Bestaat er dan toch een wortel uit -1?

Complexe getallen en complexe functies voor beginners

Jan van de Craats
Universiteit van Amsterdam

https://staff.fnwi.uva.nl/j.vandecraats/

Complexe getallen worden in vrijwel alle toepassingen van de wiskunde gebruikt, met name in de exacte vakken, de techniek en de economie. Ook deze vacantiecursus laat er toepassingen van zien. In het vak Wiskunde D voor vwo is *complexe getallen* een keuze-onderwerp. In deze voordracht geef ik een overzicht in vogelvlucht van de belangrijkste elementaire eigenschappen van complexe getallen en complexe functies. Daarbij ga ik af en toe wat verder dan wat er op school in wiskunde D behandeld kan worden, maar daarvoor is dit dan ook een vacantiecursus.

1 Hoe introduceer je de complexe getallen?

Er zijn minstens drie manieren om complexe getallen te introduceren. Ten eerste de historische benadering. Complexe getallen kwamen voor het eerst tevoorschijn toen Italiaanse wiskundigen in de zestiende eeuw formules zochten voor de oplossing van derdegraadsvergelijkingen. Bij de door Scipio del Ferro (ca. 1465-1526) en Niccolo Tartaglia (ca. 1499-1557) gevonden oplossing van het probleem, die in 1545 door Geronimo Cardano (1501-1576) in zijn *Ars Magna* gepubliceerd werd, bleek het noodzakelijk te zijn om op een formele manier te rekenen met vierkantswortels uit negatieve getallen, althans in die gevallen waarin de derdegraadsvergelijking drie verschillende reële oplossingen had. In zijn in 1572 verschenen *Algebra* bracht Rafaele Bombelli (1526-1573) enige klaarheid in de duisternis door een algemene theorie voor deze 'imaginaire getallen' te ontwikkelen. Het is heel goed mogelijk om met beginners ditzelfde pad te bewandelen, maar dat vereist toch flink wat doorzettingsvermogen en bovendien een goede beheersing van allerlei algebraïsche vaardigheden. Voor schoolgebruik is dit minder geschikt.

De tweede manier is de formele invoering van complexe getallen als paren reële getallen (a, b). Op de voor de hand liggende manier definieer je de optelling (coördinaatsgewijs):

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

en op een minder voor de hand liggende manier de vermenigvuldiging:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Zo doen de meeste leerboeken het. Snel en efficiënt. Toch valt zo'n benadering veel beginners wat rauw op de maag, juist door die formele aanpak. Zeker voor schoolgebruik is het geen gek idee om er eerst een meer intuïtieve inleiding aan vooraf te laten gaan. Hieronder laat ik daar een voorbeeld van zien.

2 Wortels uit negatieve getallen

Iedereen weet dat er geen getal x bestaat waarvoor $x^2 = -1$. Maar wat als we ons nu eens *indenken* dat er wél zo'n getal zou bestaan? Een getal, we noemen het " i " (van **i***maginair*, dat wil zeggen denkbeeldig) waarvoor dus geldt dat

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

Je zou dat getal dan een *wortel uit* -1 kunnen noemen: $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Ook uit andere negatieve getallen kun je dan een wortel trekken. Zo is $6\mathrm{i}$ een wortel uit -36 want $(6\mathrm{i})^2 = 6\mathrm{i} \times 6\mathrm{i} = 36 \times \mathrm{i}^2 = 36 \times (-1) = -36$.

Wat je in zulke gevallen eigenlijk doet, is het bepalen van een oplossing van een vergelijking van de vorm $x^2 = -a$, waarbij a een positief getal is. In de reële getallen heeft zo'n vergelijking geen oplossingen, maar met het mysterieuze getal i erbij lukt het wél. Je vindt dan $\sqrt{a}\,\mathrm{i}$ als oplossing. Maar natuurlijk is $-\sqrt{a}\,\mathrm{i}$ ook een oplossing: $(-\sqrt{a}\,\mathrm{i})^2 = (-1)^2(\sqrt{a})^2\,\mathrm{i}^2 = 1 \cdot a \cdot (-1) = -a$. De volledige oplossing van de vergelijking $x^2 = -a$ is blijkbaar $x = \pm\sqrt{a}\,\mathrm{i}$.

Als je een getal i hebt waarvoor $\mathrm{i}^2 = -1$, kun je ook elke vierkantsvergelijking (kwadratische vergelijking) oplossen, zelfs als de discriminant negatief is. Bijvoorbeeld $x^2 + 2x + 5 = 0$, kijk maar:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 5 &= 0 \\ (x+1)^2 + 4 &= 0 \\ (x+1)^2 &= -4 \end{aligned}$$

Dit geeft $x + 1 = \pm 2\mathrm{i}$ oftewel $x = -1 + 2\mathrm{i}$ of $x = -1 - 2\mathrm{i}$.

Waar het op neer komt, is dat je gewoon de bekende *abc*-formule toepast. De oplossingen van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ worden daarbij gegeven door

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Als de discriminant $b^2 - 4ac$ negatief is, is $4ac - b^2$ positief, en dan geldt dus $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(4ac - b^2)(-1)} = \sqrt{4ac - b^2}\,\mathrm{i}$. In het voorbeeld hierboven was $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$ en $b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$, en dus geldt inderdaad $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 4\mathrm{i}}{2} = -1 \pm 2\mathrm{i}$.

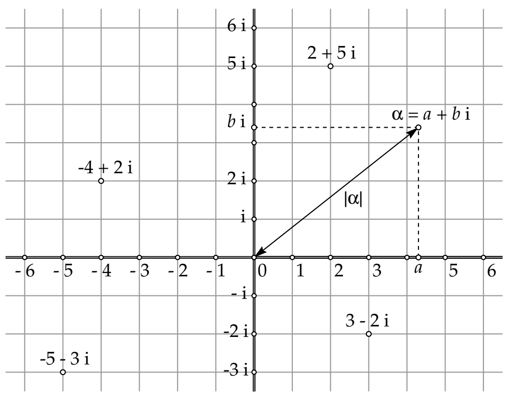
3 Het complexe vlak

Bij het oplossen van vierkantsvergelijkingen zijn we nu ook getallen van de vorm $a + b\,\mathrm{i}$ tegengekomen. We noemen ze *complexe getallen*. Bijvoorbeeld $-1+2\,\mathrm{i}$ of $3-5\,\mathrm{i}$. Je kunt zulke getallen bij elkaar *optellen*: $(-1+2\,\mathrm{i}) + (3 - 5\,\mathrm{i}) = 2 - 3\,\mathrm{i}$. Of van elkaar *aftrekken*: $(-1+2\,\mathrm{i}) - (3-5\,\mathrm{i}) = -4+7\,\mathrm{i}$. Of met elkaar *vermenigvuldigen*:

$(-1+2\,\mathrm{i})(3-5\,\mathrm{i}) = -3+5\,\mathrm{i} + 6\,\mathrm{i} - 10\,\mathrm{i}^2 = -3+11\,\mathrm{i} + 10 = 7+11\,\mathrm{i}$.

Gewoon haakjes uitwerken dus, en gebruiken dat $\mathrm{i}^2 = -1$.

