

De kern van de wiskunde

auteur: Jan van de Craats

versie 14 april 2009

Dit document geeft een systematische inventarisatie van onderdelen van de wiskunde die op de basisschool, het vmbo, het havo en het vwo bij de vakken rekenen en wiskunde behandeld dienen te worden. Het beperkt zich tot die onderdelen die relevant zijn voor de doorstroming naar mbo, hbo en universiteit. Natuurlijk zijn niet alle in dit document genoemde onderdelen voor alle vormen van voortgezet en hoger onderwijs van belang; de basis is gemeenschappelijk, maar in vmbo, havo en vwo zullen de verschillende onderwijstypes en -profielen verschillende keuzes maken.

De opbouw van het document maakt het mogelijk doorlopende leerlijnen te identificeren. De wiskunde is immers bij uitstek een cumulatief vak, waarbij latere stof voortbouwt op eerder behandelde onderwerpen. Het is daarnaast ook mogelijk om aan de hand van dit document aan te geven welke onderdelen beheerst moeten worden aan het einde van de basisschool en aan het einde van het vmbo of aan het einde van de onderbouw van havo of vwo. Het document kan verder als leidraad dienen bij een beschrijving van de kernonderdelen in de verschillende wiskundevakken van de bovenbouw havo en vwo die als verplichte profielvakken zijn aangemerkt (wiskunde A, B of C).

Het document is verdeeld in twee delen. Deel I: *Domeinbeschrijvingen*, geeft een verdeling van de stof in achttien nader omschreven domeinen. In deel II: *Kerdoelen*, worden aan de hand van de domeinen van deel I de kerndoelen omschreven die bereikt moeten zijn aan het einde van de basisschool, aan het einde van het vmbo en aan het einde van de onderbouw van havo, respectievelijk vwo. Daarna worden ook de gewenste eindniveaus van de vakken wiskunde A en B van het havo en wiskunde A, B en C van het vwo in termen van de domeinen en subdomeinen van deel I uitgedrukt. Deze omschrijvingen zijn in lijn met de besluiten die de staatssecretaris op 8 april 2008 bekend heeft gemaakt omtrent de voorgenomen pilotstudies voor de examenprogramma's havo en vwo voor 2013/2014 en later.

Dit document spreekt zich niet uit over de volgorde waarin de verschillende onderdelen of subonderdelen in de verschillende programma's behandeld kunnen worden, noch spreekt het zich uit over andere didactische kwesties en evenmin over toepassingen van de wiskunde in andere vakken op vmbo-, havo- of vwo-niveau. Het spreekt vanzelf dat er aan zulke toepassingen in de schoolwiskunde aandacht moet worden besteed. En daarnaast moet er ruimte zijn voor keuzeonderwerpen vanuit toepassingen of vanuit de wiskunde zelf. Er is op dat gebied een overvloed aan goed lesmateriaal beschikbaar, bijvoorbeeld in de serie 'zebraboekjes' van Epsilon Uitgaven.

I. Domeinbeschrijvingen

1. Rekenen I

In dit domein wordt uitsluitend gerekend met niet-negatieve getallen.

- (a) Gehele getallen
 - i. Optellen, aftrekken
 - ii. Vermenigvuldigen, delen met rest
- (b) Kommagetallen ('decimale breuken')
 - i. Gehele getallen en kommagetallen op de getallenlijn
 - ii. Optellen, aftrekken
 - iii. Afronden
 - iv. Vermenigvuldigen, afronden van het product op een vooraf gegeven aantal decimalen (cijfers achter de komma)
 - v. Delen, afronden van het quotiënt op een vooraf gegeven aantal decimalen
- (c) Toepassingen
 - i. Lengtematen, oppervlaktematen, inhoudsmaten, gewichten
 - ii. Oppervlakte rechthoek, inhoud rechthoekig blok
 - iii. Tijd en snelheid, omrekenen km/u naar m/s en omgekeerd (met een rekenmachine)
 - iv. Het omgekeerde van een getal: *delen door een getal is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde getal*
 - v. Omrekenen van valutakoersen (met een rekenmachine)
 - vi. Rekenen met procenten
- (d) Breuken
 - i. Teller, noemer, breuken vereenvoudigen
 - ii. Breuken op de getallenlijn
 - iii. Breuken gelijknamig maken, optellen en aftrekken
 - iv. De ggd en het kgv in verband met het vereenvoudigen, optellen en aftrekken van breuken
 - v. Vermenigvuldigen en delen van breuken
 - vi. Gewone breuken schrijven als gemengde breuk en omgekeerd (bijvoorbeeld $\frac{29}{8} = 3\frac{5}{8}$)
 - vii. Kommagetallen als breuken
 - viii. Verhoudingen en breuken
 - ix. Procenten en breuken
 - x. Omzetten van breuken in (afgeronde) kommagetallen met een rekenmachine of via een deling met pen en papier

