Vlakke euclidische meetkunde

Een moderne aanpak

Technische Universiteit Delft, 8 januari 2013

Jan van de Craats

Universiteit van Amsterdam

Achtergrondmateriaal

Deze voordracht is gebaseerd op mijn artikel

Vlakke meetkunde met coördinaten

(verder aan te duiden als [VMC]) dat te vinden is op mijn homepage. Zie:

`http://staff.science.uva.nl/~craats/mtcoord.pdf`

Wat is een euclidisch vlak?

Wat is een euclidisch vlak?

In de vlakke meetkunde zoals we die ‘in het dagelijks leven’ tegenkomen, is sprake van

Wat is een euclidisch vlak?

In de vlakke meetkunde zoals we die ‘in het dagelijks leven’ tegenkomen, is sprake van

een puntverzameling (het vlak)

Wat is een euclidisch vlak?

In de vlakke meetkunde zoals we die ‘in het dagelijks leven’ tegenkomen, is sprake van

een puntverzameling (het vlak)

met daarin

punten, lijnen en

Wat is een euclidisch vlak?

In de vlakke meetkunde zoals we die ‘in het dagelijks leven’ tegenkomen, is sprake van

een puntverzameling (het vlak)

met daarin

punten, lijnen en
afstanden (tussen puntenparen).

Wat is een euclidisch vlak?

In de vlakke meetkunde zoals we die ‘in het dagelijks leven’ tegenkomen, is sprake van

een puntverzameling (het vlak)

met daarin

punten, lijnen en
afstanden (tussen puntenparen).

In reële situaties worden afstanden uitgedrukt in een zekere maateenheid. Hier zien we daarvan af. Afstanden zijn nu dus gewoon (niet-negatieve reële) getallen.

Wat is een euclidisch vlak?

In de vlakke meetkunde zoals we die ‘in het dagelijks leven’ tegenkomen, is sprake van

een puntverzameling (het vlak)

met daarin

punten, lijnen en
afstanden (tussen puntenparen).

In reële situaties worden afstanden uitgedrukt in een zekere maateenheid. Hier zien we daarvan af. Afstanden zijn nu dus gewoon (niet-negatieve reële) getallen.

We maken hierbij een wiskundig model, het euclidische vlak. Dat is een idealisatie van de werkelijkheid. (Meer hierover in paragraaf 1.3 van [VMC].)

Wat is een euclidisch vlak?

Men spreekt van een euclidisch vlak als het mogelijk is om een $1-1$ correspondentie aan te brengen tussen de punten van een vlak en de $\mathbb{R}^2$ zodanig dat

Wat is een euclidisch vlak?

Men spreekt van een euclidisch vlak als het mogelijk is om een $1-1$ correspondentie aan te brengen tussen de punten van een vlak en de $\mathbb{R}^2$ zodanig dat

- De lijnen van het vlak corresponderen met de deelverzamelingen van de vorm

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$$

  waarin $a, b, c \in \mathbb{R}$ en waarin bovendien a en b niet beide gelijk aan 0 zijn.

Wat is een euclidisch vlak?

Men spreekt van een euclidisch vlak als het mogelijk is om een $1-1$ correspondentie aan te brengen tussen de punten van een vlak en de $\mathbb{R}^2$ zodanig dat

- De lijnen van het vlak corresponderen met de deelverzamelingen van de vorm

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$$

  waarin $a, b, c \in \mathbb{R}$ en waarin bovendien a en b niet beide gelijk aan 0 zijn.
- De afstand $d(P_1, P_2)$ tussen twee punten P_1 en P_2 die corresponderen met respectievelijk (x_1, y_1) en (x_2, y_2) in $\mathbb{R}^2$ gelijk is aan $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Toegelaten coördinatenstelsels

Toegelaten coördinatenstelsels

Het kiezen van zo'n $1-1$ correspondentie heet het kiezen van een toegelaten coördinatenstelsel in het euclidische vlak.

Toegelaten coördinatenstelsels

Het kiezen van zo'n $1-1$ correspondentie heet het kiezen van een toegelaten coördinatenstelsel in het euclidische vlak.