Een complex getal $a + b\,\mathrm{i}$ ligt helemaal vast door de twee *reële* getallen a en b. Reële getallen kun je voorstellen als punten op een lijn, de *reële getallenlijn*. Op net zo'n manier kun je complexe getallen voorstellen als punten in het vlak, het *complexe vlak*. Daarin moet dan eerst een coördinatenstelsel gekozen zijn. Het complexe getal $a + b\,\mathrm{i}$ hoort dan bij het punt met de coördinaten (a, b), en daarmee zijn we dan uiteindelijk aangekomen bij de hierboven genoemde formele definitie van de complexe getallen van bladzijde 2 (zie ook figuur 1).



Figuur 1: Het complexe vlak.

Voor de punten op de x-as is $b = 0$. In plaats van $a + 0\,\mathrm{i}$ schrijven we dan gewoon a. En voor de punten op de y-as geldt $a = 0$. Die schrijven we dan niet als $0 + b\,\mathrm{i}$ maar gewoon als $b\,\mathrm{i}$. En voor $1\,\mathrm{i}$ schrijven we natuurlijk gewoon i. Daarmee is ook het mysterieuze getal i een punt in het complexe vlak geworden: het is het punt met coördinaten $(0, 1)$.

De x-as noemen we voortaan de *reële as* en de getallen daarop de *reële getallen*. De y-as heet de *imaginaire as* en de getallen daarop heten de *imaginaire getallen*.

Complexe getallen worden vaak aangegeven met de letter z of met Griekse letters zoals α (alfa). We schrijven dan $z = x + y\,\mathrm{i}$ of $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$.

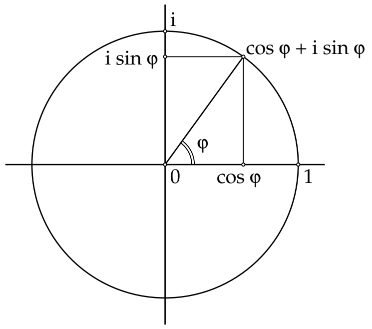
Als $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$ een complex getal is, heet a het *reële deel*, notatie $a = \mathrm{Re}(\alpha)$, en b het *imaginaire deel*, notatie $b = \mathrm{Im}(\alpha)$. Het imaginaire deel is dus een reëel getal! Het getal $\sqrt{a^2+b^2}$ heet de *absolute waarde* van α, notatie $|\alpha|$. De absolute waarde van het complexe getal α is de afstand van α tot de oorsprong (stelling van Pythagoras). Als α een reëel getal is, is $|\alpha|$ dus de gewone absolute waarde van α.

4 Complexe getallen op de eenheidscirkel

Elk punt op de eenheidscirkel (de cirkel met straal 1 en de oorsprong als middelpunt) heeft in coördinaten uitgedrukt de vorm $(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Hierbij is φ de hoek die de voerstraal (de verbindingslijn met de oorsprong) maakt met de positieve x-as (φ is de Griekse letter 'phi'). We meten φ in radialen, tegen de klok in (180° is gelijk aan π radialen). De hoek φ heet het *argument* van z, met als notatie $\varphi = \arg(z)$. Het argument is tot op gehele veelvouden van 2π na bepaald.

In het complexe vlak is een punt op de eenheidscirkel dus altijd van de vorm $z = \cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi$ (zie figuur 2). Inderdaad geldt voor zo'n punt dat

$$|\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \sqrt{1} = 1$$



Figuur 2: Een complex getal op de eenheidscirkel.

Wat gebeurt er als je twee van zulke punten $z_1 = \cos\varphi_1 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_1$ en $z_2 = \cos\varphi_2 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_2$ met elkaar vermenigvuldigt? Dan is

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_2) \\ &= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \mathrm{i}\,(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) \end{aligned}$$

Maar volgens bekende gonioregels is

$$\begin{aligned} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \quad \text{en} \\ \cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2 &= \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{aligned}$$

en dus is

$$z_1 z_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Dit is dus weer een getal *op de eenheidscirkel* met als argument de som $\varphi_1 + \varphi_2$ van de argumenten van z_1 en z_2. Met andere woorden:

> *Het product $z_1 z_2$ van twee complexe getallen op de eenheidscirkel is weer een getal op de eenheidscirkel, en wel het getal dat als argument de som van de argumenten van z_1 en z_2 heeft.*

Voor het quotiënt van twee complexe getallen geldt:

Het quotiënt $\dfrac{z_1}{z_2}$ van twee complexe getallen op de eenheidscirkel is weer een getal op de eenheidscirkel, en wel het getal dat als argument het verschil van de argumenten van z_1 en z_2 heeft.

Waarom radialen?

De reden dat we hoeken in radialen meten en niet in graden, is onder andere gelegen in de toepassingen. Daarin spelen haast altijd *functies* een rol, met name de sinus- en de cosinusfunctie. Ze worden vaak gedifferentieerd, en daarbij gelden de bekende formules $(\sin\varphi)' = \cos\varphi$ en $(\cos\varphi)' = -\sin\varphi$ alleen maar als je in radialen werkt. Ook de formules van Euler die ik hieronder zal behandelen, gelden alleen wanneer je argumenten in radialen meet. Wil je dus het onderwerp complexe getallen op een toepassingsgerichte manier behandelen, dan is het verstandig om al vanaf het begin met radialen te werken.

5 De formules van Euler

Halverwege de achttiende eeuw bewees de grote wiskundige Leonhard Euler (1707-1783) de formule

$$\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi$$

Wij gaan hier niet op Eulers argumenten in, maar presenteren deze formule op dit moment gewoon als een definitie, of, zo je wilt, als een *verkorte notatie.* In plaats van $\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi$ schrijven we voortaan $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}$ (of $\mathrm{e}^{\,\varphi\,\mathrm{i}}$). Let op: het is niet de bekende, reëele e-machtfunctie die hier staat, want de exponent $\mathrm{i}\,\varphi$ is geen reëel getal, maar een *imaginair* getal. En natuurlijk zit er meer achter: later (op bladzijde 11) zal ik $\mathrm{e}^{\,z}$ zelfs voor willekeurige complexe getallen z definiëren.

In de vorige paragraaf heb ik afgeleid dat

$$(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\,\sin\varphi_2) = \cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

In de nieuwe notatie ziet dat er een stuk overzichtelijker uit:

$$\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_1}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_2} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Net als bij gewone e-machten geldt dus ook hier: *bij het vermenigvuldigen van imaginaire* e*-machten worden de exponenten bij elkaar opgeteld.* En natuurlijk geldt ook:

$$\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_1}}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_2}} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Bij het delen van imaginaire e*-machten worden de exponenten van elkaar afgetrokken.*

Als je in de eerste formule van deze paragraaf $-\varphi$ in plaats van φ invult, krijg je

$$\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,\varphi} = \cos(-\varphi) + \mathrm{i}\,\sin(-\varphi) = \cos\varphi - \mathrm{i}\,\sin\varphi$$

Tel je de twee formules bij elkaar op, dan krijg je $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi$ oftewel

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

Trek je ze van elkaar af, dan krijg je $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi$ oftewel

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

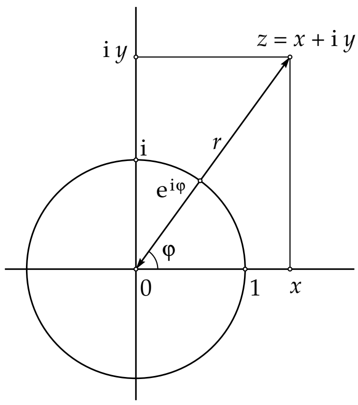
Ook deze twee beroemde formules zijn van Euler afkomstig.

