De Riemann-hypothese

Een miljoenenprobleem

Jan van de Craats (UvA)

NWD, 6 februari 2010

De Riemann-hypothese

De Riemann-hypothese

'Alle niettriviale nulpunten van de zètafunctie liggen op de kritieke lijn.'

De Riemann-hypothese

'Alle niettriviale nulpunten van de zètafunctie liggen op de kritieke lijn.'

Bernhard Riemann (1826-1866)

Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse (1859)

De Riemann-hypothese

‘Alle niettriviale nulpunten van de zètafunctie liggen op de kritieke lijn.’

Bernhard Riemann (1826-1866)

Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse (1859)

Op de vierde bladzijde hiervan staat de ‘Riemann-hypothese’ vermeld als een stelling die waarschijnlijk waar is, gevolgd door:

De Riemann-hypothese

‘Alle niettriviale nulpunten van de zètafunctie liggen op de kritieke lijn.’

Bernhard Riemann (1826-1866)

Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse (1859)

Op de vierde bladzijde hiervan staat de ‘Riemann-hypothese’ vermeld als een stelling die waarschijnlijk waar is, gevolgd door:

‘Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Ausuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da es für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.’

Priemgetallen

Een priemgetal is een geheel getal groter dan 1 dat alleen zonder rest deelbaar is door 1 en door zichzelf.

Priemgetallen

Een priemgetal is een geheel getal groter dan 1 dat alleen zonder rest deelbaar is door 1 en door zichzelf.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots$$

Priemgetallen

Een priemgetal is een geheel getal groter dan 1 dat alleen zonder rest deelbaar is door 1 en door zichzelf.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots$$

Er zijn oneindig veel priemgetallen (Euclides, ca. 300 v.Chr.).

Priemgetallen

Een priemgetal is een geheel getal groter dan 1 dat alleen zonder rest deelbaar is door 1 en door zichzelf.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots$$

Er zijn oneindig veel priemgetallen (Euclides, ca. 300 v.Chr.).

Bewijs: stel $p_1, p_2, \ldots, p_k$ is een eindig aantal verschillende priemgetallen. Noem $M = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$

Priemgetallen

Een priemgetal is een geheel getal groter dan 1 dat alleen zonder rest deelbaar is door 1 en door zichzelf.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots$$

Er zijn oneindig veel priemgetallen (Euclides, ca. 300 v.Chr.).

Bewijs: stel $p_1, p_2, \ldots, p_k$ is een eindig aantal verschillende priemgetallen. Noem $M = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$
Dan geeft M rest 1 na deling door elk van de priemgetallen p_i.

Priemgetallen

Een priemgetal is een geheel getal groter dan 1 dat alleen zonder rest deelbaar is door 1 en door zichzelf.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots$$

Er zijn oneindig veel priemgetallen (Euclides, ca. 300 v.Chr.).

Bewijs: stel $p_1, p_2, \ldots, p_k$ is een eindig aantal verschillende priemgetallen. Noem $M = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$

Dan geeft M rest 1 na deling door elk van de priemgetallen p_i.

Als q een priemdeler is van M, dan geldt dus $q \neq p_i$ voor alle i.

Priemgetallen

Een priemgetal is een geheel getal groter dan 1 dat alleen zonder rest deelbaar is door 1 en door zichzelf.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots$$

Er zijn oneindig veel priemgetallen (Euclides, ca. 300 v.Chr.).

Bewijs: stel $p_1, p_2, \ldots, p_k$ is een eindig aantal verschillende priemgetallen. Noem $M = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$

Dan geeft M rest 1 na deling door elk van de priemgetallen p_i.

Als q een priemdeler is van M, dan geldt dus $q \neq p_i$ voor alle i.

Zoals elk geheel getal groter dan 1, is ook M in priemfactoren te ontbinden, dus er bestaat zo'n priemfactor q.

Priemgetallen

Een priemgetal is een geheel getal groter dan 1 dat alleen zonder rest deelbaar is door 1 en door zichzelf.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots$$

Er zijn oneindig veel priemgetallen (Euclides, ca. 300 v.Chr.).

Bewijs: stel $p_1, p_2, \ldots, p_k$ is een eindig aantal verschillende priemgetallen. Noem $M = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$

Dan geeft M rest 1 na deling door elk van de priemgetallen p_i.

Als q een priemdeler is van M, dan geldt dus $q \neq p_i$ voor alle i.

Zoals elk geheel getal groter dan 1, is ook M in priemfactoren te ontbinden, dus er bestaat zo'n priemfactor q.

En dus zijn er oneindig veel priemgetallen!

De verdeling van de priemgetallen

De verdeling van de priemgetallen

Hoe liggen de priemgetallen verdeeld onder de natuurlijke getallen? Wat is het honderdste priemgetal? Wat is het miljoenste priemgetal?

De verdeling van de priemgetallen

Hoe liggen de priemgetallen verdeeld onder de natuurlijke getallen? Wat is het honderdste priemgetal? Wat is het miljoenste priemgetal?

Hoeveel priemgetallen zijn er van 10 cijfers? Van 100 cijfers? Van een miljoen cijfers?

