3]{|R|}$ voor alle k, dus ook

$$\frac{|z_k - h_1|}{|z_k - h_2|} = \sqrt[3]{|R|} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

Dit betekent dat z_1, z_2 en z_3 liggen op de *cirkel van Apollonius* van h_1 en h_2 met afstandsverhouding $\sqrt[3]{|R|}$.

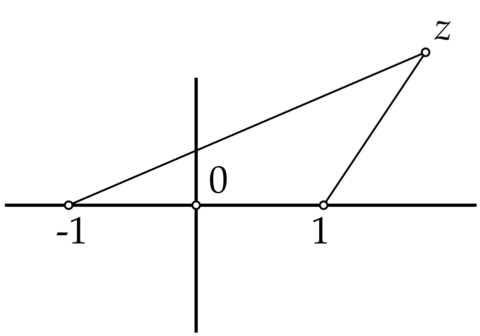
Bewijs: stel z.b.d.a. $h_1 = -1$, $h_2 = 1$. Noem $r = \sqrt[3]{|R|}$, dus $r > 0$.

Dan geldt $|z+1| = r|z-1|$ d.e.s.d. als $|z+1|^2 = r^2|z-1|^2$ dus

$$(z+1)(\overline{z}+1) = r^2(z-1)(\overline{z}-1)$$

zodat

$$(1-r^2)z\overline{z} + (1+r^2)z + (1+r^2)\overline{z} + (1-r^2) = 0$$



Bewijs: stel z.b.d.a. $h_1 = -1$, $h_2 = 1$. Noem $r = \sqrt[3]{|R|}$, dus $r > 0$.

Dan geldt $|z+1| = r|z-1|$ d.e.s.d. als $|z+1|^2 = r^2|z-1|^2$ dus

$$(z+1)(\overline{z}+1) = r^2(z-1)(\overline{z}-1)$$

zodat

$$(1-r^2)z\overline{z} + (1+r^2)z + (1+r^2)\overline{z} + (1-r^2) = 0$$

of, met $m = (r^2+1)/(r^2-1)$

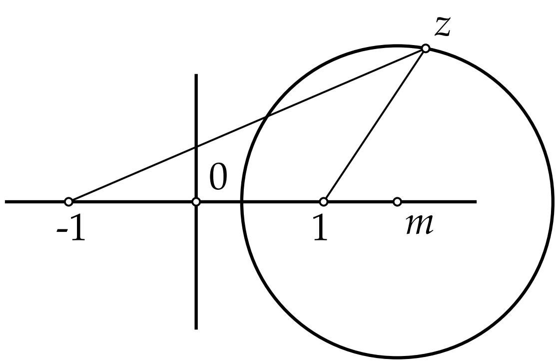
$$z\overline{z} - mz - m\overline{z} + 1 = 0$$