6 De (r, φ)-notatie voor complexe getallen

Elk complex getal $z = x + iy$ kun je schrijven in de vorm

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

waarin $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ de absolute waarde van z, en $\varphi = \arg(z)$ het argument van z is, dat wil zeggen de hoek die de voerstraal (de verbindingslijn van z met de oorsprong) met de positieve x-as maakt (zie figuur 3).



Figuur 3: $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$.

Voor elke $z \neq 0$ is het argument (in radialen) weer tot op gehele veelvouden van 2π na bepaald. Voor $z = 0$ is er geen argument; soms neemt men echter $\arg(0) = 0$. De verkorte notatie uit de vorige paragraaf geeft

$$z = re^{i\varphi}$$

Men noemt dit wel de (r, φ)-*notatie* of *polaire notatie* (omdat ze verwant is met poolcoördinaten). De (r, φ)-notatie is bijzonder handig bij het vermenigvuldigen en delen:

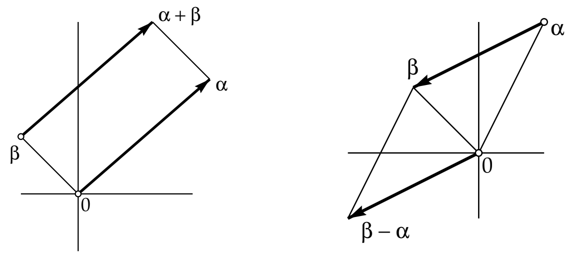
$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_1}}{r_2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Bij vermenigvuldigen worden de absolute waarden met elkaar vermenigvuldigd en de argumenten bij elkaar opgeteld. Bij delen worden de absolute waarden gedeeld en de argumenten van elkaar afgetrokken.

7 Complexe getallen als vectoren

Een vector in het vlak kun je je voorstellen als een pijl die van een *beginpunt* naar een *eindpunt* loopt. Evenwijdige pijlen met dezelfde richting en dezelfde grootte stellen dezelfde vector voor. In het complexe vlak kun je bij elk complex getal α een vector maken door de pijl te tekenen die van de oorsprong naar het punt α loopt. Die vector kan dan ook worden voorgesteld door de pijl die van een willekeurig punt β naar het punt $\beta + \alpha$ loopt want de punten 0, α, $\alpha + \beta$, β vormen de hoekpunten van een parallellogram (zie figuur 4). Omgekeerd hoort bij elke vector een complex getal, namelijk het getal dat je krijgt als eindpunt wanneer je die vector in de oorsprong laat beginnen.



Figuur 4: De vector α (links) en de verschilvector $\beta - \alpha$ (rechts).

De vectorvoorstelling is handig als je het *verschil* $\beta - \alpha$ van twee complexe getallen α en β in beeld wilt brengen (zie figuur 4, rechts):

$\beta - \alpha$ is de vector (pijl) die van α naar β loopt.

Let op: om het complexe getal $\beta - \alpha$ te vinden, moet je die pijl dus in de oorsprong laten beginnen. Voorbeeld: $\alpha = 1 + 2\,\mathrm{i}$, $\beta = -1 + \mathrm{i}$ dus $\beta - \alpha = -2 - \mathrm{i}$.

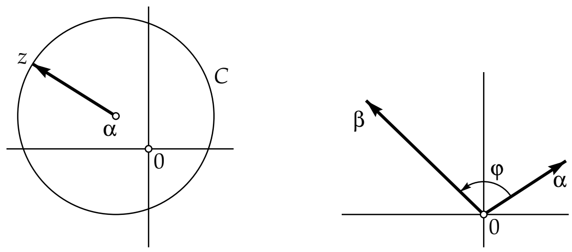
De vectorvoorstelling is ook handig bij het werken met cirkels. Als C een cirkel is met middelpunt α en straal r dan geldt dus voor elk punt z op C dat

$$|z - \alpha| = r$$

Je kunt je $z - \alpha$ voorstellen als de pijl die van α naar z loopt, en die moet dus lengte r hebben (zie figuur 5, links).

Soms is het ook handig om niet met de absolute waarde te werken, maar gebruik te maken van $|w|^2 = w\overline{w}$. Dan kun je de vergelijking van de cirkel C met middelpunt α en straal r dus schrijven als

$$(z - \alpha)(\overline{z} - \overline{\alpha}) = r^2$$



Figuur 5: In de linker figuur de vectorvoorstelling van de cirkel $|z-\alpha| = r$ met middelpunt α, in de rechter figuur het argument φ van een quotiënt β/α als gerichte hoek tussen de twee vectoren.

Ik sluit dit stukje vectormeetkunde af met nog een opmerking over quotiënten. Bij gegeven α en β is $\dfrac{\beta}{\alpha}$ een complex getal waarvan het argument gelijk is aan de hoek φ van de vector α naar de vector β, dat wil zeggen de hoek waarover je de pijl van 0 naar α linksom moet draaien om hem op de pijl van 0 naar β te krijgen (figuur 5, rechts). Er geldt immers dat $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{|\beta|}{|\alpha|}\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}$ waarbij

$$\varphi = \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \arg(\beta) - \arg(\alpha)$$

Een gevolg hiervan is de betrekking

$$\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = \frac{|\beta|}{|\alpha|}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}\,\frac{|\alpha|}{|\beta|}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi} = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\varphi}$$

die ik hieronder in een leuke meetkundige toepassing zal gebruiken. Bedenk hierbij dat

$$\arg\left(\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}\right) = \arg(\overline{\alpha}) - \arg(\overline{\beta}) = -\arg(\alpha) + \arg(\beta) = \varphi$$

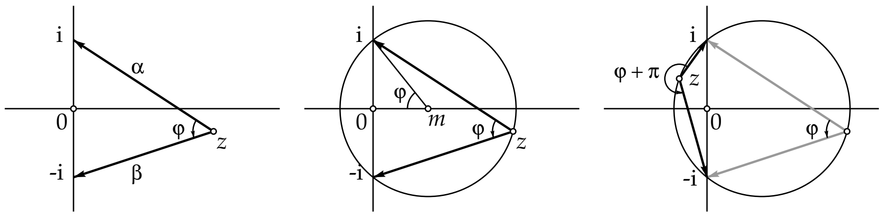
8 Cirkels en koordenvierhoeken

De afgelopen tien jaren is in vwo wiskunde B2 ruime aandacht besteed aan redeneren en bewijzen, onder andere aan de hand van allerlei stellingen over cirkels, omtrekshoeken, middelpuntshoeken en koordenvierhoeken. Die stof zal waarschijnlijk in het nieuwe vak wiskunde B niet meer terugkeren; voor het vervolgonderwijs is dat onderwerp, en in het bijzonder de daar gebruikte 'euclidisch-synthetische' behandeling ervan, namelijk niet erg relevant. Toch zullen veel leraren het leuk vinden om te zien hoe al die stellingen op eenvoudige wijze met complexe getallen kunnen worden bewezen.

