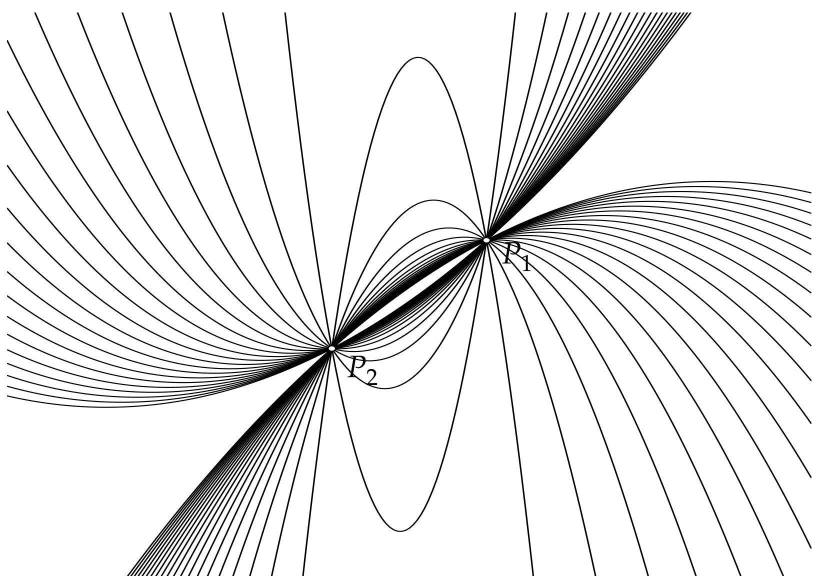
Parabolenparade

Jos de Wit en Jan van de Craats

De grafiek van een kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ is een parabool met een verticale symmetrie-as. De constanten a, b en c liggen vast zodra je in drie verschillende punten x_1, x_2 en x_3 de functiewaarden $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ en $f(x_3) = y_3$ geeft: je kunt a, b en c dan oplossen uit het stelsel van drie vergelijkingen $ax_i^2 + bx_i + c = y_i$ ($i = 1, 2, 3$).

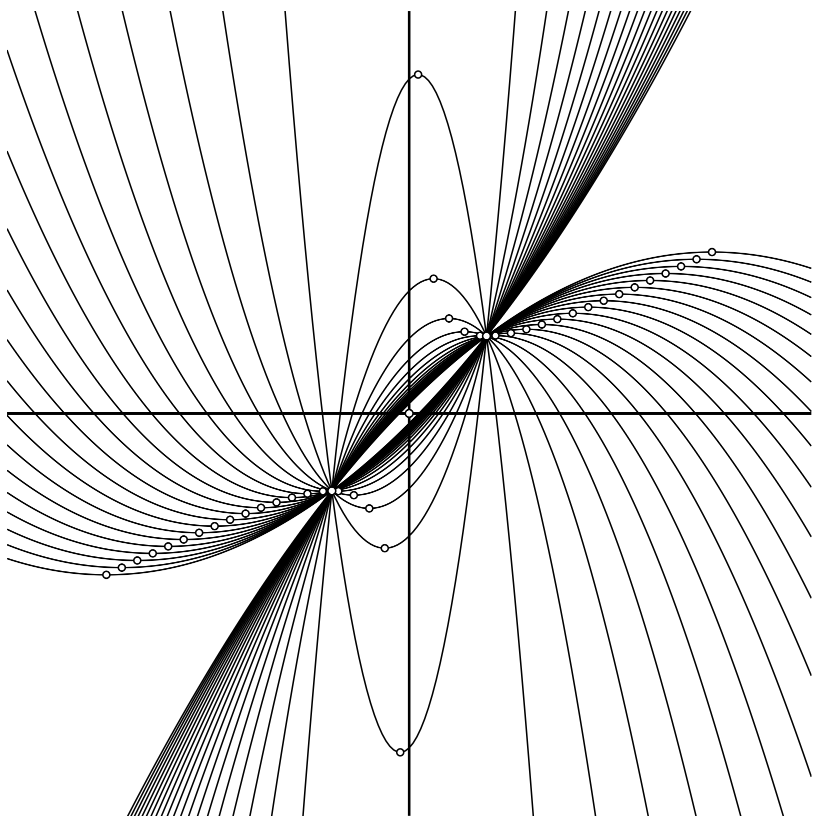
Schrijf je slechts twee functiewaarden $f(x_1) = y_1$ en $f(x_2) = y_2$ voor, dan zijn er oneindig veel kwadratische functies $f(x)$ die voldoen. In meetkundige termen: er zijn dan oneindig veel parabolen met een verticale as waarvan de grafiek door de punten $P_1 = (x_1, y_1)$ en $P_2 = (x_2, y_2)$ gaat. Figuur 1 geeft een impressie.