Als het punt P correspondeert met $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ noemt men (x, y) de coördinaten van P. Men schrijft (enigszins slordig)

$$P = (x, y)$$

Toegelaten coördinatenstelsels

Het kiezen van zo'n $1-1$ correspondentie heet het kiezen van een toegelaten coördinatenstelsel in het euclidische vlak.

Als het punt P correspondeert met $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ noemt men (x, y) de coördinaten van P. Men schrijft (enigszins slordig)

$$P = (x, y)$$

De overgang van één toegelaten coördinatenstelsel op een ander toegelaten coördinatenstelsel noemt men een isometrische coördinatentransformatie (kortweg: isometrie).

Toegelaten coördinatenstelsels

Het kiezen van zo'n $1-1$ correspondentie heet het kiezen van een toegelaten coördinatenstelsel in het euclidische vlak.

Als het punt P correspondeert met $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ noemt men (x, y) de coördinaten van P. Men schrijft (enigszins slordig)

$$P = (x, y)$$

De overgang van één toegelaten coördinatenstelsel op een ander toegelaten coördinatenstelsel noemt men een isometrische coördinatentransformatie (kortweg: isometrie).

Let op: slechts de coördinatenstelsels worden hierbij getransformeerd, niet de figuren in het vlak!

Toegelaten coördinatenstelsels

Het kiezen van zo'n $1-1$ correspondentie heet het kiezen van een toegelaten coördinatenstelsel in het euclidische vlak.

Als het punt P correspondeert met $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ noemt men (x, y) de coördinaten van P. Men schrijft (enigszins slordig)

$$P = (x, y)$$

De overgang van één toegelaten coördinatenstelsel op een ander toegelaten coördinatenstelsel noemt men een isometrische coördinatentransformatie (kortweg: isometrie).

Let op: slechts de coördinatenstelsels worden hierbij getransformeerd, niet de figuren in het vlak!
Voorbeelden: 'translaties', 'rotaties', 'lijnspiegelingen', 'glijspiegelingen'.

De basisstelling

De basisstelling

Stelling (basisstelling): In een euclidisch vlak kun je bij elk drietal punten O, P en Q die niet op één lijn liggen precies één toegelaten coördinatenstelsel kiezen zo, dat

De basisstelling

Stelling (basisstelling): In een euclidisch vlak kun je bij elk drietal punten O, P en Q die niet op één lijn liggen precies één toegelaten coördinatenstelsel kiezen zo, dat

- het punt O de coördinaten $(0, 0)$ heeft,

De basisstelling

Stelling (basisstelling): In een euclidisch vlak kun je bij elk drietal punten O, P en Q die niet op één lijn liggen precies één toegelaten coördinatenstelsel kiezen zo, dat

- het punt O de coördinaten $(0, 0)$ heeft,
- het punt P de coördinaten $(p, 0)$ heeft voor zekere $p > 0$,

De basisstelling

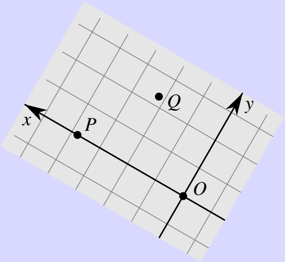
Stelling (basisstelling): In een euclidisch vlak kun je bij elk drietal punten O, P en Q die niet op één lijn liggen precies één toegelaten coördinatenstelsel kiezen zo, dat

- het punt O de coördinaten $(0, 0)$ heeft,
- het punt P de coördinaten $(p, 0)$ heeft voor zekere $p > 0$,
- het punt Q de coördinaten (q_1, q_2) heeft voor zekere q_1 en q_2 met $q_2 > 0$.

De basisstelling

Stelling (basisstelling): In een euclidisch vlak kun je bij elk drietal punten O, P en Q die niet op één lijn liggen precies één toegelaten coördinatenstelsel kiezen zo, dat

- het punt O de coördinaten $(0,0)$ heeft,
- het punt P de coördinaten $(p,0)$ heeft voor zekere $p>0$,
- het punt Q de coördinaten (q_1,q_2) heeft voor zekere q_1 en q_2 met $q_2>0$.