Ik sluit daartoe aan op de zojuist afgeleide betrekking, die ik nu in de volgende vorm schrijf

$$\frac{\beta}{\alpha} = e^{2i\varphi}\,\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$$

Ik kies een punt z in het rechterhalfvlak en noem $\alpha = i - z$ en $\beta = -i - z$. De vector α is dan de pijl die van z naar i loopt, en de vector β is de pijl die van z naar $-i$ loopt. De hoek φ is de ingesloten hoek, de hoek waarover je α linksom moet draaien om hem op β te laten vallen. Die hoek ligt altijd tussen 0 en π als z in het rechterhalfvlak ligt (zie figuur 6, links).



Figuur 6: Het punt z in het rechterhalfvlak (linker figuur), de cirkel (middenfiguur) en het punt z in het linkerhalfvlak op de cirkel (rechter figuur).

Wegens $\overline{i} = -i$ geldt dan

$$\frac{-i - z}{i - z} = e^{2i\varphi}\frac{i - \overline{z}}{-i - \overline{z}}$$

oftewel

$$(z + i)(\overline{z} + i) = e^{2i\varphi}(z - i)(\overline{z} - i)$$

en dit kan weer geschreven worden als

$$z\overline{z}\left(1 - e^{2i\varphi}\right) + i\left(1 + e^{2i\varphi}\right)z + i\left(1 + e^{2i\varphi}\right)\overline{z} - \left(1 - e^{2i\varphi}\right) = 0$$

Deel deze vergelijking door $2i\,e^{i\varphi}$ en gebruik de formules van Euler voor $\sin\varphi$ en $\cos\varphi$. Dan ontstaat

$$-(\sin\varphi)z\overline{z} + (\cos\varphi)z + (\cos\varphi)\overline{z} + \sin\varphi = 0$$

Als je vervolgens door $-\sin\varphi$ deelt en

$$m = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\tan\varphi}$$

noemt, dan ontstaat de vergelijking

$$z\overline{z} - mz - m\overline{z} - 1 = 0$$

oftewel

$$(z - m)(\overline{z} - m) = 1 + m^2$$

Dit is niets anders dan de vergelijking van de cirkel met middelpunt m (het reele getal m, dus als complex getal ligt het op de reële as) en straal $r = \sqrt{1 + m^2}$.

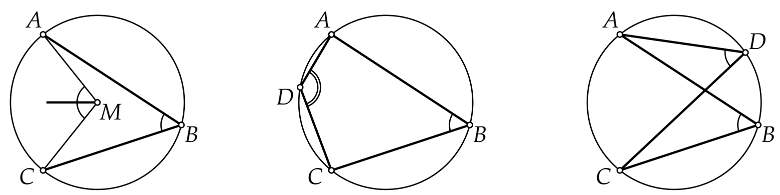
We hebben dus bewezen dat z op deze cirkel ligt! Merk nog op dat je hoek φ ook terugvindt bij het middelpunt m, want $\tan\varphi = \dfrac{1}{m}$. En bijgevolg geldt ook $\angle(-\mathrm{i}, m, \mathrm{i}) = 2\varphi$ (figuur 6, midden).

De oogst van deze algebraïsche exercitie is indrukwekkend: allereerst zie je dat *alle* punten z in het rechterhalfvlak waarvoor $\angle(\mathrm{i}, z, -\mathrm{i}) = \varphi$ geldt, op deze cirkel liggen. Maar je kunt de redenering ook in de omgekeerde richting lezen. Voor alle punten op de cirkel in het rechterhalfvlak geldt dus $\angle(\mathrm{i}, z, -\mathrm{i}) = \varphi$.

Voor punten z in het linkerhalfvlak ligt de hoek waarover je de pijl α linksom moet draaien om hem op β te laten vallen, tussen π en 2π (figuur 6, rechts). Als je voor die hoek $\varphi + \pi$ neemt, kom je op dezelfde cirkelvergelijking uit, want $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\varphi+\pi)} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}$. Omgekeerd voldoen ook alle punten z die in het linkerhalfvlak op die cirkel liggen, aan $\angle(\mathrm{i}, z, -\mathrm{i}) = \varphi + \pi$ want ook hier kun je de redenering in de omgekeerde richting lezen.

In feite hebben we in het bovenstaande een hele serie stellingen uit de vlakke meetkunde over cirkels bewezen. Immers, de keuze voor de punten i en $-\mathrm{i}$ als 'ankerpunten' waar de hele berekening op gebaseerd is, is geen beperking van de algemeenheid. Bij elk tweetal punten P en Q in het vlak kun je een rechthoekig coördinatenstelsel kiezen waarin $P = (0, 1)$ en $Q = (0, -1)$ is, of uitgedrukt in complexe getallen, waarin $P = \mathrm{i}$ en $Q = -\mathrm{i}$ is.

Hier is een lijst van stellingen die we bewezen hebben. In alle gevallen hoef je slechts $A = \mathrm{i}$ en $C = -\mathrm{i}$ te nemen, en voor de punten B of D het variabele punt z te lezen, om de bewijzen van die stellingen uit de bovenstaande berekening te destilleren. Ga dit zelf na. De stellingen worden geïllustreerd in figuur 7.



Figuur 7: Omtrekshoeken, middelpuntshoeken en koordenvierhoeken.

1. Als de punten A, B en C op een cirkel met middelpunt M liggen, dan geldt $\angle(A, B, C) = \frac{1}{2}\angle(A, M, C)$.

2. Als A, B, C, D in deze volgorde op een cirkel liggen (men noemt $ABCD$ dan een koordenvierhoek), dan geldt dat $\angle(A, B, C) + \angle(C, D, A) = \pi$.

3. Als de punten B en D aan weerszijden van een lijn AC liggen en als geldt dat $\angle(A, B, C) + \angle(C, D, A) = \pi$ dan liggen A, B, C en D in deze volgorde op een cirkel, met andere woorden, dan is $ABCD$ een koordenvierhoek.

4. Als de punten B en D aan dezelfde kant van een lijn AC liggen en als geldt dat $\angle(A, B, C) = \angle(A, D, C)$ dan liggen A, B, C en D op een cirkel.

9 De complexe e-macht

Op bladzijde 5 hebben we gezien dat

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Deze formule van Euler definieert de functie $w = e^z$ voor alle zuiver imaginaire waarden van z, dat wil zeggen voor alle z van de vorm $z = iy$ (ik schrijf nu y in plaats van φ). Voor reële x is de functie $w = e^x$ welbekend: het is de vertrouwde reële e-machtfunctie.

Voor een willekeurig complex getal $z = x + iy$ (met x en y reëel) definieert men de e-macht als volgt: $e^z = e^x e^{iy}$, dus

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Het is niet moeilijk om na te gaan dat de aldus gedefinieerde functie e^z de volgende eigenschappen heeft:

- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ voor elke z_1 en z_2.
- $|e^{x+iy}| = e^x$ en $\arg\left(e^{x+iy}\right) = y + 2k\pi$ (k geheel).
- $e^{z+2k\pi i} = e^z$ voor elk geheel getal k, met andere woorden, de e-macht is *periodiek* met periode $2\pi i$.

