Een miljoen dollar voor een bewijs

Jan van de Craats

16 juni 2005

Algemeen wordt het *Vermoeden van Riemann* gezien als het belangrijkste open probleem van de moderne wiskunde. Het luidt als volgt:

> *'Alle niet-triviale nulpunten van de zetafunctie van Riemann liggen op de kritische lijn.'*

Wat deze raadselachtige bewering precies betekent, zullen we nu nog niet uitleggen, maar feit is wel dat je de wiskunde een geweldige stap vooruit helpt als je dat vermoeden bewijst (of bewijst dat het *niet* waar is!). Bovendien verdien je dan een prijs van niet minder dan één miljoen dollar! Dat bedrag is uitgeloofd door het Clay Mathematical Institute uit Cambridge, Massachusetts, USA.

Het is niet het enige open probleem waar dat Instituut, dat in 1999 opgericht werd door zakenman en wetenschapsweldoener Landon T. Clay, een miljoen dollar voor uitlooft. Er zijn er nog zes: het *Vermoeden van Poincaré*, het *P versus NP probleem*, het *Vermoeden van Birch en Swinnerton-Dyer*, het *Vermoeden van Hodge*, de *Mass Gap Hypothesis* in de *Yang-Mills theorie*, en de *Oplossing van de Navier-Stokes vergelijkingen*. Een internationaal comité van gerenommeerde wiskundigen heeft die zeven problemen uitgekozen als de zeven belangrijkste open onderzoeksvragen van de huidige wiskunde. Ze werden gelanceerd tijdens een plechtige bijeenkomst in het *Collège de France* in Parijs op 24 mei 2000, en staan sindsdien bekend als de *millennium problems*.

Als je zo'n *millennium problem* oplost, strijk je een mooi bedrag op, maar belangrijker is natuurlijk de eeuwige roem die je ermee verwerft, en het feit dat je bewijs waarschijnlijk een enorme stimulans zal betekenen voor de gehele wiskunde. Die zeven problemen zijn namelijk geen losstaande puzzels, maar centrale vraagstukken die allemaal verbonden zijn met grote onderzoeksgebieden in de wiskunde. De knapste koppen hebben er hun tanden al op stukgebeten. Het Vermoeden van Riemann, bijvoorbeeld, dateert al van 1859 en is daarmee het oudste millenium probleem. De andere zes zijn van latere datum, maar allemaal hebben ze al een lange geschiedenis van vergeefse bewijspogingen achter zich.

Op zoek naar een bewijs

Haast elke wiskundestelling begint zijn leven als een vermoeden. De geschiedenis van de wiskunde is een geschiedenis van vermoedens en bewijzen. Een bewijs zet een wiskundige bewering om in een stelling, en pas na een bewijs weten we zeker dat die stelling waar is. Echter, het controleren van een bewijs kan lastig en tijdrovend zijn. Soms wordt daarbij toch nog een fout of een gat in de redenering ontdekt, en dan staat alles weer op losse schroeven: een bewijs met een gat erin is geen bewijs.

Dat ondervond ook Andrew Wiles, die in 1993 aankondigde dat hij het beroemde, meer dan 350 jaar oude *Vermoeden van Fermat* had bewezen. Bij controle werd echter geconstateerd dat er aan zijn bewijs toch nog een belangrijk detail ontbrak, en dat het dus in feite nog geen bewijs was. Een dramatisch jaar volgde waarin Wiles wanhopig probeerde het gat te dichten. Uiteindelijk slaagde hij daar met steun van zijn leerling Richard Taylor in, en in 1995 werd het volledige bewijs in de *Annals of Mathematics* gepubliceerd in de vorm van twee artikelen van samen 129 bladzijden. Het is zeer moeilijke, alleen voor experts leesbare wiskunde.

De stelling van Fermat (want het is nu dus echt een bewezen stelling) zegt dat er geen positieve gehele getallen a, b, en c zijn waarvoor geldt dat $a^n + b^n = c^n$ als n een geheel getal groter dan 2 is. Als vermoeden was het ook weer een voorbeeld van een centraal onderzoeksprobleem. Zouden de *millennium problems* al in 1990 ingesteld zijn, dan had het vermoeden van Fermat er zeker bijgestaan, en dan was Wiles nu dus miljonair geweest. Maar Wiles klaagt niet, want hij heeft intussen al heel wat andere prijzen voor zijn werk in de wacht gesleept. Natuurlijk maakte hij deel uit van het comité dat in 1999 de *millennium problems* gekozen heeft. En het oude vermoeden van Fermat heet inmiddels de Stelling van Fermat-Wiles.

Wat houden die vermoedens eigenlijk in?

We hebben hierboven het vermoeden van Fermat beschreven. Een klein beetje schoolwiskunde is genoeg om de formulering ervan te begrijpen: je hoeft alleen maar te weten wat gehele getallen en machten zijn. Maar voor het vermoeden van Riemann geldt dat niet. Van de twaalf woorden waaruit die bewering bestaat, is zo'n beetje de helft voor een niet-specialist onbegrijpelijk. Wat is 'niet-triviaal'? Wat is een 'nulpunt'? Wat is de 'zetafunctie'? Wat is de 'kritische lijn'? En wie was Riemann?