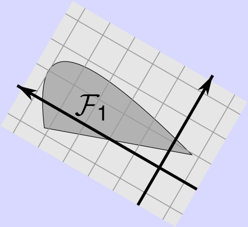
Congruentie

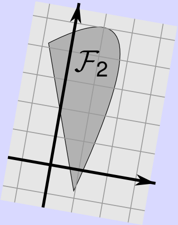
Congruentie

Twee figuren $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ heten congruent wanneer het mogelijk is twee toegelaten coördinatenstelsels te kiezen zo, dat $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ daarin op dezelfde wijze worden beschreven, dat wil zeggen dat er met elk punt P_1 in $\mathcal{F}_1$ een punt P_2 in $\mathcal{F}_2$ correspondeert zo dat de coördinaten van P_1 in het ene stelsel gelijk zijn aan die van P_2 in het andere stelsel.

Congruentie

Twee figuren $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ heten congruent wanneer het mogelijk is twee toegelaten coördinatenstelsels te kiezen zo, dat $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ daarin op dezelfde wijze worden beschreven, dat wil zeggen dat er met elk punt P_1 in $\mathcal{F}_1$ een punt P_2 in $\mathcal{F}_2$ correspondeert zo dat de coördinaten van P_1 in het ene stelsel gelijk zijn aan die van P_2 in het andere stelsel.





Lijnen en hoeken

Stellingen:

Lijnen en hoeken

Stellingen:

- Twee verschillende lijnen hebben hoogstens één punt gemeen.

Lijnen en hoeken

Stellingen:

- Twee verschillende lijnen hebben hoogstens één punt gemeen.
- Door twee verschillende punten gaat precies één lijn.

Lijnen en hoeken

Stellingen:

- Twee verschillende lijnen hebben hoogstens één punt gemeen.
- Door twee verschillende punten gaat precies één lijn.
- Als een punt P niet op een lijn ℓ ligt, gaat er door P precies één lijn evenwijdig aan ℓ.

Lijnen en hoeken

Stellingen:

- Twee verschillende lijnen hebben hoogstens één punt gemeen.
- Door twee verschillende punten gaat precies één lijn.
- Als een punt P niet op een lijn ℓ ligt, gaat er door P precies één lijn evenwijdig aan ℓ.

Met behulp van coördinaten kunnen gemakkelijk de volgende begrippen worden gedefinieerd:

Lijnen en hoeken

Stellingen:

- Twee verschillende lijnen hebben hoogstens één punt gemeen.
- Door twee verschillende punten gaat precies één lijn.
- Als een punt P niet op een lijn ℓ ligt, gaat er door P precies één lijn evenwijdig aan ℓ.

Met behulp van coördinaten kunnen gemakkelijk de volgende begrippen worden gedefinieerd:

- Halve lijn, lijnstuk;

Lijnen en hoeken

Stellingen:

- Twee verschillende lijnen hebben hoogstens één punt gemeen.
- Door twee verschillende punten gaat precies één lijn.
- Als een punt P niet op een lijn ℓ ligt, gaat er door P precies één lijn evenwijdig aan ℓ.

Met behulp van coördinaten kunnen gemakkelijk de volgende begrippen worden gedefinieerd:

- Halve lijn, lijnstuk;
- Hoek, inspringende hoek, rechte hoek, gestrekte hoek;

Lijnen en hoeken

Stellingen:

- Twee verschillende lijnen hebben hoogstens één punt gemeen.
- Door twee verschillende punten gaat precies één lijn.
- Als een punt P niet op een lijn ℓ ligt, gaat er door P precies één lijn evenwijdig aan ℓ.

Met behulp van coördinaten kunnen gemakkelijk de volgende begrippen worden gedefinieerd:

- Halve lijn, lijnstuk;
- Hoek, inspringende hoek, rechte hoek, gestrekte hoek;
- Bissectrice van een hoek, hoekmeting;

Lijnen en hoeken

Stellingen:

- Twee verschillende lijnen hebben hoogstens één punt gemeen.
- Door twee verschillende punten gaat precies één lijn.
- Als een punt P niet op een lijn ℓ ligt, gaat er door P precies één lijn evenwijdig aan ℓ.