met andere woorden

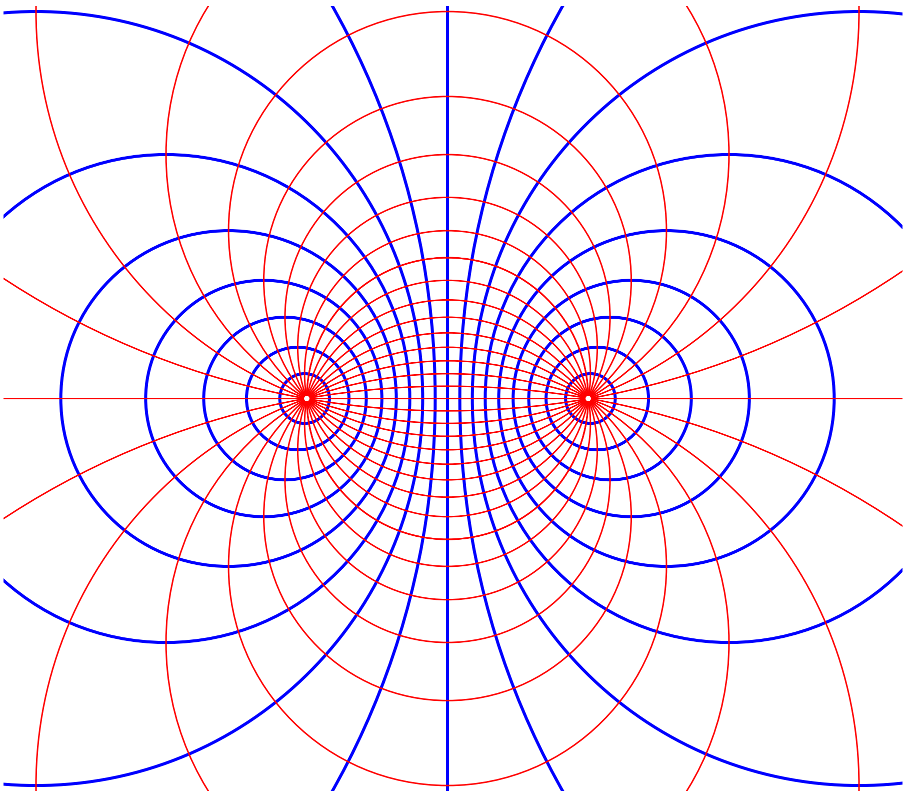
$$(z-m)(\overline{z}-m) = m^2 - 1$$

oftewel

$$|z-m| = \sqrt{m^2-1}$$



Cirkels van Apollonius van -1 en 1 en cirkels door -1 en 1



Belangrijke eigenschap: *elke cirkel van Apollonius van* h_1 *en* h_2 *snijdt elke cirkel door* h_1 *en* h_2 *loodrecht!*

Bewijs: Een cirkel door -1 en 1 heeft middelpunt $t\,\mathrm{i}$ en straal $\sqrt{1+t^2}$.

Voor het snijpunt z geldt dan

$$|z - t\,\mathrm{i}\,|^2 = 1 + t^2$$

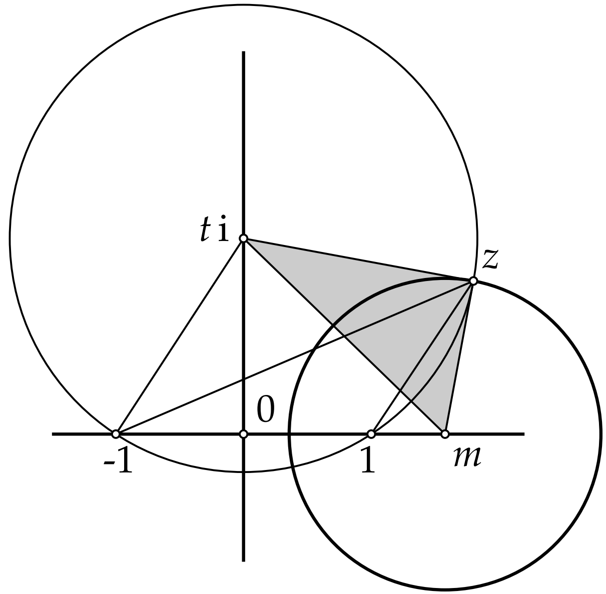
en (Apollonius, vorige sheet)

$$|z - m|^2 = m^2 - 1$$

Verder is

$$|m - t\,\mathrm{i}\,|^2 = m^2 + t^2$$

Volgens de omgekeerde stelling van Pythagoras is hoek $\angle(t\,\mathrm{i}, z, m)$ dus recht.



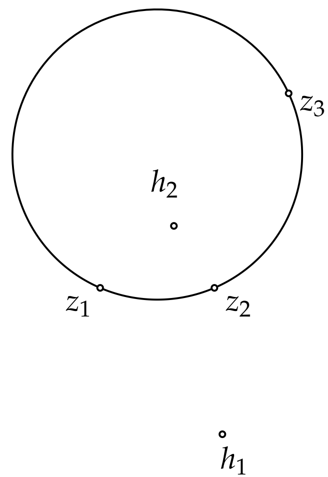
De twee cirkels snijden elkaar dus loodrecht omdat de stralen naar z elkaar loodrecht snijden.

Wegens

$$\frac{z_k - h_1}{z_k - h_2} = r_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$

en $r_k = \sqrt[3]{|R|}\,\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{3}\arg R + \frac{2k}{3}\pi\right)\mathrm{i}}$ geldt dat

$$\arg(z_k - h_1) - \arg(z_k - h_2) = \frac{1}{3}\arg R + \frac{2k}{3}\pi$$

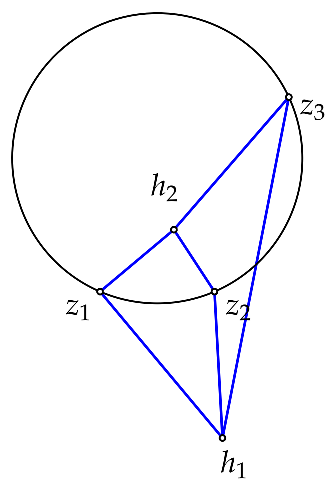


Wegens

$$\frac{z_k - h_1}{z_k - h_2} = r_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$