Toelichting: leerlingen beheersen voor alle rekenbewerkingen efficiënte pen- en papiermethodes (standaardprocedures) die niet afhankelijk zijn van de grootte van de getallen.

2. Meetkunde I

Vlakke meetkunde. Eerste verkenningen; voornamelijk een kennismaking met terminologie en de eenvoudigste eigenschappen van meetkundige figuren in het vlak. In eenvoudige gevallen de samenhang tussen meetkundige eigenschappen via redeneren duidelijk maken, maar geen axiomatische opbouw!

- (a) Lijnen, driehoeken en vierhoeken
 - i. Lijnen in het vlak, snijdende lijnen, evenwijdige lijnen
 - ii. Hoeken (gemeten in graden), scherpe hoek, rechte hoek, stompe hoek, gestrekte hoek, inspringende hoek
 - iii. Driehoeken (hoekpunten, zijden), bijzondere driehoeken (gelijkbenig, scherphoekig, rechthoekig, stomphoekig), hoekensom
 - iv. Vierhoeken, hoekensom, bijzondere vierhoeken (vierkant, rechthoek, ruit, parallellogram, trapezium), oppervlakte rechthoek, parallellogram en driehoek
- (b) Schaling, gelijkvormigheid, effect van schaling op oppervlakte
- (c) Zwaartelijnen in een driehoek, zwaartepunt
- (d) Stelling van Pythagoras (via oppervlakte van vierkanten en een 'leg-puzzelbewijs')
- (e) Cirkels: middelpunt, straal, koorde, raaklijn, omtrek, oppervlakte
- (f) Ingeschreven en omgeschreven cirkels van een driehoek. In verband hiermee: deellijnen (bissectrices) en middelloodlijnen van een driehoek
- (g) Regelmatige veelhoeken, in- en omgeschreven cirkels van regelmatige veelhoeken
- (h) Symmetrie: lijnsymmetrie, puntsymmetrie, rotatiesymmetrie

3. Rekenen II

- (a) Negatieve getallen
 - i. Optellen, aftrekken
 - ii. Vermenigvuldigen, delen
 - iii. Gehele getallen, kommagetallen en breuken op de naar twee kanten doorlopende getallenlijn
- (b) Machtsverheffen
 - i. Positieve gehele exponent, rekenregels voor vermenigvuldigen en delen
 - ii. Exponent nul, negatieve gehele exponent, rekenregels
 - iii. Toepassing: getallen in drijvende-kommanotatie (wetenschappelijke notatie)
- (c) Ontbinden in factoren, priemgetallen
 - i. Ontbinden van positieve gehele getallen in factoren
 - ii. Priemgetallen, ggd en kgv in termen van priemontbindingen
 - iii. Deelbaarheidskenmerken (deelbaarheid door 2, 3, 4, 5 en 9)

- (d) Wortels
 - i. Wortels van natuurlijke getallen, standaardvorm
 - ii. Wortels van positieve breuken, standaardvorm
 - iii. Hogeremachtswortels, standaardvorm
 - iv. Wortels als gebroken machten,
 - v. Rekenregels
 - vi. Wortels als irrationale getallen