Met behulp van coördinaten kunnen gemakkelijk de volgende begrippen worden gedefinieerd:

- Halve lijn, lijnstuk;
- Hoek, inspringende hoek, rechte hoek, gestrekte hoek;
- Bissectrice van een hoek, hoekmeting;
- F-hoeken, Z-hoeken;

Lijnen en hoeken

Stellingen:

- Twee verschillende lijnen hebben hoogstens één punt gemeen.
- Door twee verschillende punten gaat precies één lijn.
- Als een punt P niet op een lijn ℓ ligt, gaat er door P precies één lijn evenwijdig aan ℓ.

Met behulp van coördinaten kunnen gemakkelijk de volgende begrippen worden gedefinieerd:

- Halve lijn, lijnstuk;
- Hoek, inspringende hoek, rechte hoek, gestrekte hoek;
- Bissectrice van een hoek, hoekmeting;
- F-hoeken, Z-hoeken;
- Eenheidscirkel; sinus, cosinus, tangens van een hoek.

De middelloodlijn van een lijnstuk

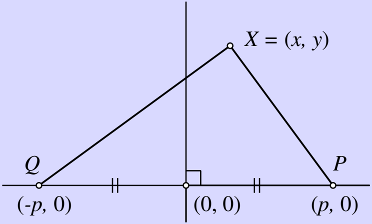
De middelloodlijn van een lijnstuk

Stelling: De middelloodlijn van een lijnstuk PQ is de verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot P en Q.

De middelloodlijn van een lijnstuk

Stelling: De middelloodlijn van een lijnstuk PQ is de verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot P en Q.

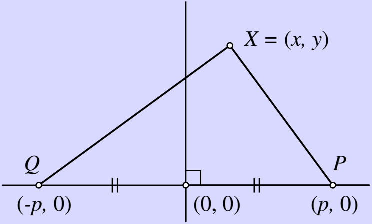
Bewijs: Kies coördinaten zo dat $P = (p, 0)$ en $Q = (-p, 0)$.



De middelloodlijn van een lijnstuk

Stelling: De middelloodlijn van een lijnstuk PQ is de verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot P en Q.

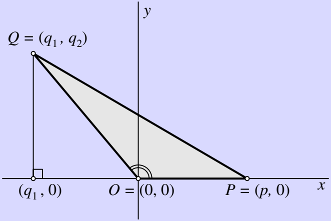
Bewijs: Kies coördinaten zo dat $P = (p, 0)$ en $Q = (-p, 0)$.



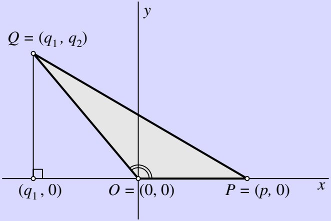
$$d(X, P) = d(X, Q) \Longleftrightarrow (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 + y^2 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Driehoeken

Driehoeken



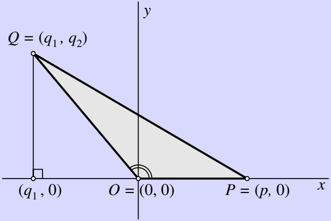
Driehoeken



Stelling (cosinusregel): Voor elk drietal verschillende punten O, P en Q geldt

$$d(P,Q)^2 = d(O,P)^2 + d(O,Q)^2 - 2d(O,P)d(O,Q)\cos\angle POQ$$

Driehoeken



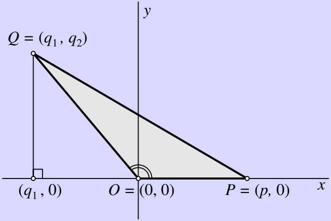
Stelling (cosinusregel): Voor elk drietal verschillende punten O, P en Q geldt

$$d(P,Q)^2 = d(O,P)^2 + d(O,Q)^2 - 2d(O,P)d(O,Q)\cos\angle POQ$$

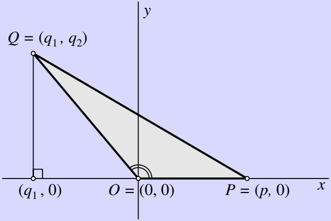
Bewijs:

$$\begin{aligned} d(P,Q)^2 &= (p-q_1)^2 + (0-q_2)^2 = p^2 + {q_1}^2 + {q_2}^2 - 2pq_1 \\ &= d(O,P)^2 + d(O,Q)^2 - 2d(O,P)d(O,Q)\cos\angle POQ \end{aligned}$$