en $r_k = \sqrt[3]{|R|}\mathrm{e}^{(\frac{1}{3}\arg R + \frac{2k}{3}\pi)\,\mathrm{i}}$ geldt dat

$$\arg(z_k - h_1) - \arg(z_k - h_2) = \frac{1}{3}\arg R + \frac{2k}{3}\pi$$

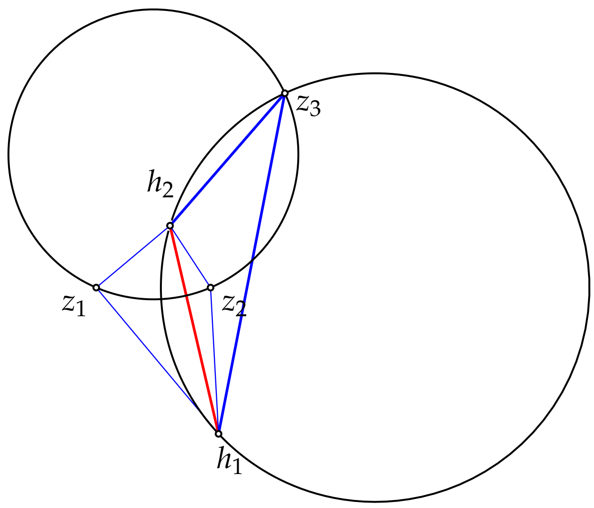


Wegens

$$\frac{z_k - h_1}{z_k - h_2} = r_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$

en $r_k = \sqrt[3]{|R|}\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{3}\arg R + \frac{2k}{3}\pi\right)\mathrm{i}}$ geldt dat

$$\arg(z_k - h_1) - \arg(z_k - h_2) = \frac{1}{3}\arg R + \frac{2k}{3}\pi$$



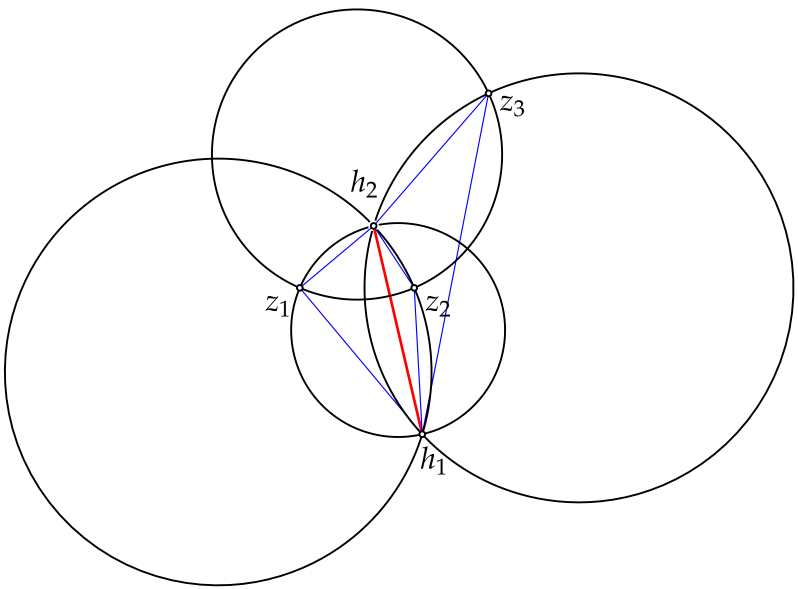
Wegens

$$\frac{z_k - h_1}{z_k - h_2} = r_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$

en $r_k = \sqrt[3]{|R|}\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{3}\arg R + \frac{2k}{3}\pi\right)\mathrm{i}}$ geldt dat

$$\arg(z_k - h_1) - \arg(z_k - h_2) = \frac{1}{3}\arg R + \frac{2k}{3}\pi$$

Dit impliceert dat de drie cirkels (h_1, z_1, h_2), (h_1, z_2, h_2) en (h_1, z_3, h_2) elkaar in h_1 en h_2 snijden onder hoeken van $\frac{2\pi}{3}$



De bepaling van p, q, h_1, h_2 :

Uit $z^3 - 3a_1z^2 + 3a_2z - a_3 = p(z-h_1)^3 + q(z-h_2)^3$ volgt

$$\begin{aligned} 1 &= p + q &(1)\\ a_1 &= ph_1 + qh_2 &(2)\\ a_2 &= ph_1^2 + qh_2^2 &(3)\\ a_3 &= ph_1^3 + qh_2^3 &(4) \end{aligned}$$