4. Algebra I

- (a) Rekenen met letters
 - i. Prioriteitsregels
 - ii. Haakjes uitwerken en buiten haakjes brengen
 - iii. De formule $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- (b) Merkwaardige producten
 - i. Het kwadraat van een som of een verschil
 - ii. Het verschil van twee kwadraten
- (c) Breuken met letters
 - i. Splitsen en onder één noemer brengen
 - ii. Breuken vereenvoudigen

5. Algebra II

- (a) Eerstegraadsvergelijkingen en -ongelijkheden
 - i. Algemene oplossingsregels voor vergelijkingen
 - ii. Eerstegraadsvergelijkingen oplossen
 - iii. Algemene oplossingsregels voor ongelijkheden
 - iv. Eerstegraadsongelijkheden oplossen
- (b) Tweedegraadsvergelijkingen
 - i. Kwadraatafsplitsen
 - ii. De abc -formule
- (c) Stelsels eerstegraadsvergelijkingen
 - i. Twee vergelijkingen met twee onbekenden
 - ii. Drie vergelijkingen met drie onbekenden

6. Meetkunde II

Ruimtmeetkunde. Eerste verkenningen; voornamelijk een kennismaking met terminologie en de eenvoudigste eigenschappen van meetkundige figuren in de ruimte.

- (a) Lijnen, vlakken en veelvlakken
 - i. Eenvoudige veelvlakken: kubus, rechthoekig blok, piramide, prisma. Hoekpunten, ribben, zijvlakken
 - ii. Lijnen en vlakken, evenwijdigheid, snijlijn van twee vlakken, snijpunt van een lijn en een vlak, drievlakkenstelling

- iii. Inhoud blok, piramide, prisma
- (b) Stelling van Pythagoras in de ruimte
- (c) Bollen: middelpunt, straal, raakvlak, snijfiguur vlak en bol, grote cirkels op de bol (ook als kortste-afstandslijnen), formules voor oppervlakte en inhoud
- (d) Schaling, gelijkvormigheid, effect van schaling op inhoud

7. Combinatoriek

- (a) Systematisch tellen, permutaties, faculteiten
- (b) Binomiaalcoëfficiënten en de driehoek van Pascal
- (c) Het binomium van Newton, gebruik van het sommatieteken

8. Getallenrijen en limieten

- (a) Getallenrijen
 - i. Eindige en oneindige getallenrijen
 - ii. De rekenkundige rij, somformule
- (b) Limieten
 - i. De meetkundige rij, beginterm, reden (ratio), limietwaarde
 - ii. Somformules eindige en oneindige meetkundige rij
 - iii. De limiet van een getallenrij in het algemeen, convergentie en divergentie

9. Functies

- (a) Functie als *black box* (input-outputmodel), domein, bereik (waardenverzameling)
- (b) Grafieken van functies, nulpunten, maxima, minima, stijgen, dalen
- (c) Machtsfuncties met positieve gehele macht, wortelfuncties, de absolute-waardefunctie
- (d) Machtsfuncties met negatieve gehele macht, asymptoten
- (e) Polynoomfuncties, rationale functies

10. Goniometrische functies

- (a) Hoekmeting in radialen
- (b) Sinus, cosinus en tangens
- (c) Sinusregel en cosinusregel in een driehoek
- (d) $\cos \varphi$ en $\sin \varphi$ als x - en y -coördinaat van een punt op de eenheidscirkel met argument φ .
- (e) De functies $\sin x$, $\cos x$ en $\tan x$ voor reële x -waarden en hun grafieken, periodiciteit van deze functies.
- (f) Optelformules en dubbele-hoekformules
- (g) De standaardlimiet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

11. Meetkunde III

Meetkunde met coördinaten in het vlak en in de ruimte.