Driehoeken

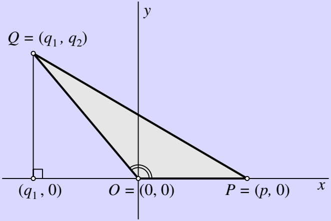


Driehoeken



Gevolg: Pythagoras (en omgekeerd), maar ook

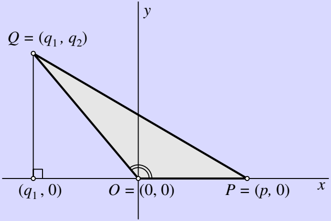
Driehoeken



Gevolg: Pythagoras (en omgekeerd), maar ook

Driehoeksongelijkheid: Voor elk drietal verschillende punten O, P en Q geldt $d(P,Q) \leq d(O,P) + d(O,Q)$ met gelijkheid dan en slechts dan als O op het lijnstuk PQ ligt.

Driehoeken



Gevolg: Pythagoras (en omgekeerd), maar ook

Driehoeksongelijkheid: Voor elk drietal verschillende punten O, P en Q geldt $d(P,Q) \leq d(O,P) + d(O,Q)$ met gelijkheid dan en slechts dan als O op het lijnstuk PQ ligt.

Bewijs: schrijf de cosinusregel als

$$d(P,Q)^2 = (d(O,P) + d(O,Q))^2 - 2d(O,P)d(O,Q)(1 + \cos \angle POQ)$$

Driehoeken

Stellingen:

Driehoeken

Stellingen:

- Buitenhoekstelling.

Driehoeken

Stellingen:

- Buitenhoekstelling.
- Som van de hoeken van een driehoek is een gestrekte hoek.

Driehoeken

Stellingen:

- Buitenhoekstelling.
- Som van de hoeken van een driehoek is een gestrekte hoek.
- Bij gelijke F-hoeken of Z-hoeken evenwijdige lijnen.

Driehoeken

Stellingen:

- Buitenhoekstelling.
- Som van de hoeken van een driehoek is een gestrekte hoek.
- Bij gelijke F-hoeken of Z-hoeken evenwijdige lijnen.
- Sinusregel.

Driehoeken

Stellingen:

- Buitenhoekstelling.
- Som van de hoeken van een driehoek is een gestrekte hoek.
- Bij gelijke F-hoeken of Z-hoeken evenwijdige lijnen.
- Sinusregel.
- Driehoek gelijkbenig d.e.s.d. als twee hoeken gelijk zijn.

Driehoeken

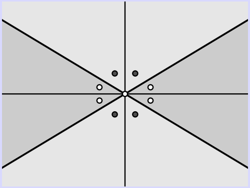
Stellingen:

- Buitenhoekstelling.
- Som van de hoeken van een driehoek is een gestrekte hoek.
- Bij gelijke F-hoeken of Z-hoeken evenwijdige lijnen.
- Sinusregel.
- Driehoek gelijkbenig d.e.s.d. als twee hoeken gelijk zijn.
- Congruentiekenmerken HZH, ZHH, ZHZ, ZZH_{90°.

Bissectrices

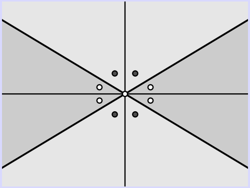
Bissectrices

Stelling: Bij twee elkaar snijdende lijnen snijden de bissectrices van de vier hoeken elkaar loodrecht.