Men kan ook bewijzen, maar dat is lastiger, dat de e-machtfunctie differentieerbaar is en gelijk is aan zijn eigen afgeleide, dat wil zeggen dat voor elk complex getal z geldt dat

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{e^{z+\Delta z} - e^z}{\Delta z} = e^z$$

De formules van Euler op bladzijde 6 stellen ons in staat de sinusfunctie en de cosinusfunctie voor complexe getallen te definiëren met behulp van de complexe e-macht. Dat gaat als volgt:

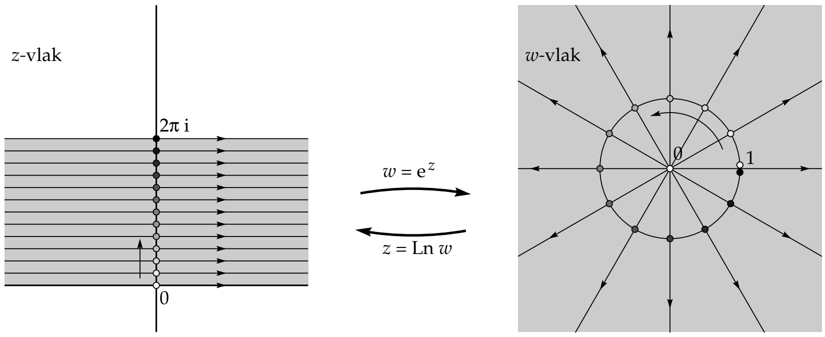
$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\end{aligned}$$

Het is niet moeilijk om te verifiëren dat deze beide functies periodiek zijn met periode 2π en dat ze verder ook voldoen aan alle bekende gonioformules, inclusief de formules

$$(\sin z)' = \cos z \qquad \text{en} \qquad (\cos z)' = -\sin z$$

10 De complexe natuurlijke logaritme

Bij reële functies is de natuurlijke logaritme de inverse van de e-macht. Hoe zit dat met de complexe natuurlijke logaritme en de complexe e-macht? Om dat te onderzoeken, zal ik de complexe e-machtfunctie nader onder de loupe nemen. Dat gaat het beste aan de hand van figuur 8. Dat is een soort grafiek waarin ik voor de functie $w = \mathrm{e}^{z}$ apart een z-vlak en een w-vlak heb getekend, met daarin aangegeven welke w-waarden bij welke z-waarden horen.



Figuur 8: De functies $w = \mathrm{e}^{z}$ en $z = \mathrm{Ln}\, w$ in beeld gebracht.

In het z-vlak is de horizontale strook $0 \leq y \leq 2\pi$ grijs gemaakt. Het stukje van de y-as dat binnen deze strook ligt, wordt op de aangegeven wijze afgebeeld op de eenheidscirkel in het w-vlak. En elke horizontale lijn in het z-vlak komt in het w-vlak terecht op een straal vanuit de oorsprong in het w-vlak. De horizontale strook $0 \leq y \leq 2\pi$ in het z-vlak wordt dus afgebeeld op het *gehele* w-vlak, met uitzondering van de oorsprong. Er is immers geen z waarvoor $\mathrm{e}^{z} = 0$ geldt.

Er is nog wat bijzonders aan de hand: de bovenrand van de strook (dat wil zeggen de lijn $y = 2\pi$) komt op *dezelfde* straal terecht als de onderrand $y = 0$ want voor elke x geldt immers $\mathrm{e}^{x+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{x}$. Sterker nog, voor elke z geldt $\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{z}$, de e-machtfunctie is immers periodiek met periode $2\pi\mathrm{i}$. Nog weer anders gezegd: als we een *willekeurige* horizontale strook nemen met hoogte 2π, dan is het beeld ervan onder de functie $w = \mathrm{e}^{z}$ het gehele w-vlak met uitzondering van het punt $w = 0$.

Wat betekent dat nu voor de inverse functie, de natuurlijke logaritme? Met andere woorden, als je een complex getal w in het w-vlak neemt, wat is dan het complexe getal z dat daarbij hoort, dat wil zeggen dat $\mathrm{e}^{z} = w$? Daar is geen eenduidig antwoord op te geven. Er zijn nu bij elke gegeven $w \neq 0$ *oneindig veel* kandidaten z. Heb je één getal z waarvoor geldt dat $\mathrm{e}^{z} = w$, dan geldt immers ook voor alle getallen van de vorm $z + 2k\pi\mathrm{i}$ dat $\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}} = w$.

Het is eigenlijk net als met het argument van een complex getal: dat is op gehele veelvouden van 2π na bepaald. En zo is de natuurlijke logaritme van een complex getal tot op gehele veelvouden van $2\pi\mathrm{i}$ na bepaald. De natuurlijke logaritme is dus *meerwaardig*. De oorsprong is een *vertakkingspunt*. Loop je in het w-vlak één maal om de oorsprong, dan ga je in het z-vlak van de ene strook naar de volgende strook. Ook dat is in figuur 8 goed te zien.

In de notatie zal ik onderscheid maken tussen de *complexe* natuurlijke logaritme, die dus oneindig veel waarden heeft, en de bekende *reële* natuurlijke logaritme $\ln r$ van een positief reëel getal r die maar één (reële) waarde heeft. Voor de complexe logaritme zal ik een hoofdletter gebruiken, dus $\operatorname{Ln} w$. Als ik een kleine letter gebruik, bedoel ik de reële natuurlijke logaritme die je kent van school en van de rekenmachine.

Hoe bereken je nu $\operatorname{Ln} w$ voor een gegeven complex getal $w \neq 0$? Dat gaat als volgt. Schrijf w in de (r, φ)-notatie, dus $w = r\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}$ met bijvoorbeeld $0 \leq \varphi < 2\pi$. Dan is

$$\operatorname{Ln} w = \ln r + \varphi\,\mathrm{i} + 2k\pi\,\mathrm{i}$$

waarbij k de gehele getallen doorloopt. Ik geef wat voorbeelden; controleer ze zelf door links en rechts de e-macht te nemen, maar ook meetkundig aan de hand van figuur 8.