De verdeling van de priemgetallen

Hoe liggen de priemgetallen verdeeld onder de natuurlijke getallen? Wat is het honderdste priemgetal? Wat is het miljoenste priemgetal?

Hoeveel priemgetallen zijn er van 10 cijfers? Van 100 cijfers? Van een miljoen cijfers?

Hulpmiddel bij het onderzoek hiernaar: de functie $\pi(x)$.

De verdeling van de priemgetallen

Hoe liggen de priemgetallen verdeeld onder de natuurlijke getallen? Wat is het honderdste priemgetal? Wat is het miljoenste priemgetal?

Hoeveel priemgetallen zijn er van 10 cijfers? Van 100 cijfers? Van een miljoen cijfers?

Hulpmiddel bij het onderzoek hiernaar: de functie $\pi(x)$.

Onder $\pi(x)$ verstaat men het aantal priemgetallen kleiner dan of gelijk aan x. Deze functie is voor alle reële $x > 0$ gedefinieerd. Kennen we $\pi(x)$, dan kennen we de verdeling van de priemgetallen.

De verdeling van de priemgetallen

Hoe liggen de priemgetallen verdeeld onder de natuurlijke getallen? Wat is het honderdste priemgetal? Wat is het miljoenste priemgetal?

Hoeveel priemgetallen zijn er van 10 cijfers? Van 100 cijfers? Van een miljoen cijfers?

Hulpmiddel bij het onderzoek hiernaar: de functie $\pi(x)$.

Onder $\pi(x)$ verstaat men het aantal priemgetallen kleiner dan of gelijk aan x. Deze functie is voor alle reële $x > 0$ gedefinieerd. Kennen we $\pi(x)$, dan kennen we de verdeling van de priemgetallen.

Riemann onderzocht in zijn artikel de functie $\pi(x)$. Hij leidde een expliciete formule af waarin hij $\pi(x)$ uitdrukte in een door Euler geïntroduceerde functie, de zètafunctie.

De verdeling van de priemgetallen

Hoe liggen de priemgetallen verdeeld onder de natuurlijke getallen? Wat is het honderdste priemgetal? Wat is het miljoenste priemgetal?

Hoeveel priemgetallen zijn er van 10 cijfers? Van 100 cijfers? Van een miljoen cijfers?

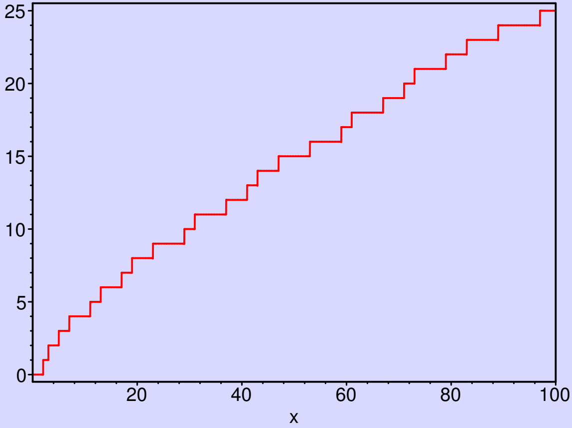
Hulpmiddel bij het onderzoek hiernaar: de functie $\pi(x)$.

Onder $\pi(x)$ verstaat men het aantal priemgetallen kleiner dan of gelijk aan x. Deze functie is voor alle reële $x > 0$ gedefinieerd. Kennen we $\pi(x)$, dan kennen we de verdeling van de priemgetallen.

Riemann onderzocht in zijn artikel de functie $\pi(x)$. Hij leidde een expliciete formule af waarin hij $\pi(x)$ uitdrukte in een door Euler geïntroduceerde functie, de zètafunctie.

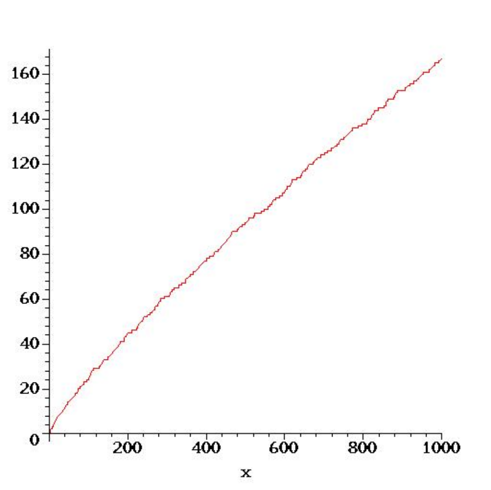
Kennen we de zètafunctie, dan kennen we de functie $\pi(x)$ en dan kennen we de verdeling van de priemgetallen.

De priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$



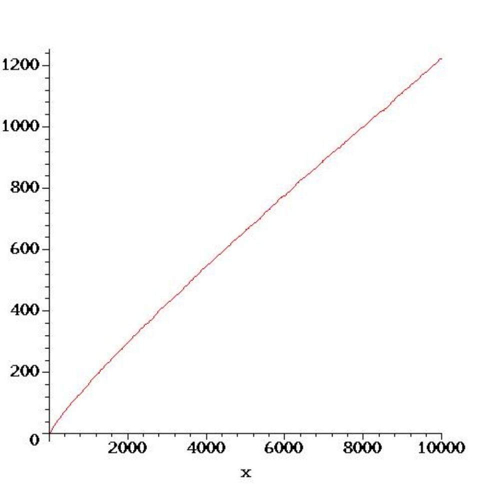
De priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$ voor $x \leq 100$

De priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$



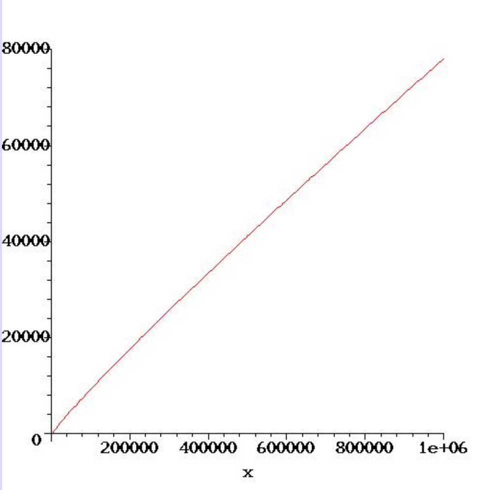
De priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$ voor $x \leq 1000$

De priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$



De priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$ voor $x \leq 10000$

De priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$



De priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$ voor $x \leq 1\,000\,000$

De priemgetallen-stelling

De priemgetallen-stelling

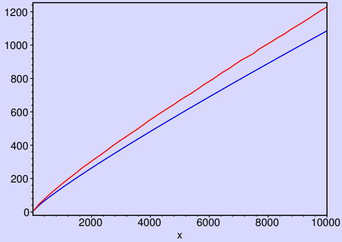
Uit onderzoek van o.a. Gauss bleek dat het wel eens zo zou kunnen zijn dat

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad \text{voor } x \to \infty$$

De priemgetallen-stelling

Uit onderzoek van o.a. Gauss bleek dat het wel eens zo zou kunnen zijn dat

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad \text{voor } x \to \infty$$

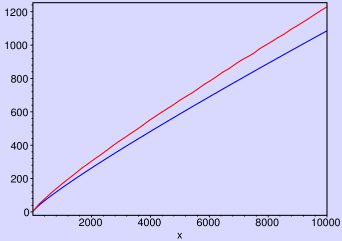


$\pi(x)$ (rood) en $\dfrac{x}{\ln x}$ (blauw)

De priemgetallen-stelling

Uit onderzoek van o.a. Gauss bleek dat het wel eens zo zou kunnen zijn dat

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad \text{voor } x \to \infty$$



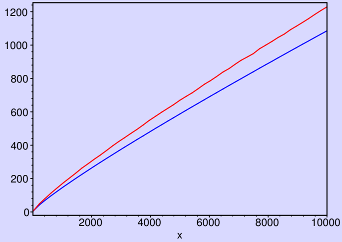
$\pi(x)$ (rood) en $\dfrac{x}{\ln x}$ (blauw)

D.w.z. dat de relatieve fout bij de benadering van $\pi(x)$ door $\dfrac{x}{\ln x}$ naar 0 gaat voor $x \to \infty$.

De priemgetallen-stelling

Uit onderzoek van o.a. Gauss bleek dat het wel eens zo zou kunnen zijn dat

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad \text{voor } x \to \infty$$



$\pi(x)$ (rood) en $\frac{x}{\ln x}$ (blauw)

D.w.z. dat de relatieve fout bij de benadering van $\pi(x)$ door $\frac{x}{\ln x}$ naar 0 gaat voor $x \to \infty$.

Dit vermoeden, dat bekend staat als de priemgetallenstelling, is in 1896 bewezen door Hadamard en De la Vallée Poussin (onafhankelijk van elkaar).

De priemgetallen-stelling

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad \text{voor } x \to \infty$$

De priemgetallen-stelling

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad \text{voor } x \to \infty$$

Gevolg: er zijn ontzettend veel grote priemgetallen!

De priemgetallen-stelling

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad \text{voor } x \to \infty$$

Gevolg: er zijn ontzettend veel grote priemgetallen!

Zo is het aantal priemgetallen van honderd cijfers vele, vele, vele malen groter dan het aantal elementaire deeltjes in het heelal!

Met zulke priemgetallen wordt in de cryptografie gewerkt (RSA).

De priemgetallen-stelling

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad \text{voor } x \to \infty$$

Gevolg: er zijn ontzettend veel grote priemgetallen!

Zo is het aantal priemgetallen van honderd cijfers vele, vele, vele malen groter dan het aantal elementaire deeltjes in het heelal!

Met zulke priemgetallen wordt in de cryptografie gewerkt (RSA).

Terzijde: het is ook betrekkelijk gemakkelijk om zulke priemgetallen te vinden. Maar het is (voor zover bekend) moeilijk een gegeven product van twee van die priemfactoren te ontbinden. Hierop berust de veiligheid van RSA.