Bissectrices

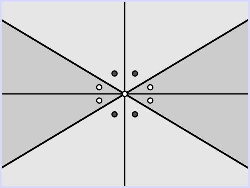
Stelling: Bij twee elkaar snijdende lijnen snijden de bissectrices van de vier hoeken elkaar loodrecht.



Stelling: De bissectrice van een niet-inspringende hoek is de verzameling van alle punten binnen die hoek die gelijke afstanden hebben tot de beide (eventueel verlengde) benen.

Bissectrices

Stelling: Bij twee elkaar snijdende lijnen snijden de bissectrices van de vier hoeken elkaar loodrecht.

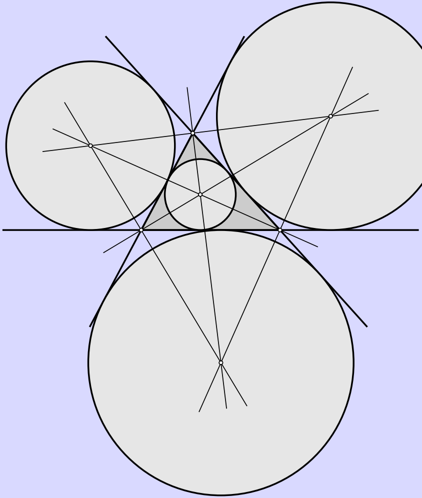


Stelling: De bissectrice van een niet-inspringende hoek is de verzameling van alle punten binnen die hoek die gelijke afstanden hebben tot de beide (eventueel verlengde) benen.

Gevolg: De binnenbissectrices van een driehoek snijden elkaar in één punt: het middelpunt van de ingeschreven cirkel.

Bissectrices, in- en aangeschreven cirkels

Bissectrices, in- en aangeschreven cirkels



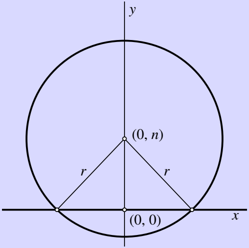
Snijpunten cirkel en lijn

Snijpunten cirkel en lijn

Stelling: Een cirkel en een lijn hebben hoogstens twee punten gemeen.

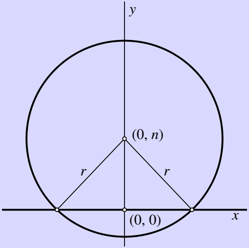
Snijpunten cirkel en lijn

Stelling: Een cirkel en een lijn hebben hoogstens twee punten gemeen.



Snijpunten cirkel en lijn

Stelling: Een cirkel en een lijn hebben hoogstens twee punten gemeen.



Bewijs: Kies coördinaten zo dat de lijn samenvalt met de x-as (de lijn $y = 0$) en het middelpunt van de cirkel op de y-as ligt, dus dat de cirkel de vergelijking $x^2 + (y - n)^2 = r^2$ heeft.
Et cetera.

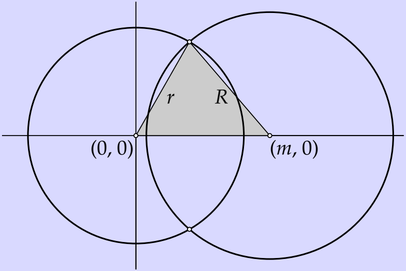
Snijpunten twee cirkels

Snijpunten twee cirkels

Stelling: Twee verschillende cirkels hebben hoogstens twee punten gemeen.

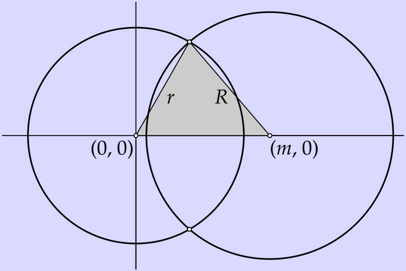
Snijpunten twee cirkels

Stelling: Twee verschillende cirkels hebben hoogstens twee punten gemeen.



Snijpunten twee cirkels

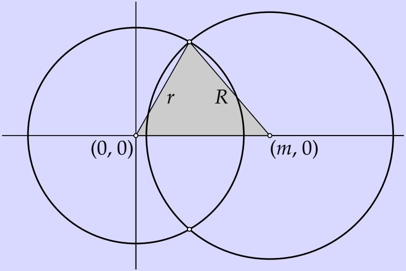
Stelling: Twee verschillende cirkels hebben hoogstens twee punten gemeen.