De bepaling van p, q, h_1, h_2 :

Uit $z^3 - 3a_1z^2 + 3a_2z - a_3 = p(z-h_1)^3 + q(z-h_2)^3$ volgt

$$\begin{aligned} 1 &= p+q && (1)\\ a_1 &= ph_1 + qh_2 && (2)\\ a_2 &= ph_1^2 + qh_2^2 && (3)\\ a_3 &= ph_1^3 + qh_2^3 && (4) \end{aligned}$$

(1)×(3) – (2)^2 levert

$$a_2 - a_1^2 = (p+q)(ph_1^2 + qh_2^2) - (ph_1 + qh_2)^2 = pq(h_1 - h_2)^2$$

De bepaling van $p,\ q,\ h_1,\ h_2$:

Uit $z^3 - 3a_1z^2 + 3a_2z - a_3 = p(z-h_1)^3 + q(z-h_2)^3$ volgt

$$\begin{aligned} 1 &= p+q && (1)\\ a_1 &= ph_1 + qh_2 && (2)\\ a_2 &= ph_1^2 + qh_2^2 && (3)\\ a_3 &= ph_1^3 + qh_2^3 && (4) \end{aligned}$$

(1)×(3) – (2)^2 levert

$$a_2 - a_1^2 = (p+q)(ph_1^2 + qh_2^2) - (ph_1 + qh_2)^2 = pq(h_1 - h_2)^2$$

(1)×(4) – (2)×(3) levert

$$a_3 - a_1 \cdot a_2 = (p+q)(ph_1^3 + qh_2^3) - (ph_1 + qh_2)(ph_1^3 + qh_2^3) = pq(h_1-h_2)^2(h_1+h_2)$$

De bepaling van p, q, h_1, h_2 :

Uit $z^3 - 3a_1z^2 + 3a_2z - a_3 = p(z-h_1)^3 + q(z-h_2)^3$ volgt

$$
\begin{aligned}
1 &= p+q & (1)\\
a_1 &= ph_1 + qh_2 & (2)\\
a_2 &= ph_1^2 + qh_2^2 & (3)\\
a_3 &= ph_1^3 + qh_2^3 & (4)
\end{aligned}
$$

(1)×(3) – (2)^2 levert

$$a_2 - a_1^2 = (p+q)(ph_1^2 + qh_2^2) - (ph_1 + qh_2)^2 = pq(h_1 - h_2)^2$$

(1)×(4) – (2)×(3) levert

$$a_3 - a_1 \cdot a_2 = (p+q)(ph_1^3 + qh_2^3) - (ph_1 + qh_2)(ph_1^3 + qh_2^3) = pq(h_1 - h_2)^2(h_1 + h_2)$$

(2)×(4) – (3)^2 levert

$$a_1 \cdot a_3 - a_2^2 = (ph_1 + qh_2)(ph_1^3 + qh_2^3) - (ph_1^2 + qh_2^2)^2 = pq(h_1 - h_2)^2 h_1 h_2$$

Noem nu

$$
\begin{aligned}
A &:= a_2 - a_1^2 && \big(= pq(h_1 - h_2)^2 \big) \\
B &:= a_3 - a_1 a_2 && \big(= pq(h_1 - h_2)^2 (h_1 + h_2) \big) \\
C &:= a_1 a_3 - a_2^2 && \big(= pq(h_1 - h_2)^2 h_1 h_2 \big)
\end{aligned}
$$

Dan is volgens aanname $A \neq 0$ dus $h_1 \neq h_2$ en verder geldt

$$B/A = h_1 + h_2 \quad \text{en} \quad C/A = h_1 h_2$$

Noem nu

$$\begin{array}{rcll} A & := & a_2 - a_1^2 & \big(= pq(h_1 - h_2)^2\big) \\ B & := & a_3 - a_1 a_2 & \big(= pq(h_1 - h_2)^2 (h_1 + h_2)\big) \\ C & := & a_1 a_3 - a_2^2 & \big(= pq(h_1 - h_2)^2 h_1 h_2\big) \end{array}$$