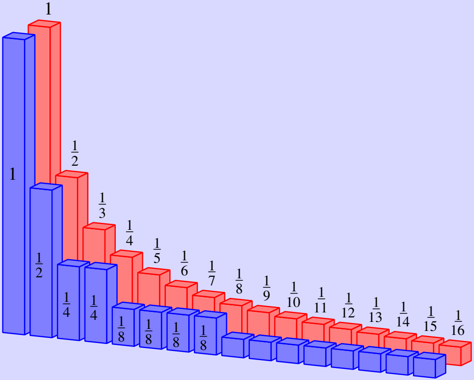
De zètafunctie

De zètafunctie

De harmonische reeks $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ divergeert:

De zètafunctie

De harmonische reeks $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ divergeert:



De truc van Nicholas Oresme (1323-1382)

De zètafunctie

Maar voor elke $x > 1$ convergeert de reeks

$$1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots$$

De zètafunctie

Maar voor elke $x > 1$ convergeert de reeks

$$1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots$$

Euler noemde de somfunctie $\zeta(x)$. Die heeft dus domein $x > 1$.

De zètafunctie

Maar voor elke $x > 1$ convergeert de reeks

$$1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots$$

Euler noemde de somfunctie $\zeta(x)$. Die heeft dus domein $x > 1$.

Het is een dalende functie van x, die voor $x \downarrow 1$ een verticale asymptoot heeft. Verder geldt $\zeta(x) > 1$ voor alle $x > 1$.

De zètafunctie

Maar voor elke $x > 1$ convergeert de reeks

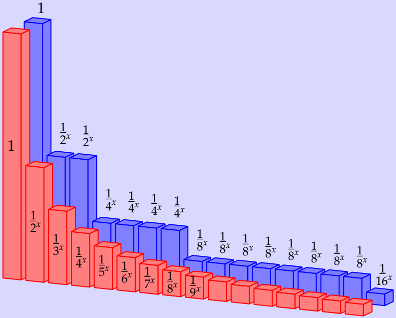
$$1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots$$

Euler noemde de somfunctie $\zeta(x)$. Die heeft dus domein $x > 1$.

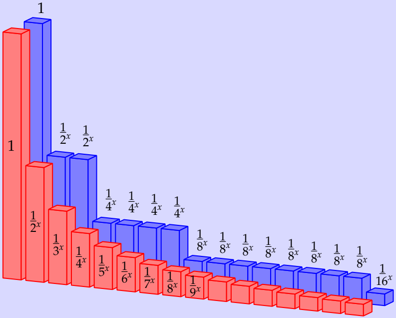
Het is een dalende functie van x, die voor $x \downarrow 1$ een verticale asymptoot heeft. Verder geldt $\zeta(x) > 1$ voor alle $x > 1$.

De convergentie van de reeks kan eenvoudig worden aangetoond met het integraalkenmerk (eerstejaarsstof bij de wiskundestudie), maar het kan ook meer elementair, met een modificatie van de truc van Oresme, zoals we op de volgende dia laten zien.

De zètafunctie

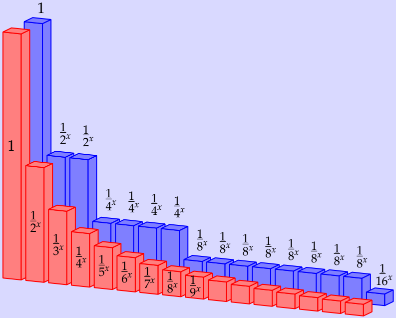


De zètafunctie



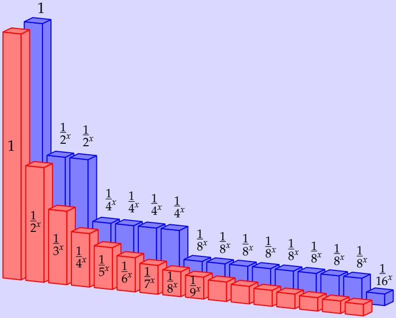
$$\zeta(x) \quad < \quad 1 + \frac{2}{2^x} + \frac{4}{4^x} + \frac{8}{8^x} + \frac{16}{16^x} + \cdots$$

De zètafunctie



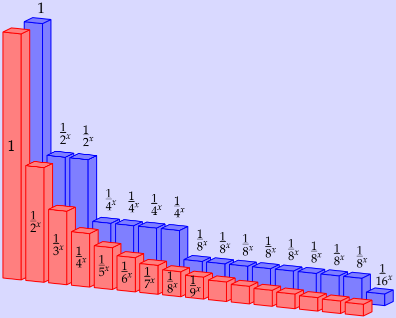
$$
\begin{aligned}
\zeta(x) &< 1 + \frac{2}{2^x} + \frac{4}{4^x} + \frac{8}{8^x} + \frac{16}{16^x} + \cdots \\
&= 1 + \frac{2}{2^x} + \frac{2^2}{2^{2x}} + \frac{2^3}{2^{3x}} + \frac{2^4}{2^{4x}} + \cdots
\end{aligned}
$$

De zètafunctie



$$\begin{aligned}
\zeta(x) &< 1 + \frac{2}{2^x} + \frac{4}{4^x} + \frac{8}{8^x} + \frac{16}{16^x} + \cdots \\
&= 1 + \frac{2}{2^x} + \frac{2^2}{2^{2x}} + \frac{2^3}{2^{3x}} + \frac{2^4}{2^{4x}} + \cdots \\
&= 1 + 2^{1-x} + 2^{2-2x} + 2^{3-3x} + 2^{4-4x} + \cdots
\end{aligned}$$