Bewijs: Kies coördinaten zo dat de cirkels gegeven worden door $x^2 + y^2 = r^2$ en $(x - m)^2 + y^2 = R^2$, et cetera, zie verder [VMC], pp. 21-22.

Snijpunten twee cirkels

Stelling: Twee verschillende cirkels hebben hoogstens twee punten gemeen.



Bewijs: Kies coördinaten zo dat de cirkels gegeven worden door $x^2 + y^2 = r^2$ en $(x - m)^2 + y^2 = R^2$, et cetera, zie verder [VMC], pp. 21-22.

Gevolgen: de hoogtelijnformule en de formule van Heron voor de oppervlakte van een driehoek.

Koordenvierhoekstelling

Koordenvierhoekstelling

Stelling: Stel dat gegeven zijn een hoek φ met $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ en twee verschillende punten A en B.

Koordenvierhoekstelling

Stelling: Stel dat gegeven zijn een hoek φ met $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ en twee verschillende punten A en B.

Kies coördinaten zo, dat $A = (a, 0)$ en $B = (-a, 0)$.

Koordenvierhoekstelling

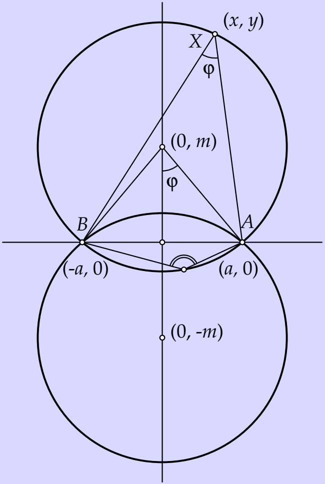
Stelling: Stel dat gegeven zijn een hoek φ met $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ en twee verschillende punten A en B.
Kies coördinaten zo, dat $A = (a, 0)$ en $B = (-a, 0)$.

Dan bestaat de verzameling van alle punten $X = (x, y)$ waarvoor geldt dat $\angle AXB = \varphi$ of $\angle AXB = \pi - \varphi$ uit de twee cirkels door A en B met middelpunten $(0, m)$ en $(0, -m)$, waarbij $m = \frac{a}{\tan \varphi}$.

Koordenvierhoekstelling

Stelling: Stel dat gegeven zijn een hoek φ met $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ en twee verschillende punten A en B.
Kies coördinaten zo, dat $A = (a, 0)$ en $B = (-a, 0)$.

Dan bestaat de verzameling van alle punten $X = (x, y)$ waarvoor geldt dat $\angle AXB = \varphi$ of $\angle AXB = \pi - \varphi$ uit de twee cirkels door A en B met middelpunten $(0, m)$ en $(0, -m)$, waarbij $m = \frac{a}{\tan \varphi}$.



Koordenvierhoekstelling (bewijs)

Bewijs:

Koordenvierhoekstelling (bewijs)

Bewijs: De cosinusregel in driehoek AXB geeft

$$d(A, B)^2 = d(X, A)^2 + d(X, B)^2 \pm 2d(X, A)d(X, B)\cos\varphi$$

Koordenvierhoekstelling (bewijs)

Bewijs: De cosinusregel in driehoek AXB geeft

$$d(A,B)^2 = d(X,A)^2 + d(X,B)^2 \pm 2d(X,A)d(X,B)\cos\varphi$$

Na haakjes uitwerken, delen door 2 en sorteren geeft dit:

$$a^2 - x^2 - y^2 = \pm\sqrt{(x-a)^2+y^2}\sqrt{(x+a)^2+y^2}\cos\varphi$$

Koordenvierhoekstelling (bewijs)