- (a) Vlakke meetkunde met coördinaten
 - i. Cartesische coördinatenstelsels, coördinaten van een punt
 - ii. De vergelijking van een lijn
 - iii. De vergelijking van een lijn door twee punten
 - iv. Het snijpunt van twee lijnen, verband met oplossen stelsel van twee eerstegraadsvergelijkingen met twee onbekenden
- (b) Afstanden en normaalvectoren
 - i. Afstand en middelloodlijn
 - ii. Normaalvector van een lijn
 - iii. Loodrechte stand
- (c) Cirkels
 - i. De vergelijking van een cirkel
 - ii. De snijpunten van een cirkel en een lijn
 - iii. De vergelijking van de raaklijn in een punt van de cirkel
- (d) Coördinatenstelsels in de ruimte
 - i. Cartesische coördinatenstelsels in de ruimte, coördinaten van een punt, afstand van twee punten
 - ii. Vergelijking van een vlak, normaalvector
 - iii. Evenwijdige en elkaar snijdende vlakken
 - iv. Drievlakkenstelling, verband met het oplossen van drie eerstegraadsvergelijkingen met drie onbekenden.
 - v. De vergelijking van een bol
 - vi. De vergelijking van het raakvlak in een punt van de bol

12. Exponentiële en logaritmische functies

- (a) Exponentiële functies
 - i. Grafieken, domein, bereik
 - ii. Eigenschappen
 - iii. De standaardlimiet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$ als $a > 0$.
- (b) Logaritmische functies
 - i. Grafieken, domein, bereik
 - ii. Verband tussen exponentiële en logaritmische functies
 - iii. Eigenschappen van logaritmen
 - iv. De standaardlimiet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{{}^a \log x}{x^q} = 0$ als $a > 1$ en $q > 0$.
- (c) De functies e^x en $\ln x$
 - i. Het getal e en de functie e^x
 - ii. De standaardlimiet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
 - iii. De functie $\ln x$, het verband met de functie e^x
 - iv. De standaardlimiet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

13. Geparametriseerde krommen in het vlak en in de ruimte

- (a) Geparametriseerde krommen in het vlak
 - i. Parametrisaties van een cirkel
 - ii. Algemene geparametriseerde vlakke krommen
 - iii. Krommen in poolcoördinaten
- (b) Geparametriseerde krommen in de ruimte

14. Differentiaalrekening

- (a) Raaklijn en afgeleide
- (b) Differentieerbaarheid van een functie in een punt van zijn domein
- (c) Differentieerbare functies: eenvoudige rekenregels
- (d) Productregel, quotiëntregel, kettingregel
- (e) Standaardafgeleiden
- (f) Hogere afgeleiden
- (g) Stijgen, dalen en het teken van de afgeleide
- (h) Extreme waarden
- (i) Stationaire punten en buigpunten

15. Integraalrekening

- (a) Oppervlakte en primitieve functie
- (b) De hoofdstelling van de integraalrekening
- (c) Eenvoudige rekenregels
- (d) Standaardintegralen
- (e) Oneigenlijke integralen

16. Toepassingen van de differentiaal- en integraalrekening

- (a) De raakvector aan een geparametriseerde kromme
- (b) De lengte van een kromme
- (c) De inhoud van een omwentelingslichaam
- (d) De oppervlakte van een omwentelingsoppervlak
- (e) Exponentiële groei
- (f) Logistische groei

17. Kansrekening

- (a) Kans en toeval
 - i. Toevalsexperimenten, uitkomst, gebeurtenis
 - ii. Kansmodellen: zuivere munt, zuivere dobbelsteen, vaasmodel, trekken met of zonder terugleggen
 - iii. Voorwaardelijke kansen
 - iv. Somregel, complementregel, productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen

- (b) Speciale discrete toevalsvariabelen
 - i. Toevalsvariabelen, kansverdeling
 - ii. Uniforme verdeling
 - iii. Bernoulli-verdeling
 - iv. Binomiale verdeling
 - v. Verwachting, standaardafwijking
- (c) Speciale continue toevalsvariabelen
 - i. Continue toevalsvariabelen, kansdichtheidsfunctie, cumulatieve verdelingsfunctie
 - ii. Uniforme verdeling
 - iii. Normale verdeling
 - iv. Verwachting, standaardafwijking
 - v. Centrale limietstelling, \sqrt{n} -wetten

18. Statistiek

- (a) Beschrijvende statistiek
 - i. Populatie, steekproef, aseletheid
 - ii. Frequentietabel, klassenverdelingen
 - iii. Grafische representatievormen voor statistische gegevens
 - iv. Centrummaten: gemiddelde, modus, mediaan
 - v. Spreidingsmaten: spreidingsbreedte, standaardafwijking, kwartielfstanden
- (b) Het toetsen van hypothesen
 - i. Nulhypothese, alternatieve hypothese
 - ii. Eenzijdige en tweezijdige toetsen, significantieniveau
 - iii. Toetsen van hypothesen omtrent verwachtingswaarden bij binomiaal verdeelde en normaal verdeelde toevalsvariabelen.