Dan is volgens aanname $A \neq 0$ dus $h_1 \neq h_2$ en verder geldt

$$B/A = h_1 + h_2 \quad \text{en} \quad C/A = h_1 h_2$$

en dus zijn h_1 en h_2 de oplossingen van

$$h^2 - \frac{B}{A} h + \frac{C}{A} = 0$$

oftewel, na vermenigvuldigen met A en terugsubstitueren,

$$(a_2 - a_1^2)h^2 - (a_3 - a_1 a_2)h + (a_1 a_3 - a_2^2) = 0$$

Noem nu

$$\begin{array}{lcll} A & := & a_2 - a_1^2 & \left(= pq(h_1 - h_2)^2\right) \\ B & := & a_3 - a_1 a_2 & \left(= pq(h_1 - h_2)^2 (h_1 + h_2)\right) \\ C & := & a_1 a_3 - a_2^2 & \left(= pq(h_1 - h_2)^2 h_1 h_2\right) \end{array}$$

Dan is volgens aanname $A \neq 0$ dus $h_1 \neq h_2$ en verder geldt

$$B/A = h_1 + h_2 \quad \text{en} \quad C/A = h_1 h_2$$

en dus zijn h_1 en h_2 de oplossingen van

$$h^2 - \frac{B}{A} h + \frac{C}{A} = 0$$

oftewel, na vermenigvuldigen met A en terugsubstitueren,

$$(a_2 - a_1^2) h^2 - (a_3 - a_1 a_2) h + (a_1 a_3 - a_2^2) = 0$$

Merk op: de discriminant is

$$D = B^2 - 4AC = (a_3 - a_1 a_2)^2 - 4(a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2)$$

Rest nog p en q te vinden, of liever $R = -q/p$.

De bepaling van

$$R = -\frac{q}{p}$$

Wegens

$$\begin{aligned} 1 &= p + q && (1) \\ a_1 &= ph_1 + qh_2 && (2) \end{aligned}$$

geldt

$$\begin{aligned} h_1 - a_1 &= q(h_1 - h_2) \\ h_2 - a_1 &= p(h_2 - h_1) \end{aligned}$$

De bepaling van

$$R = -\frac{q}{p}$$

Wegens

$$\begin{aligned} 1 &= p + q \qquad (1) \\ a_1 &= ph_1 + qh_2 \qquad (2) \end{aligned}$$

geldt

$$\begin{aligned} h_1 - a_1 &= q(h_1 - h_2) \\ h_2 - a_1 &= p(h_2 - h_1) \end{aligned}$$

en dus is

$$R = -\frac{q}{p} = \frac{h_1 - a_1}{h_2 - a_1}$$

Merk op dat $R \neq 1$ omdat $h_1 \neq h_2$.
Hiermee is de oplossingsmethode voor de algemene derdegraadsvergelijking volledig beschreven.

Oplossingsrecept voor derdegraadsvergelijkingen:

1. Schrijf de vergelijking in de vorm

$$z^3 - 3a_1 z^2 + 3a_2 z - a_3 = 0$$

2. Controleer of er meervoudige wortels zijn. Zo ja, los de vergelijking dan op met behulp van de afgeleide.

3. Controleer of $a_2 - a_1^2 = 0$. Zo ja, los de vergelijking dan op via 'derdemachtafsplitsen'.

4. Bepaal de wortels h_1 en h_2 van de vierkantsvergelijking

$$(a_2 - a_1^2)h^2 - (a_3 - a_1 a_2)h + (a_1 a_3 - a_2^2) = 0$$

5. Bereken de derdemachtswortels r_1, r_2, r_2 van het getal $R = \dfrac{h_1 - a_1}{h_2 - a_1}$.

6. De oplossingen zijn nu

$$z_k = \frac{h_1 - h_2 r_k}{1 - r_k} \quad (k = 1, 2, 3).$$

De rol van de discriminant $D = B^2 - 4AC$

$$
\begin{aligned}
D &= (a_3 - a_1 a_2)^2 - 4(a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) \quad (5)\\
&= (pq)^2 (h_1 - h_2)^6 \quad (6)\\
&= -\frac{1}{27}(z_1 - z_2)^2 (z_2 - z_3)^2 (z_3 - z_1)^2 \quad (7)
\end{aligned}
$$

De afleiding van (7) uit (5) is gemakkelijk na te gaan met computeralgebra. Gebruik dat $3a_1 = z_1 + z_2 + z_3$, $3a_2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$, $a_3 = z_1 z_2 z_3$.

Hieruit blijkt: meervoudige wortel d.e.s.d. als $D = 0$.

Hiermee kan stap (2) in het recept worden kortgesloten.