De zètafunctie



$$
\begin{aligned}
\zeta(x) &< 1 + \frac{2}{2^x} + \frac{4}{4^x} + \frac{8}{8^x} + \frac{16}{16^x} + \cdots \\
&= 1 + \frac{2}{2^x} + \frac{2^2}{2^{2x}} + \frac{2^3}{2^{3x}} + \frac{2^4}{2^{4x}} + \cdots \\
&= 1 + 2^{1-x} + 2^{2-2x} + 2^{3-3x} + 2^{4-4x} + \cdots \\
&= 1 + 2^{1-x} + \left(2^{1-x}\right)^2 + \left(2^{1-x}\right)^3 + \left(2^{1-x}\right)^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

De zètafunctie

We hebben zojuist afgeleid dat voor alle $x > 1$ geldt:

$$\begin{aligned}\zeta(x) &= 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots \\ &< 1 + 2^{1-x} + \left(2^{1-x}\right)^2 + \left(2^{1-x}\right)^3 + \left(2^{1-x}\right)^4 + \cdots\end{aligned}$$

De zètafunctie

We hebben zojuist afgeleid dat voor alle $x > 1$ geldt:

$$\begin{aligned}
\zeta(x) &= 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots \\
&< 1 + 2^{1-x} + \left(2^{1-x}\right)^2 + \left(2^{1-x}\right)^3 + \left(2^{1-x}\right)^4 + \cdots \\
&= \frac{1}{1 - 2^{1-x}} = \frac{2^{x-1}}{2^{x-1} - 1}
\end{aligned}$$

De zètafunctie

We hebben zojuist afgeleid dat voor alle $x > 1$ geldt:

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots \\ &< 1 + 2^{1-x} + \left(2^{1-x}\right)^2 + \left(2^{1-x}\right)^3 + \left(2^{1-x}\right)^4 + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - 2^{1-x}} = \frac{2^{x-1}}{2^{x-1} - 1} \end{aligned}$$

Aangezien $\zeta(x) > 1$ en $\lim_{x \to \infty} \frac{2^{x-1}}{2^{x-1} - 1} = 1$

geldt ook $\lim_{x \to \infty} \zeta(x) = 1$

dus de lijn $y = 1$ is een horizontale asymptoot van de zètafunctie.

Het Baseler probleem

Het Baseler probleem

Pietro Mengoli (1625-1686): Wat is de waarde van

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

Het Baseler probleem

Pietro Mengoli (1625-1686): Wat is de waarde van

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

Numerieke resultaten:

John Wallis (1665) $1.645\ldots$

Het Baseler probleem

Pietro Mengoli (1625-1686): Wat is de waarde van

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

Numerieke resultaten:

John Wallis (1665) $1.645\ldots$

Vergeefse pogingen: Leibniz, Jacob Bernoulli (1654-1705) (*Tractatus de seriebus infinitis*, Basel, 1689).

Het Baseler probleem

Pietro Mengoli (1625-1686): Wat is de waarde van

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

Numerieke resultaten:
John Wallis (1665) $1.645\ldots$
Vergeefse pogingen: Leibniz, Jacob Bernoulli (1654-1705) (*Tractatus de seriebus infinitis*, Basel, 1689).

Johann Bernoulli (1667-1748) legde het probleem voor aan zijn pupil en vriend Leonhard Euler (1707-1783), die de som in 1731 via convergentieversnelling in zes decimalen nauwkeurig berekende en in 1735 in twintig decimalen:

$$1.644\,934\,066\,848\,226\,436\,47\ldots$$

Het Baseler probleem

Pietro Mengoli (1625-1686): Wat is de waarde van

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

Numerieke resultaten:
John Wallis (1665) $1.645\ldots$
Vergeefse pogingen: Leibniz, Jacob Bernoulli (1654-1705) (*Tractatus de seriebus infinitis*, Basel, 1689).

Johann Bernoulli (1667-1748) legde het probleem voor aan zijn pupil en vriend Leonhard Euler (1707-1783), die de som in 1731 via convergentieversnelling in zes decimalen nauwkeurig berekende en in 1735 in twintig decimalen:

$$1.644\,934\,066\,848\,226\,436\,47\ldots$$

Later dat jaar vond hij de exacte waarde:

Het Baseler probleem

Pietro Mengoli (1625-1686): Wat is de waarde van

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

Numerieke resultaten:
John Wallis (1665) $1.645\ldots$
Vergeefse pogingen: Leibniz, Jacob Bernoulli (1654-1705) (*Tractatus de seriebus infinitis*, Basel, 1689).

Johann Bernoulli (1667-1748) legde het probleem voor aan zijn pupil en vriend Leonhard Euler (1707-1783), die de som in 1731 via convergentieversnelling in zes decimalen nauwkeurig berekende en in 1735 in twintig decimalen:

$$1.644\,934\,066\,848\,226\,436\,47\ldots$$

Later dat jaar vond hij de exacte waarde: $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Het Baseler probleem

Het Baseler probleem

Hoe ging Euler te werk?