- $\operatorname{Ln} 1 = 2k\pi\,\mathrm{i}$
- $\operatorname{Ln}(-1) = \pi\,\mathrm{i} + 2k\pi\,\mathrm{i}$
- $\operatorname{Ln} \mathrm{e} = 1 + 2k\pi\,\mathrm{i}$
- $\operatorname{Ln} \mathrm{i} = \frac{1}{2}\pi\,\mathrm{i} + 2k\pi\,\mathrm{i}$
- $\operatorname{Ln}(1 + \mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + \frac{1}{4}\pi\,\mathrm{i} + 2k\pi\,\mathrm{i}$

11 Willekeurige complexe machten α^β

Met behulp van de complexe e-macht en de complexe natuurlijke logaritme definieert men voor willekeurige complexe getallen α en β met $\alpha \neq \mathrm{e}$ en $\alpha \neq 0$ als volgt wat men onder α^β verstaat:

$$\alpha^\beta = \mathrm{e}^{\,\beta \operatorname{Ln} \alpha}$$

Dit naar analogie van de bekende reële rekenregel

$$a^b = \mathrm{e}^{\,\ln a^b} = \mathrm{e}^{\,b \ln a}$$

Maar uit α^β zullen nu in het algemeen verschillende waarden komen, want de complexe logaritme is meerwaardig. Zelfs als α en β reëel zijn kan dit gebeuren, bijvoorbeeld bij $2^{\sqrt{2}}$

$$2^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\,\sqrt{2}\operatorname{Ln} 2} = \mathrm{e}^{\,\sqrt{2}(\ln 2 + 2k\pi\,\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\,\sqrt{2}\ln 2}\,\mathrm{e}^{\,2\sqrt{2}k\pi\,\mathrm{i}}$$

Dit zijn oneindig veel complexe getallen op de cirkel met de oorsprong als middelpunt en het positieve reële getal $\mathrm{e}^{\,\sqrt{2}\ln 2}$ als straal. Precies één van die getallen is de bekende reële macht, namelijk $2^{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\,\sqrt{2}\ln 2} \approx 2.828427124$ (neem $k = 0$).

Niet alle machten α^β met $\alpha \neq \mathrm{e}$ hebben oneindig veel uitkomsten. α^β heeft maar één uitkomst als β een *geheel* reëel getal n is. Immers,

$$\alpha^n = \mathrm{e}^{\,n \operatorname{Ln} \alpha} = \mathrm{e}^{\,n(\ln|\alpha| + \arg\alpha\,\mathrm{i} + 2k\pi\,\mathrm{i}\,)} = \mathrm{e}^{\,n(\ln|\alpha| + \arg\alpha\,\mathrm{i}\,)}\mathrm{e}^{\,2kn\pi\,\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\,n(\ln|\alpha| + \arg\alpha\,\mathrm{i}\,)}$$

want voor alle gehele k geldt $\mathrm{e}^{\,2kn\pi\,\mathrm{i}} = 1$.

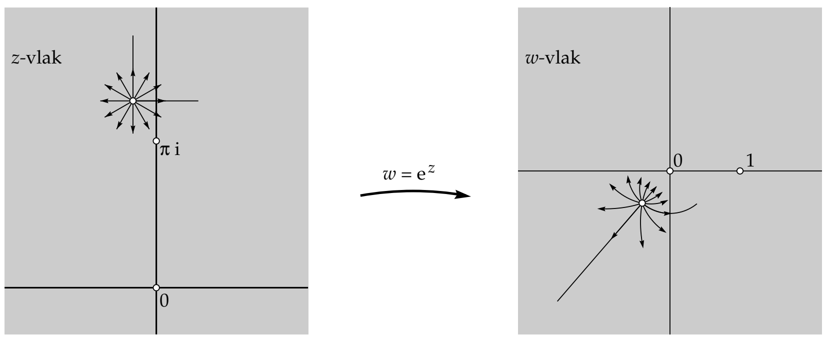
Evenzo heeft α^β precies m verschillende uitkomsten als β een reële onvereenvoudigbare breuk is met m als noemer. In het bijzonder heeft elk complex getal $\alpha \neq 0$ dus precies m m-demachtswortels (neem $\beta = \frac{1}{m}$). Voor $m = 2$ krijgt elk complex getal op die manier twee vierkantswortels. Zo kun je bijvoorbeeld controleren dat $1^{\frac{1}{2}} = \pm 1$ en $(-1)^{\frac{1}{2}} = \pm\,\mathrm{i}$ (doen!).

Een leuke opgave is het verder om te berekenen wat er uit $\mathrm{i}^{\,\mathrm{i}}$ komt. Het antwoord verraste zelfs Euler!

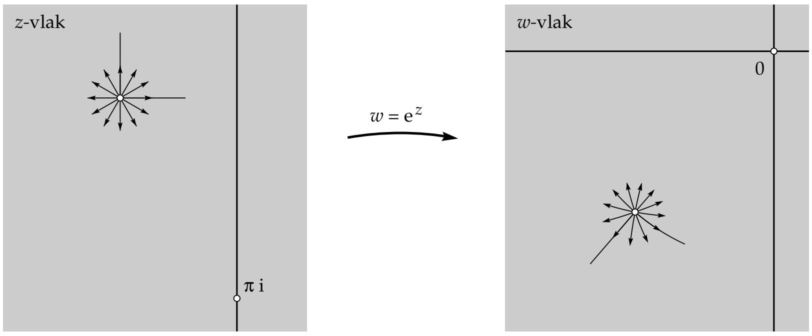
12 Differentieerbaarheid

In figuur 9 zie je hoe een rechtlijnig rozetje met als centrum het punt $z_0 = -\frac{1}{2} + 4\,\mathrm{i}$ door de functie $w = \mathrm{e}^{\,z}$ wordt afgebeeld op een kromlijnig rozetje met als centrum $w_0 = \mathrm{e}^{\,z_0} = \mathrm{e}^{\,-\frac{1}{2}+4\,\mathrm{i}}$. De stralen in het z-rozetje in de richting van de positieve x-as en de positieve y-as zijn wat verlengd, evenals hun beelden, zodat je enig houvast hebt bij het bestuderen ervan.

Het punt z_0 is willekeurig gekozen. Waar het om gaat, is het feit dat het beeldrozetje in het w-vlak enige gelijkenis vertoont met het z-rozetje, en dat die gelijkenis beter wordt naarmate het z-rozetje kleiner wordt gekozen. In figuur 9 hebben de pijltjes in het z-rozetje lengte 0.7. Maak je ze vijf keer zo klein dan zal het w-rozetje ook ongeveer vijf keer zo klein worden, en de kromme lijnen ervan gaan dan steeds meer op rechte lijnen lijken (figuur 10).



Figuur 9: Een rechtlijnig rozetje in het z-vlak met centrum $z_0 = -\frac{1}{2} + 4\,\mathrm{i}$ wordt door de functie $w = \mathrm{e}^{\,z}$ afgebeeld op een kromlijnig rozetje met centrum $w_0 = \mathrm{e}^{\,z_0}$ in het w-vlak.



Figuur 10: Een vijf maal zo klein rozetje in het z-vlak (weer met centrum z_0) met zijn beeldrozetje (centrum $w_0 = w(z_0)$) in het w-vlak.

Waarom is dat zo? Dat hangt samen met de *differentieerbaarheid*. Die houdt in het algemeen voor een complexe functie $w = w(z)$ in dat

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{w(z_0 + \Delta z) - w(z_0)}{\Delta z} = w'(z_0)$$

bestaat als eindig complex getal, oftewel, iets slordiger gezegd, dat $\Delta w \approx w'(z_0)\Delta z$ voor kleine Δz. Het z-rozetje kun je opvatten als bestaande uit kleine vectoren Δz, allemaal even lang, en elke Δw krijg je dus in eerste benadering door zo'n vectortje Δz te vermenigvuldigen met het vaste complexe getal $w'(z_0)$. Vermenigvuldigen van Δz met $w'(z_0)$ betekent dat $|\Delta z|$ vermenigvuldigd wordt met $|w'(z_0)|$ en dat er bij het argument van Δz het argument van $w'(z_0)$ wordt opgeteld.