De rol van de discriminant $D = B^2 - 4AC$

$$\begin{aligned} D &= (a_3 - a_1a_2)^2 - 4(a_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2) && (5) \\ &= (pq)^2(h_1 - h_2)^6 && (6) \\ &= -\frac{1}{27}(z_1 - z_2)^2(z_2 - z_3)^2(z_3 - z_1)^2 && (7) \end{aligned}$$

De afleiding van (7) uit (5) is gemakkelijk na te gaan met computeralgebra. Gebruik dat $3a_1 = z_1 + z_2 + z_3$, $3a_2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$, $a_3 = z_1z_2z_3$.

Hieruit blijkt: meervoudige wortel d.e.s.d. als $D = 0$.

Hiermee kan stap (2) in het recept worden kortgesloten.

Verder geldt bij *reële* derdegraadsvergelijkingen (d.w.z. a_1, a_2, a_3 reëel):

- als $D > 0$ dan h_1 en h_2 reëel en twee van de z_k toegevoegd complex
- als $D < 0$ dan h_1 en h_2 toegevoegd complex en alle z_k reëel

De rol van de discriminant $D = B^2 - 4AC$

$$\begin{aligned} D &= (a_3 - a_1 a_2)^2 - 4(a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) && (5)\\ &= (pq)^2 (h_1 - h_2)^6 && (6)\\ &= -\frac{1}{27}(z_1 - z_2)^2 (z_2 - z_3)^2 (z_3 - z_1)^2 && (7) \end{aligned}$$

De afleiding van (7) uit (5) is gemakkelijk na te gaan met computeralgebra. Gebruik dat $3a_1 = z_1 + z_2 + z_3$, $3a_2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$, $a_3 = z_1 z_2 z_3$.

Hieruit blijkt: meervoudige wortel d.e.s.d. als $D = 0$.

Hiermee kan stap (2) in het recept worden kortgesloten.

Verder geldt bij *reële* derdegraadsvergelijkingen (d.w.z. a_1, a_2, a_3 reëel):

- als $D > 0$ dan h_1 en h_2 reëel en twee van de z_k toegevoegd complex
- als $D < 0$ dan h_1 en h_2 toegevoegd complex en alle z_k reëel

Bewijs dit zelf!

In deze observaties ligt de oorsprong van de complexe getallen (Italië, begin zestiende eeuw)!

Voorbeeld:

$$z^3 - 3z^2 - z + 3 = 0$$

dus $a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{3}, \quad a_3 = -3$ en
$A = a_2 - a_1^2 = -\frac{4}{3}, \quad B = a_3 - a_1 a_2 = -\frac{8}{3}, \quad C = a_1 a_3 - a_2^2 = -\frac{28}{9}$

De vierkantsvergelijking kan worden vereenvoudigd tot $3h^2 - 6h + 7 = 0$
met als oplossingen $h_{1,2} = 1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

Voorbeeld:

$$z^3 - 3z^2 - z + 3 = 0$$

dus $a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{3}, \quad a_3 = -3$ en
$A = a_2 - a_1^2 = -\frac{4}{3}, \quad B = a_3 - a_1 a_2 = -\frac{8}{3}, \quad C = a_1 a_3 - a_2^2 = -\frac{28}{9}$

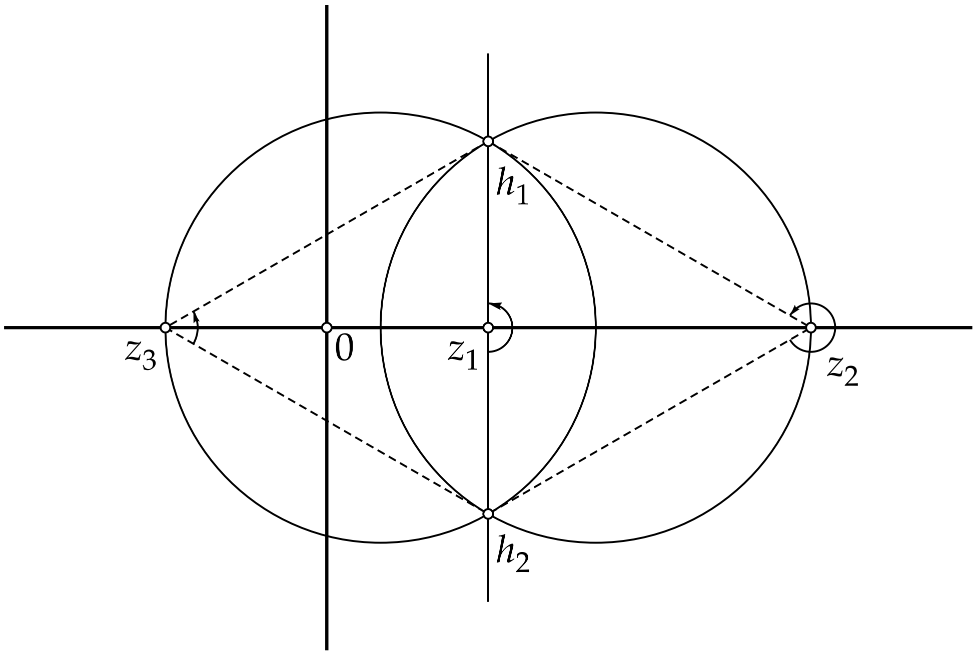
De vierkantsvergelijking kan worden vereenvoudigd tot $3h^2 - 6h + 7 = 0$ met als oplossingen $h_{1,2} = 1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