Het Baseler probleem

Hoe ging Euler te werk? Hij leidde eerst af:

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2}\right)\cdots$$

Het Baseler probleem

Hoe ging Euler te werk? Hij leidde eerst af:

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2}\right)\cdots$$

Het linkerlid kun je in een machtreeks ontwikkelen:

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 1 - \frac{\pi^2}{3!}x^2 + \frac{\pi^4}{5!}x^4 - \frac{\pi^6}{7!}x^6 + \cdots$$

Het Baseler probleem

Hoe ging Euler te werk? Hij leidde eerst af:

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2}\right)\cdots$$

Het linkerlid kun je in een machtreeks ontwikkelen:

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 1 - \frac{\pi^2}{3!}x^2 + \frac{\pi^4}{5!}x^4 - \frac{\pi^6}{7!}x^6 + \cdots$$

Als je in het rechterlid de haakjes uitwerkt, krijg je ook een machtreeks in even machten van x, met als coëfficiënt van x^2

$$-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \cdots$$

Het Baseler probleem

Hoe ging Euler te werk? Hij leidde eerst af:

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2}\right)\cdots$$

Het linkerlid kun je in een machtreeks ontwikkelen:

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 1 - \frac{\pi^2}{3!}x^2 + \frac{\pi^4}{5!}x^4 - \frac{\pi^6}{7!}x^6 + \cdots$$

Als je in het rechterlid de haakjes uitwerkt, krijg je ook een machtreeks in even machten van x, met als coëfficiënt van x^2

$$-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \cdots$$

Maar dat is juist $-\zeta(2)$.

Het Baseler probleem

Hoe ging Euler te werk? Hij leidde eerst af:

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2}\right)\cdots$$

Het linkerlid kun je in een machtreeks ontwikkelen:

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 1 - \frac{\pi^2}{3!}x^2 + \frac{\pi^4}{5!}x^4 - \frac{\pi^6}{7!}x^6 + \cdots$$

Als je in het rechterlid de haakjes uitwerkt, krijg je ook een machtreeks in even machten van x, met als coëfficiënt van x^2

$$-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \cdots$$

Maar dat is juist $-\zeta(2)$. Daarom is

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{3!} = \frac{\pi^2}{6}$$

Het Baseler probleem

Het Baseler probleem

Als een bonus verkreeg Euler ook de exacte waarde van $\zeta(2k)$:

Het Baseler probleem

Als een bonus verkreeg Euler ook de exacte waarde van $\zeta(2k)$:

$$
\begin{aligned}
\zeta(4) &= \frac{\pi^4}{90} \\
\zeta(6) &= \frac{\pi^6}{945} \\
\zeta(8) &= \frac{\pi^8}{9450} \\
\zeta(10) &= \frac{\pi^{10}}{93555} \\
\zeta(12) &= \frac{691\pi^{12}}{638512875} \\
\ldots & \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Het Baseler probleem

Als een bonus verkreeg Euler ook de exacte waarde van $\zeta(2k)$:

$$
\begin{aligned}
\zeta(4) &= \frac{\pi^4}{90} \\
\zeta(6) &= \frac{\pi^6}{945} \\
\zeta(8) &= \frac{\pi^8}{9450} \\
\zeta(10) &= \frac{\pi^{10}}{93555} \\
\zeta(12) &= \frac{691\pi^{12}}{638512875} \\
\ldots & \quad \ldots
\end{aligned}
$$

De oneven gehele waarden blijven echter een volstrekt raadsel. Alleen $\zeta(3)$ heeft iets van zijn geheimen prijsgegeven: in 1978 bewees Apéri dat $\zeta(3)$ irrationaal is.

Het verband tussen de priemgetallen en de zètafunctie

Eulers productformule: *Voor iedere x groter dan 1 geldt:*

$$\zeta(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{2^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{11^x}} \cdots$$

Het verband tussen de priemgetallen en de zètafunctie

Eulers productformule: *Voor iedere x groter dan 1 geldt:*

$$\zeta(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{2^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{11^x}} \cdots$$

Elke factor in dit oneindige product is van de vorm

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^x}} = \left(1-p^{-x}\right)^{-1}$$

Het verband tussen de priemgetallen en de zètafunctie

Eulers productformule: *Voor iedere x groter dan 1 geldt:*

$$\zeta(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^x}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^x}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^x}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7^x}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{11^x}} \cdots$$

Elke factor in dit oneindige product is van de vorm

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^x}} = \left(1 - p^{-x}\right)^{-1}$$

Eulers productformule kan dus ook geschreven worden als

$$\zeta(x) = \prod_p \left(1 - p^{-x}\right)^{-1}$$

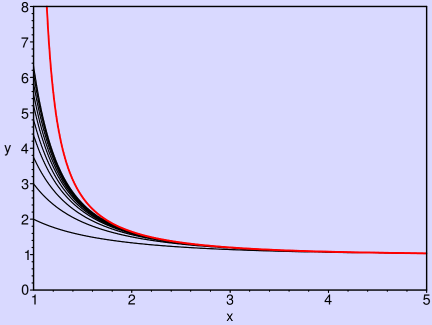
(Het product wordt genomen over alle priemgetallen p.)