Als $w'(z_0) \neq 0$ is, betekent de differentieerbaarheid van de functie $w = w(z)$ in het punt z_0 dus dat kleine z-rozetjes (vrijwel) *gelijkvormig* worden afgebeeld op w-rozetjes. Zo'n w-rozetje ontstaat uit het z-rozetje door het te vergroten met een factor $|w'(z_0)|$ en te draaien over een hoek $\arg(w'(z_0))$. In de figuren 9 en 10 is $z_0 = -\frac{1}{2} + 4\,\mathrm{i}$ en $w(z) = \mathrm{e}^z$ dus $w'(z_0) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}+4\,\mathrm{i}}$ en $|w'(z_0)| = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0.6065$ en $\arg(w'(z_0)) = 4$ (ongeveer 230 graden). Let erop dat het z-vlak en het w-vlak in de beide figuren niet op dezelfde schaal zijn getekend.

Differentieerbaarheid impliceert dus *gelijkvormigheid in het klein*, althans als de afgeleide niet nul is. De vakterm hiervoor is *conformiteit*. Als een complexe functie differentieerbaar is op een gebied in het z-vlak en de afgeleide is daar niet nul, dan wordt dat gebied *conform* afgebeeld in het w-vlak. Snijden twee krommen elkaar in zo'n gebied in het z-vlak onder een gerichte hoek φ, dan zullen de beeldkrommen elkaar in het w-vlak onder *dezelfde* hoek φ snijden.

13 Een criterium voor differentieerbaarheid

Stel dat $w = w(z)$ een complexe functie is die gedefinieerd is op een gebied G in het complexe vlak (een *gebied* is een open samenhangend deel van het complexe vlak). Als voorbeeld kun je denken aan de functie $w = \mathrm{e}^{z}$, waarbij G het gehele complexe vlak is.

Bij zo'n complexe functie zijn zowel de originelen z als de beelden $w = w(z)$ complexe getallen. Ze hebben dus beide een reëel deel en een imaginair deel. Stel $z = x + \mathrm{i}\, y$ en $w = u + \mathrm{i}\, v$ met x, y, u en v reëel. Je kunt u en v dan opvatten als reële functies van de twee reële variabelen x en y, dus $u = u(x, y)$ en $v = v(x, y)$. In het voorbeeld $w = \mathrm{e}^{z}$ geldt

$$w = u + \mathrm{i}\, v = \mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\, y} = \mathrm{e}^{x}\cos y + \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{x}\sin y$$

dus

$$u = u(x, y) = \mathrm{e}^{x}\cos y \qquad \text{en} \qquad v = v(x, y) = \mathrm{e}^{x}\sin y$$

Differentieerbaarheid van de complexe functie $w = w(z)$ in een punt $z_0 \in G$ wil zeggen dat de limiet

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{w(z_0 + \Delta z) - w(z_0)}{\Delta z} = w'(z_0)$$

bestaat als eindig (complex) getal. In figuur 10 hebben we daar een meetkundig beeld van gegeven in het geval dat $w'(z_0) \neq 0$. Een klein rozetje van vectoren Δz met centrum z_0 wordt (vrijwel) *gelijkvormig* afgebeeld op een rozetje van vectoren Δw, waarbij de vergrotingsfactor gelijk is aan $|w'(z_0)|$ en de draaiingshoek gelijk is aan $\arg(w'(z_0)$. Er geldt immers $\Delta w \approx w'(z_0)\Delta z$.

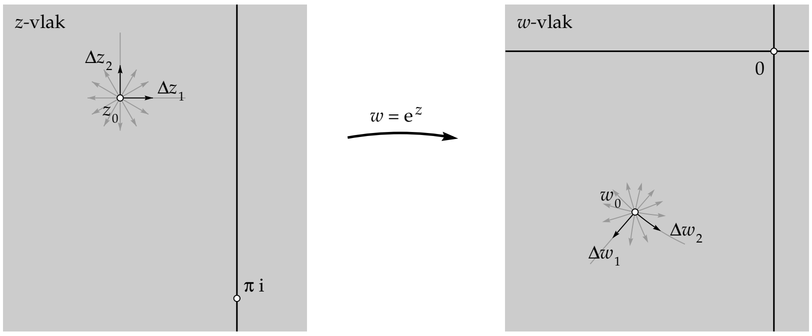
Wat betekent dat nu in termen van de functies $u = u(x, y)$ en $v = v(x, y)$? Het is heel gemakkelijk om een *noodzakelijke voorwaarde* voor differentieerbaarheid in z_0 af te leiden.

Stelling 1: *Als $w = w(z)$ differentieerbaar is in $z_0 = x_0 + \mathrm{i}\, y_0$ dan gelden voor de partiële afgeleiden van de functies $u = u(x, y)$ en $v = v(x, y)$ (met $w = u + \mathrm{i}\, v$) in het punt (x_0, y_0) de zogenaamde* Cauchy-Riemannvergelijkingen *(genoemd naar A.L. Cauchy (1789-1857) en B. Riemann (1826-1866))*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Een intuïtieve afleiding wordt geïllustreerd in figuur 11. Neem voor Δz eerst een klein horizontaal naar rechts gericht pijltje Δz_1. Noem het bijbehorende pijlje in het w-vlak Δw_1. Neem vervolgens voor Δz een even lang, maar nu verticaal omhoog gericht pijltje Δz_2. Noem het bijbehorende pijltje in het w-vlak Δw_2. Dan geldt wegens de conformiteit dat Δw_2 uit Δw_1 ontstaat door draaien over een hoek van $\frac{\pi}{2}$, dat wil zeggen dat $\Delta w_2 \approx \mathrm{i}\, \Delta w_1$. Draaien over $\frac{\pi}{2}$ tegen de klok in correspondeert immers met vermenigvuldigen met i. Als $\Delta w_1 = \Delta u_1 + \mathrm{i}\, \Delta v_1$ en $\Delta w_2 = \Delta u_2 + \mathrm{i}\, \Delta v_2 \approx \mathrm{i}\,(\Delta u_1 + \mathrm{i}\, \Delta v_1) = -\Delta v_1 + \mathrm{i}\, \Delta u_1$, geldt dus

$$\Delta u_2 \approx -\Delta v_1 \qquad \text{en} \qquad \Delta u_1 \approx \Delta v_2$$



Figuur 11: Bij de afleiding van de Cauchy-Riemannvergelijkingen.