Hieruit volgt $R = \frac{h_1 - a_1}{h_2 - a_1} = -1$ zodat

$r_1 = -1, \quad r_2 = \mathrm{e}^{-\pi\,\mathrm{i}\,/3}, \quad r_3 = \mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}\,/3}$ en

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{h_1 - h_2 r_1}{1 - r_1} = 1 \\ z_2 &= \frac{h_1 - h_2 r_2}{1 - r_2} = 3 \\ z_3 &= \frac{h_1 - h_2 r_3}{1 - r_3} = -1 \end{aligned}$$

$$z^3 - 3z^2 - z + 3 = 0$$



$$h_{1,2} = 1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

$$z_1 = 1,\ z_2 = 3,\ z_3 = -1$$

Voorbeeld:

$$z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0$$

dus $a_1 = -\frac{2}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = -2$ en
$A = a_2 - a_1^2 = -\frac{1}{9}, \quad B = a_3 - a_1 a_2 = -\frac{16}{9}, \quad C = a_1 a_3 - a_2^2 = \frac{11}{9}$

$$h^2 - 16h - 11 = 0$$

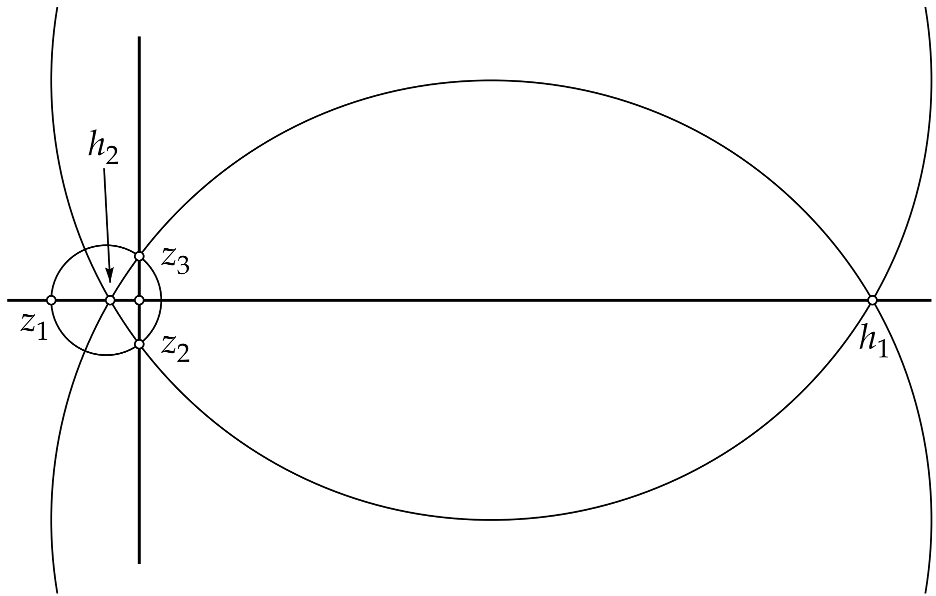
met als oplossingen $h_{1,2} = 8 \pm 5\sqrt{3}$. Hieruit volgt

$$R = \frac{h_1 - a_1}{h_2 - a_1} = \frac{26 - 15\sqrt{3}}{26 + 15\sqrt{3}} = 1351 - 780\sqrt{3} \quad (\approx 0.000370)$$

zodat (met dank aan Maple)