Eulers productformule

$$\zeta(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{2^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{11^x}} \cdots$$

Eulers productformule

$$\zeta(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{2^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{11^x}} \cdots$$



De grafiek van $\zeta(x)$ (rode lijn) samen met de grafieken van de eerste tien benaderingen van het Eulerproduct.

Riemanns onderzoek

Riemanns onderzoek

Riemann ging bij zijn onderzoek uit van Eulers productformule.

Riemanns onderzoek

Riemann ging bij zijn onderzoek uit van Eulers productformule.

Hij breidde daarna Eulers zètafunctie $\zeta(x)$ (die Euler alleen maar gedefinieerd had voor reële $x > 1$) uit tot een complexe functie $\zeta(z)$ die gedefinieerd en analytisch is voor alle complexe getallen $z \neq 1$.

Riemanns onderzoek

Riemann ging bij zijn onderzoek uit van Eulers productformule.

Hij breidde daarna Eulers zètafunctie $\zeta(x)$ (die Euler alleen maar gedefinieerd had voor reële $x > 1$) uit tot een complexe functie $\zeta(z)$ die gedefinieerd en analytisch is voor alle complexe getallen $z \neq 1$.

Daartoe leidde hij de volgende formidabele formule af:

$$\zeta(-z) = \frac{-2 \cdot z!}{(2\pi)^{z+1}} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \zeta(z+1)$$

Riemanns onderzoek

Riemann ging bij zijn onderzoek uit van Eulers productformule.

Hij breidde daarna Eulers zètafunctie $\zeta(x)$ (die Euler alleen maar gedefinieerd had voor reële $x > 1$) uit tot een complexe functie $\zeta(z)$ die gedefinieerd en analytisch is voor alle complexe getallen $z \neq 1$.

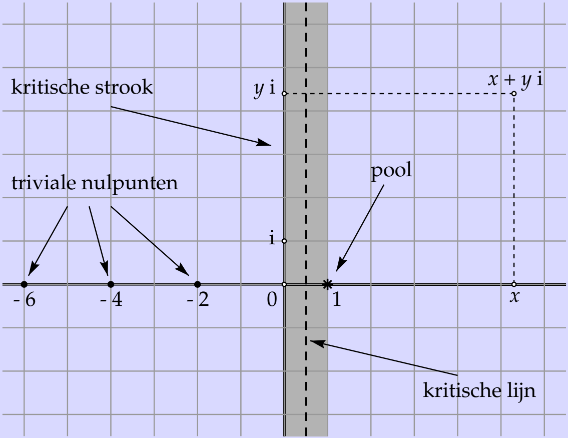
Daartoe leidde hij de volgende formidabele formule af:

$$\zeta(-z) = \frac{-2 \cdot z!}{(2\pi)^{z+1}} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \zeta(z+1)$$

Vervolgens vond hij een formule waarin de priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$ uitgedrukt wordt in de complexe nulpunten van deze zètafunctie.

De nulpunten van de zètafunctie

De nulpunten van de zètafunctie



De niettriviale nulpunten

De niettriviale nulpunten

$\frac{1}{2} \pm 14,134725\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 21,022040\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 25,010856\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 30,424878\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 32,935057\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 37,586176\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 40,918720\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 43,327073\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 48,005150\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 49,773832\,\mathrm{i}$

Links staan de eerste twee maal tien niettriviale nulpunten van de zètafunctie, waarbij het imaginaire deel is afgerond op 6 decimalen.

De niettriviale nulpunten

$\frac{1}{2} \pm 14{,}134725\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 21{,}022040\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 25{,}010856\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 30{,}424878\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 32{,}935057\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 37{,}586176\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 40{,}918720\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 43{,}327073\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 48{,}005150\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 49{,}773832\,\mathrm{i}$

Links staan de eerste twee maal tien niettriviale nulpunten van de zètafunctie, waarbij het imaginaire deel is afgerond op 6 decimalen.

Ze liggen allemaal op de kritische lijn $\Re(z) = \frac{1}{2}$.

De niettriviale nulpunten

$\frac{1}{2} \pm 14,134725\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 21,022040\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 25,010856\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 30,424878\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 32,935057\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 37,586176\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 40,918720\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 43,327073\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 48,005150\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 49,773832\,\mathrm{i}$

Links staan de eerste twee maal tien niettriviale nulpunten van de zètafunctie, waarbij het imaginaire deel is afgerond op 6 decimalen.

Ze liggen allemaal op de kritische lijn $\Re(z) = \frac{1}{2}$.

Inmiddels is geverifieerd dat de eerste honderd miljard niettriviale nulpunten ook allemaal op de kritische lijn liggen.

De niettriviale nulpunten

$\frac{1}{2} \pm 14,134725\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 21,022040\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 25,010856\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 30,424878\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 32,935057\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 37,586176\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 40,918720\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 43,327073\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 48,005150\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 49,773832\,\mathrm{i}$

Links staan de eerste twee maal tien niettriviale nulpunten van de zètafunctie, waarbij het imaginaire deel is afgerond op 6 decimalen.

Ze liggen allemaal op de kritische lijn $\Re(z) = \frac{1}{2}$.