Figuur 1. Parabolen door twee punten.

Als de twee gegeven punten op dezelfde hoogte liggen, dus als $y_1 = y_2$, dan is het plaatje niet erg interessant: alle toppen van de parabolen liggen netjes onder elkaar op de middelloodlijn van P_1P_2. Maar als dat niet het geval is, zoals in figuur 1, dan liggen die toppen niet zo netjes. In elk geval liggen ze niet op een rechte lijn. Hoe dan wel? Dat gaan we uitzoeken; alles wat daarvoor nodig is, is vwo-stof wiskunde B.

We gaan dus uit van twee punten P_1 en P_2 in het vlak, niet op één verticale of één horizontale lijn, en proberen de verzameling te bepalen van alle toppen van parabolen met een verticale as die door P_1 en P_2 gaan. Omdat daarbij wat rekenwerk te pas zal komen, kiezen we het coördinatenstelsel zo handig mogelijk. Om te beginnen nemen we het midden van het lijnstuk P_1P_2 als oorsprong. Verder passen we de schaalverdelingen op de x-as en de y-as zó aan, dat de coördinaten van P_1 en P_2 gegeven worden door respectievelijk $(1, 1)$ en $(-1, -1)$. Zie figuur 2, waarin ook de toppen van de parabolen zijn aangegeven.



Figuur 2. Parabolen met toppen in het aangepaste coördinatenstelsel.

Als zo'n parabool de grafiek is van de kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ dan moet, omdat $(1, 1)$ en $(-1, -1)$ op de parabool liggen, gelden dat

$$a + b + c = 1$$

en

$$a - b + c = -1.$$

Optellen van de beide vergelijkingen geeft $2a + 2c = 0$, dus $c = -a$.
Aftrekken van de beide vergelijkingen geeft $2b = 2$, dus $b = 1$.
Zo'n parabool wordt dus gegeven door de vergelijking