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{h_1 - h_2 r_1}{1 - r_1} = -2 \\ z_2 &= \frac{h_1 - h_2 r_2}{1 - r_2} = -\,\mathrm{i} \\ z_3 &= \frac{h_1 - h_2 r_3}{1 - r_3} = \mathrm{i} \end{aligned}$$

$$z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0$$

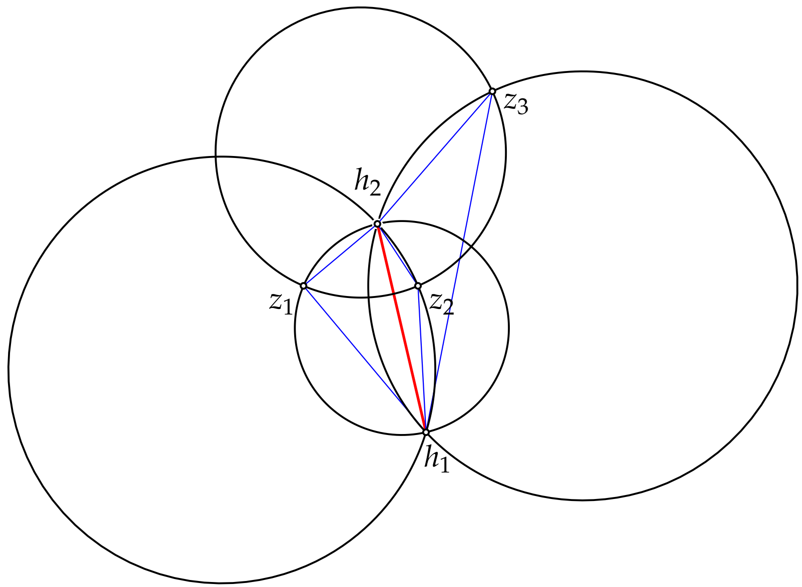


$$h_{1,2} = 8 \pm 5\sqrt{3}$$

$$z_1 = -2,\ z_2 = -\mathrm{i},\ z_3 = \mathrm{i}$$

Voorbeeld:

$$z^3 - (2.3 + 3.4\,\mathrm{i}\,)z^2 - z + (2.3 + 3.4\,\mathrm{i}\,) = 0$$

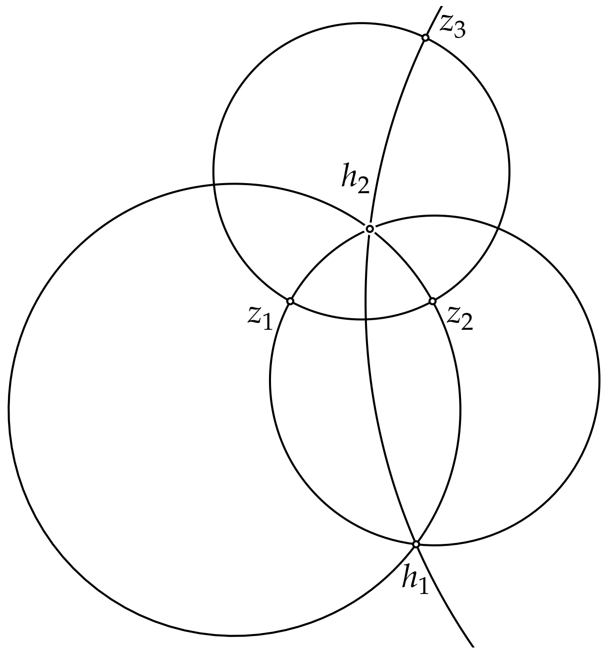


$$h_1 \approx 1.139734626 - 2.558580999\,\mathrm{i} \text{ en } h_2 \approx 0.2908819995 + 1.082998113\,\mathrm{i}$$

$$z_1 = -1,\ z_2 = 1,\ z_3 = 2.3 + 3.4\,\mathrm{i}$$

Voorbeeld:

$$z^3 - (0.9 + 3.7\,\mathrm{i}\,)z^2 - z + (0.9 + 3.7\,\mathrm{i}\,) = 0$$



$$h_1 \approx 0.7687668752 - 3.413044312\,\mathrm{i} \text{ en } h_2 \approx 0.1187445689 + 1.015354660\,\mathrm{i}$$

$$z_1 = -1,\ z_2 = 1,\ z_3 = 0.9 + 3.7\,\mathrm{i}$$

Meer details in het 'internetboek'

Jan van de Craats: *Complexe getallen voor wiskunde D*, toegiften T3, T4 en T6 (zie pp. 71–92).

Het is als pdf-file beschikbaar op mijn homepage:

`www.science.uva.nl/~craats`