De Cauchy-Riemannvergelijkingen zijn plausibel als je denkt aan de eersteordebenaderingen voor deze differenties. Neem $\Delta z_1 = h$ en $\Delta z_2 = \mathrm{i}\,h$ voor een klein positief reëel getal h. Dan is

$$\begin{aligned}
\Delta u_1 = u(x_0+h, y_0) - u(x_0, y_0) &\approx \frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y_0)\, h \\
\Delta u_2 = u(x_0, y_0+h) - u(x_0, y_0) &\approx \frac{\partial}{\partial y} u(x_0, y_0)\, h \\
\Delta v_1 = v(x_0+h, y_0) - v(x_0, y_0) &\approx \frac{\partial}{\partial x} v(x_0, y_0)\, h \\
\Delta v_2 = v(x_0, y_0+h) - v(x_0, y_0) &\approx \frac{\partial}{\partial y} v(x_0, y_0)\, h
\end{aligned}$$

Het is eenvoudig om deze ideeën uit te werken tot een formeel bewijs. Omdat aangenomen is dat de limiet $w'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ bestaat als eindig complex getal, onafhankelijk van de manier waarop Δz naar nul gaat, kunnen we in het bijzonder die limiet nemen door Δz zuiver reëel te nemen: zeg $\Delta z = h$. Dan is

$$\begin{aligned}
w'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{h \to 0} \frac{w(z_0+h) - w(z_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(u(x_0+h, y_0) + \mathrm{i}\, v(x_0+h, y_0)) - (u(x_0, y_0) + \mathrm{i}\, v(x_0, y_0))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0+h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + \mathrm{i} \lim_{h \to 0} \frac{v(x_0+h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y_0) + \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial x} v(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

Maar je kunt Δz ook langs de verticale as naar nul laten gaan, dus $\Delta z = \mathrm{i}\,h$. Dan krijg je, als je bedenkt dat delen door i hetzelfde is als vermenigvuldigen met $-\mathrm{i}$ (want $\mathrm{i}^2 = -1$):

$$\begin{aligned}
w'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{h \to 0} \frac{w(z_0 + \mathrm{i}\,h) - w(z_0)}{\mathrm{i}\,h} \\
&= -\mathrm{i} \lim_{h \to 0} \frac{(u(x_0, y_0+h) + \mathrm{i}\, v(x_0, y_0+h)) - (u(x_0, y_0) + \mathrm{i}\, v(x_0, y_0))}{h}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0, y_0+h) - v(x_0,y_0)}{h} - \mathrm{i} \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0, y_0+h) - u(x_0,y_0)}{h} \\
&= \frac{\partial}{\partial y} v(x_0,y_0) - \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y} u(x_0,y_0)
\end{aligned}
$$

Gelijkstellen van de reële delen en de imaginaire delen in de beide gevonden uitdrukkingen voor $w'(z_0)$ resulteert in de Cauchy-Riemannvergelijkingen.

Als voorbeeld nemen we weer $w = \mathrm{e}^{z}$, dus $u = e^x \cos y$ en $v = \mathrm{e}^{x} \sin y$. Aan de Cauchy-Riemannvergelijkingen is voldaan want $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$ en $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$. De beide gevonden uitdrukkingen voor $w'(z_0)$ zijn in dit geval (ik schrijf voor het gemak z in plaats van z_0)

$$
(\mathrm{e}^{z})' = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + \mathrm{i}\, e^x \sin y = \mathrm{e}^{z}
$$

en

$$
(\mathrm{e}^{z})' = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + \mathrm{i}\, e^x \sin y = \mathrm{e}^{z}
$$

hetgeen opnieuw ondersteunt dat de e-machtfunctie gelijk is aan zijn eigen afgeleide.

Nogmaals differentieerbaarheid

In de vorige sectie hebben we de Cauchy-Riemannvergelijkingen behandeld. Als een complexe functie die gedefinieerd is op een gebied G, differentieerbaar is in een punt $z_0 \in G$, dan gelden daar de Cauchy-Riemannvergelijkingen. Maar dit is slechts een *noodzakelijke* voorwaarde; voldoende is ze niet. Echter, onder tamelijk milde extra voorwaarden garanderen ze de differentieerbaarheid wél. Zo geldt bijvoorbeeld

Stelling 2: *Als de functie $w = w(z)$ met $w = u + \mathrm{i}\,v$ op een gebied G gedefinieerd is en als de (reële) functies $u = u(x,y)$ en $v = v(x,y)$ op G aan de Cauchy-Riemannvergelijkingen voldoen, en als bovendien geldt dat de partiële afgeleiden van u en v naar x en y continu zijn op G, dan is w in elk punt van G differentieerbaar.*

Een bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van deze cursus. Gewapend met deze stelling kan men echter bewijzen dat de functie e^{z} inderdaad differentieerbaar is op het hele complexe vlak, en dat hetzelfde geldt voor de functies $\sin z$ en $\cos z$. Polynomen zijn differentieerbaar en rationale functies (quotiënten van polynomen) zijn differentieerbaar op elk gebied dat geen nulpunten van de noemer bevat. Elke tak van de de complexe natuurlijke logaritme $\operatorname{Ln} z$ is differentieerbaar op elk gebied G dat de oorsprong niet bevat. Voor elke tak geldt dat $(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}$. Ook wortelfuncties en andere niet-gehele machten zijn differentieerbaar op elk gebied dat de oorsprong niet bevat. De algemene formule $(z^{\beta})' = \beta\, z^{\beta-1}$ blijft geldig.

Maar niet alle functies zijn differentieerbaar: de eis dat ze moeten voldoen aan de Cauchy-Riemannvergelijkingen is een zware eis. Ook meetkundig is dat duidelijk: de conformiteit (gelijkvormige rozetjes) is een geduchte voorwaarde. Zo is het bijvoorbeeld direct meetkundig duidelijk dat de absolutewaardefunctie $w(z) = |z|$ niet differentieerbaar is, evenmin als de conjugatiefunctie $w(z) = \bar{z}$. Je kunt ook gemakkelijk verifiëren dat deze beide functies niet aan de Cauchy-Riemannvergelijkingen voldoen.

Wanneer een functie $w = w(z)$ differentieerbaar is op een gebied G, zal zo'n functie dus allerlei bijzondere eigenschappen hebben. Sommige daarvan zijn zeer verrassend. Ze maken dat de theorie van de *complex* differentieerbare functies totaal anders is dan die van de bekende reëel differentieerbare functies. Hier volgen twee van die eigenschappen.

Stelling 3: *Stel dat $w = w(z)$ een complexe functie is die gedefinieerd is op een gebied G. Als $w(z)$ differentieerbaar is op G, dan geldt*

1. *$w(z)$ is op G* oneindig vaak *differentieerbaar.*
2. *$w(z)$ is* analytisch *op G, dat wil zeggen: bij elk punt $z_0 \in G$ is er een getal $R > 0$ zo, dat $w(z)$ in de cirkel $|z - z_0| < R$ ontwikkeld kan worden in een convergente machtreeks $w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$*

Vooral de eerste eigenschap is verrassend, en totaal anders dan in het reële geval: éénmaal differentieerbaar betekent oneindig vaak differentieerbaar! Ook de tweede eigenschap is verrassend: in het reële geval zijn er voorbeelden van differentieerbare functies die geen machtreeksontwikkeling hebben. Juist omdat complexe differentieerbaarheid zo'n zware eis is, hebben de functies die eraan voldoen (en dat zijn er heel wat!) tal van indrukwekkende eigenschappen die ze nuttig maken voor de meest uiteenlopende toepassingen. De theorie waarin dit bestudeerd wordt, is de *complexe functietheorie*. In deze bijdrage aan de vacantiecurus heb ik de deur naar dit gebied op een kiertje gezet.

Zie mijn homepage https://staff.fnwi.uva.nl/j.vandecraats/ voor een uitgebreide beginnerscursus *Complexe getallen voor wiskunde D* met veel oefenopgaven.