II. Kerndoelen

In dit deel wordt steeds verwezen naar de secties en deelsecties in het voorgaande deel I: *Domeinbeschrijvingen*.

Kerndoelen primair onderwijs

Aan het einde van het primair onderwijs beheersen de leerlingen de stof van Rekenen I. Daarnaast hebben zij op een informele manier kennisgemaakt met eigenschappen van eenvoudige meetkundige figuren in twee en drie dimensies.

Kerndoelen eindniveau vmbo

Aan het einde van het vmbo (vier leerjaren) beheersen de leerlingen de stof van

- Rekenen I
- Rekenen II (a) en (b)
- Meetkunde I
- Algebra I
- Algebra II (a)
- Meetkunde II
- Functies (a) en (b)
- Combinatoriek (a)

Kerndoelen onderbouw havo

Aan het einde van de onderbouw havo (drie leerjaren) beheersen de leerlingen de stof van

- Rekenen I
- Rekenen II
- Meetkunde I
- Algebra I
- Algebra II (a) en (b)
- Meetkunde II
- Functies (a), (b), (c)
- Combinatoriek (a) en (b)

Kerdoelen onderbouw vwo

Aan het einde van de onderbouw vwo (drie leerjaren) beheersen de leerlingen de stof van

- Rekenen I
- Rekenen II
- Meetkunde I
- Algebra I
- Algebra II
- Meetkunde II
- Functies
- Combinatoriek

Kerdoelen eindniveau havo wiskunde A

De leerlingen beheersen de stof van

- Rekenen I
- Rekenen II
- Algebra I
- Algebra II (a) en (b)
- Meetkunde I
- Meetkunde II
- Functies (a), (b), (c)
- Exponentiële functies en logaritmen (a)
- Combinatoriek
- Kansrekening (a) en (b)
- Statistiek (a)

Kerdoelen eindniveau havo wiskunde B

De leerlingen beheersen de stof van

- Rekenen I
- Rekenen II
- Algebra I
- Algebra II
- Meetkunde I
- Meetkunde II
- Meetkunde III (a), (b) en (c)
- Combinatoriek (a) en (b)
- Functies
- Goniometrische functies
- Exponentiële functies en logaritmen (a) en (b)
- Differentiaalrekening

Kerdoelen eindniveau vwo wiskunde A

De leerlingen beheersen de stof van

- Rekenen I
- Rekenen II
- Algebra I
- Algebra II
- Meetkunde I
- Meetkunde II
- Combinatoriek
- Getallenrijen en limieten
- Functies
- Goniometrische functies
- Exponentiële functies en logaritmen
- Differentiaalrekening
- Kansrekening
- Statistiek

Kerdoelen eindniveau vwo wiskunde B

De leerlingen beheersen de stof van

- Rekenen I
- Rekenen II
- Algebra I
- Algebra II
- Meetkunde I
- Meetkunde II
- Meetkunde III
- Combinatoriek
- Functies
- Goniometrische functies
- Exponentiële functies en logaritmen
- Geparametriseerde krommen in het vlak en in de ruimte
- Differentiaalrekening
- Integraalrekening
- Toepassingen van de differentiaal- en integraalrekening

Kerdoelen eindniveau vwo wiskunde C

De leerlingen beheersen de stof van

- Rekenen I
- Rekenen II
- Algebra I
- Algebra II
- Meetkunde I
- Meetkunde II
- Combinatoriek
- Functies (a), (b) en (c)
- Kansrekening (a) en (b)
- Statistiek (a)