Inmiddels is geverifieerd dat de eerste honderd miljard niettriviale nulpunten ook allemaal op de kritische lijn liggen.

Maar er zijn oneindig veel niettriviale nulpunten, en de Riemann-hypothese is nog steeds niet bewezen.

De expliciete formule

In de webklas hebben we naast de priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$ ook een gemodificeerde priemgetallen-telfunctie $\psi(x)$ bestudeerd die met $\pi(x)$ in nauw verband staat.

De expliciete formule

In de webklas hebben we naast de priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$ ook een gemodificeerde priemgetallen-telfunctie $\psi(x)$ bestudeerd die met $\pi(x)$ in nauw verband staat.

$\psi(x)$ telt niet alleen de priemgetallen, maar ook de priemmachten, dat wil zeggen de gehele machten p^k van de priemgetallen, waarbij elke priemmacht gewicht $\ln p$ krijgt. Er is een nauw verband tussen de beide functies, maar $\psi(x)$ werkt wat gemakkelijker.

De expliciete formule

In de webklas hebben we naast de priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$ ook een gemodificeerde priemgetallen-telfunctie $\psi(x)$ bestudeerd die met $\pi(x)$ in nauw verband staat.

$\psi(x)$ telt niet alleen de priemgetallen, maar ook de priemmachten, dat wil zeggen de gehele machten p^k van de priemgetallen, waarbij elke priemmacht gewicht $\ln p$ krijgt. Er is een nauw verband tussen de beide functies, maar $\psi(x)$ werkt wat gemakkelijker.

Voor $\psi(x)$ blijkt de volgende formule te gelden:

De expliciete formule

In de webklas hebben we naast de priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$ ook een gemodificeerde priemgetallen-telfunctie $\psi(x)$ bestudeerd die met $\pi(x)$ in nauw verband staat.

$\psi(x)$ telt niet alleen de priemgetallen, maar ook de priemmachten, dat wil zeggen de gehele machten p^k van de priemgetallen, waarbij elke priemmacht gewicht $\ln p$ krijgt. Er is een nauw verband tussen de beide functies, maar $\psi(x)$ werkt wat gemakkelijker.

Voor $\psi(x)$ blijkt de volgende formule te gelden:

$$\psi(x) = x - \ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_u \frac{x^u}{u}$$

De expliciete formule

In de webklas hebben we naast de priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$ ook een gemodificeerde priemgetallen-telfunctie $\psi(x)$ bestudeerd die met $\pi(x)$ in nauw verband staat.

$\psi(x)$ telt niet alleen de priemgetallen, maar ook de priemmachten, dat wil zeggen de gehele machten p^k van de priemgetallen, waarbij elke priemmacht gewicht $\ln p$ krijgt. Er is een nauw verband tussen de beide functies, maar $\psi(x)$ werkt wat gemakkelijker.

Voor $\psi(x)$ blijkt de volgende formule te gelden:

$$\psi(x) = x - \ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_u \frac{x^u}{u}$$

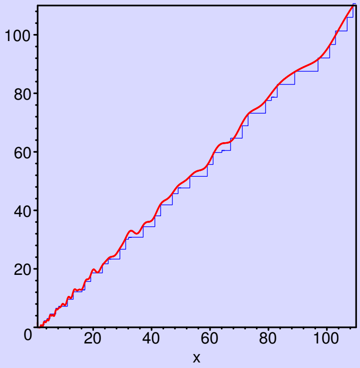
Hierbij strekt de som in de laatste term zich uit over alle niettriviale nulpunten u van de zètafunctie!

Benaderingen van $\psi(x)$

$$\psi(x) = x - \ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_u \frac{x^u}{u}$$

Benaderingen van $\psi(x)$

$$\psi(x) = x - \ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_u \frac{x^u}{u}$$



Grafiek van $\psi(x)$ (blauw) en de benadering met behulp van de eerste tien niettriviale nulpunten van de zèta-functie (rood).

Tot slot . . .

Verder lezen:

Tot slot . . .

Verder lezen:

- De lesteksten van de webklas staan op mijn homepage
  `http://www.science.uva.nl/∼craats`

Tot slot . . .

Verder lezen:

- De lesteksten van de webklas staan op mijn homepage **`http://www.science.uva.nl/~craats`**
- John Derbyshire, *Prime Obsession, Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, London, 2003, ISBN 0-452-28525-9

Tot slot . . .

Verder lezen:

- De lesteksten van de webklas staan op mijn homepage **`http://www.science.uva.nl/~craats`**
- John Derbyshire, *Prime Obsession, Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, London, 2003, ISBN 0-452-28525-9
- Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes, why an unsolved problem in mathematics matters*, London, 2003, ISBN 1-84115-580-2

Tot slot . . .

Verder lezen:

- De lesteksten van de webklas staan op mijn homepage **`http://www.science.uva.nl/~craats`**
- John Derbyshire, *Prime Obsession, Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, London, 2003, ISBN 0-452-28525-9
- Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes, why an unsolved problem in mathematics matters*, London, 2003, ISBN 1-84115-580-2

Opgeven UvA-webklas Riemann-hypothese:

`http://www.webklassen.nl`