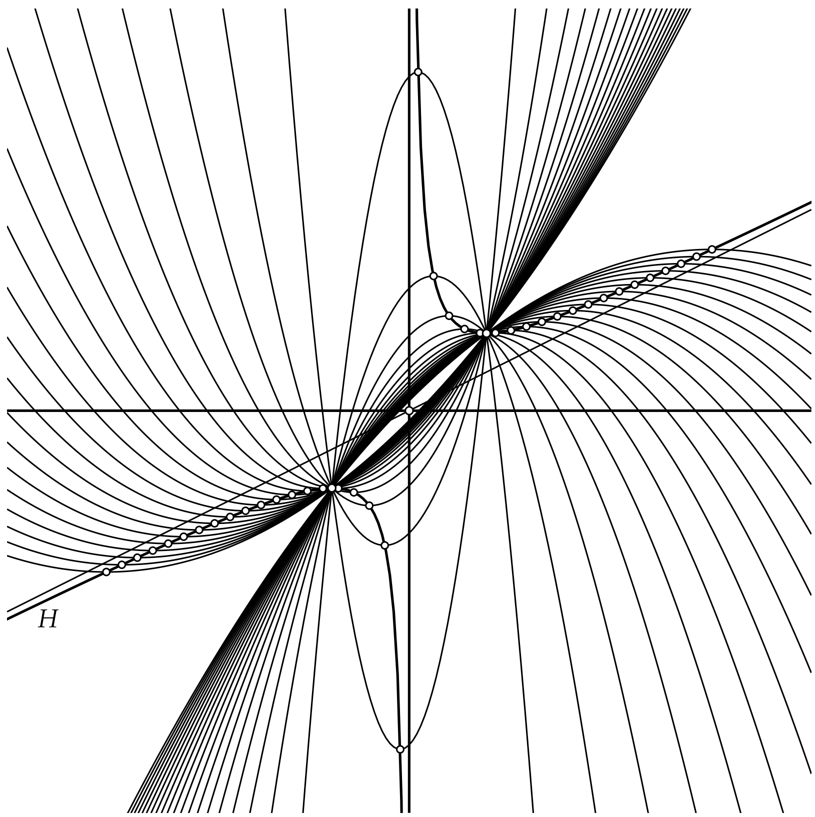
$$y = ax^2 + x - a.$$

Voor de x-waarde x_t van de top vinden we via kwadraatafsplitsen of door te differentiëren

$$x_t = -1/(2a)$$

en dan is de y-waarde y_t dus gelijk aan

$$y_t = -1/(4a) - a.$$



Figuur 3. Parabolen met toppen, de hyperbool H en de scheve asymptoot.

Met a als parameter geeft dit een parametervoorstelling voor de kromme H die alle toppen bevat. Als we nu x en y schrijven in plaats van x_t en y_t, kunnen we de parameter a elimineren en op die manier een vergelijking in x en y krijgen voor H. Dat gaat als volgt: omdat $x = -1/(2a)$ is, geldt $a = -1/(2x)$, dus

$$y = -1/(4a) - a = (x/2) + 1/(2x).$$

Deze kromme H heeft de y-as als verticale asymptoot en de lijn $y = x/2$ als scheve asymptoot. Verder gaat H door de punten $P_1 = (1, 1)$ en $P_2 = (-1, -1)$ voor respectievelijk de parameterwaarden $a = -1/2$ en $a = 1/2$. Dat zijn tevens de punten waar H een horizontale raaklijn heeft. In figuur 3 zijn de parabolen met hun toppen, de kromme H en de scheve asymptoot getekend. Er kan nog worden opgemerkt dat H een kegelsnede is. Dat zie je direct als je de vergelijking voor H schrijft als

$$H: \quad 2xy - x^2 = 1.$$

Omdat H twee asymptoten heeft, is het een hyperbool. De asymptoten vormen de oplossingsverzameling van de vergelijking

$$2xy - x^2 = 0.$$

Naschrift: door de speciale keuze van het coördinatenstelsel konden we het rekenwerk sterk beperken. Zouden we direct in coördinaten zijn gaan rekenen met bijvoorbeeld $P_1 = (p_1, q_1)$ en $P_2 = (p_2, q_2)$, dan zouden we heel wat meer moeite met onze formules hebben gehad. De les is dus: éérst nadenken, vereenvoudigen, symmetrie zoeken, variabelen geschikt schalen, voordat je met het eigenlijke werk begint. Meetkunde met coördinaten is prachtig maar, zoals altijd: bezint eer gij begint te rekenen!

Ir. Jos de Wit (josdewit47@gmail.com) was tijdens zijn studie civiele techniek aan de TU Delft ook docent wiskunde aan een mavo in Rotterdam. Na zijn afstuderen werkte hij enige jaren bij een aannemersbedrijf in het buitenland. Daarna volgde een periode als universitair docent mechanica aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda, waar hij heeft samengewerkt met de tweede auteur van dit artikel.

Prof. dr. Jan van de Craats (J.vandeCraats@uva.nl) is emeritus hoogleraar wiskunde aan de KMA te Breda en de Universiteit van Amsterdam.