Helaas geldt zoiets eigenlijk ook voor de andere zes millennium problemen. In feite vragen ze allemaal minstens een heel artikel vol geavanceerde wiskunde om uit te leggen waar ze zo ongeveer over gaan. Die artikelen zijn ook geschreven: je kunt ze vinden op de website van het Clay Mathematical Institute: `www.claymath.org`. Maar als je daar kijkt, zul je zien dat het niet meevalt om eruit wijs te worden. Dat is het probleem met modern wiskundig onderzoek: het is niet alleen een kwestie van jargon, maar eigenlijk is de gehele ideeënwereld zo abstract dat je de grote onderzoeksvragen meestal alleen maar na een specialistische studie enigszins kunt begrijpen.

Toch gaan we in deze jaargang van Pythagoras proberen om bij minstens twee van die *millennium problems* een paar tipjes van de sluier op te lichten. Het ene is het *Vermoeden van Riemann* omdat de meeste wiskundigen dat beschouwen als het allerbelangrijkste probleem van de wiskunde, en dan kunnen we er in Pythagoras natuurlijk niet omheen. Het andere is het *Vermoeden van Poincaré*. Dat laatste om twee redenen. De eerste is dat het een vermoeden is uit de topologie, de 'elastiek-meetkunde' die vorig jaar ons centrale jaarthema was, en de tweede is dat er aanwijzingen zijn dat de Russische wiskundige Grigori Perelman van het Steklov Institute in Sint Petersburg het inmiddels zou hebben opgelost. Zijn werk wordt nu door experts gecontroleerd. De ervaringen met het bewijs van Wiles van het vermoeden van Fermat moeten ons voorzichtig maken, maar als Perelman het bij het rechte eind heeft, zal hij de eerste kunnen zijn die een miljoen opstrijkt!

Het Vermoeden van Riemann

In 1859 werd Berhard Riemann, een verlegen, 32-jarige wiskundige van de universiteit van Göttigen, benoemd tot corresponderend lid van de Academie van Berlijn. Zoals gebruikelijk dankte hij de Academie voor zijn benoeming in de vorm van een artikel over recent onderzoek dat hij gedaan had. In dat artikel, dat als titel droeg *Over het aantal priemgetallen beneden een gegeven grens*, is zijn beroemde vermoeden te vinden als een terloopse opmerking op de vierde bladzijde. Hij schrijft daarna (vrij vertaald): *Het ware te wensen dat er hiervoor ook een streng bewijs was. Ik heb daar een tijd naar gezocht, maar heb mijn pogingen voorlopig opgegeven omdat het voor de rest van mijn hier gepresenteerde onderzoek niet nodig scheen te zijn.*

Het vermoeden van Riemann heeft dus te maken met de verdeling van de priemgetallen over de natuurlijke getallen. Hoe vaak komen ze voor, hoe liggen ze verspreid, en soortgelijke kwesties. Maar in de formulering van het vermoeden: *alle niet-triviale nulpunten van de zetafunctie van Riemann liggen op de kritische lijn*, is niets over priemgetalen te vinden. Wel over een functie, de zetafunctie. Dat blijkt een *complexe* functie te zijn, die niet alleen complex (ingewikkeld) is in de gewone zin, maar een functie die *complexe getallen* omzet in *complexe getallen*. De nulpunten van zo'n functie zijn de complexe getallen waar de functiewaarde nul is. Bij de gewone sinusfunctie die we allemaal kennen als functie die reële getallen omzet in reële getallen, zijn de nulpunten de punten $x = k\pi$ (k geheel). De zetafunctie heeft ook nulpunten. Sommige ervan zijn niet moeilijk te vinden, dat zijn de *triviale* nulpunten. Maar er zijn ook nog oneindig veel andere, moeilijker te bepalen nulpunten, en die blijken de geheimen van de priemgetallenverdeling te herbergen. Riemann vermoedde dat ze in het complexe vlak allemaal op de *kritische lijn*, dat wil zeggen de verticale lijn door $\frac{1}{2}$, liggen.

Zo, nu weet je al een beetje meer over het beroemdste vermoeden uit de wiskunde. Maar natuurlijk nog lang niet alles; in de volgende nummers vertellen we er meer over! En wie er nu al vast meer over wil lezen, kan ik verwijzen naar vier recent verschenen boeken in het Engels:

Keith Devlin, The Millennium Problems, ISBN 1-86207-735-5

Marcus du Sautoy, The Music of the Primes, ISBN 1-84115-580-2

Karl Sabbagh, Dr. Riemann's Zeros, ISBN 1-84354-101-7

John Derbyshire, Prime Obsession, ISBN 0-452-28525-9