Bewijs: De cosinusregel in driehoek AXB geeft

$$d(A,B)^2 = d(X,A)^2 + d(X,B)^2 \pm 2d(X,A)d(X,B)\cos\varphi$$

Na haakjes uitwerken, delen door 2 en sorteren geeft dit:

$$a^2 - x^2 - y^2 = \pm\sqrt{(x-a)^2 + y^2}\sqrt{(x+a)^2 + y^2}\cos\varphi$$

Kwadrateren en verder herleiden (zie [VMC], p. 37) resulteert in

Koordenvierhoekstelling (bewijs)

Bewijs: De cosinusregel in driehoek AXB geeft

$$d(A,B)^2 = d(X,A)^2 + d(X,B)^2 \pm 2d(X,A)d(X,B)\cos\varphi$$

Na haakjes uitwerken, delen door 2 en sorteren geeft dit:

$$a^2 - x^2 - y^2 = \pm\sqrt{(x-a)^2+y^2}\sqrt{(x+a)^2+y^2}\cos\varphi$$

Kwadrateren en verder herleiden (zie [VMC], p. 37) resulteert in

$$(x^2+y^2-a^2)^2\sin^2\varphi = 4a^2y^2\cos^2\varphi$$

Koordenvierhoekstelling (bewijs)

Bewijs: De cosinusregel in driehoek AXB geeft

$$d(A,B)^2 = d(X,A)^2 + d(X,B)^2 \pm 2d(X,A)d(X,B)\cos\varphi$$

Na haakjes uitwerken, delen door 2 en sorteren geeft dit:

$$a^2 - x^2 - y^2 = \pm\sqrt{(x-a)^2 + y^2}\sqrt{(x+a)^2 + y^2}\cos\varphi$$

Kwadrateren en verder herleiden (zie [VMC], p. 37) resulteert in

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 \sin^2\varphi = 4a^2y^2\cos^2\varphi$$

en dat geeft na worteltrekken en de substitutie $m = a\,/\,(\tan\varphi)$

$$x^2 + (y \pm m)^2 = a^2 + m^2$$

Koordenvierhoekstelling (bewijs)

Bewijs: De cosinusregel in driehoek AXB geeft

$$d(A,B)^2 = d(X,A)^2 + d(X,B)^2 \pm 2d(X,A)d(X,B)\cos\varphi$$

Na haakjes uitwerken, delen door 2 en sorteren geeft dit:

$$a^2 - x^2 - y^2 = \pm\sqrt{(x-a)^2+y^2}\sqrt{(x+a)^2+y^2}\cos\varphi$$

Kwadrateren en verder herleiden (zie [VMC], p. 37) resulteert in

$$(x^2+y^2-a^2)^2\sin^2\varphi = 4a^2y^2\cos^2\varphi$$

en dat geeft na worteltrekken en de substitutie $m = a/(\tan\varphi)$

$$x^2 + (y \pm m)^2 = a^2 + m^2$$

Dit zijn inderdaad de vergelijkingen van de cirkels met middelpunten $(0,m)$ en $(0,-m)$ door A en B.

Zoek de fout!

Zoek de fout!

Op de site van het College voor Examens vinden we in de Syllabus vwo wiskunde B

`http://www.nvvw.nl/media/downloads/examens/syllabus_vwo_wis_b_2012.pdf`

op bladzijde 27 de volgende "stelling":

Zoek de fout!

Op de site van het College voor Examens vinden we in de Syllabus vwo wiskunde B

`http://www.nvvw.nl/media/downloads/examens/syllabus_vwo_wis_b_2012.pdf`

op bladzijde 27 de volgende "stelling":

Een omtrekshoek is gelijk aan de helft van de middelpuntshoek die dezelfde koorde insluit als die omtrekshoek. (stelling van de omtrekshoek)

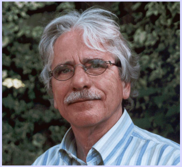
Wat is hier fout aan?

Tot slot

Tot slot

Meer info op mijn homepage

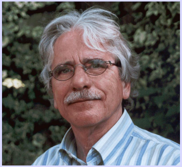
`http://www.science.uva.nl/~craats`



Tot slot

Meer info op mijn homepage

`http://www.science.uva.nl/~craats`



Daar vind je ook een preview van het artikel Bewijzen met coördinaten dat ik in het februarinummer 2006 van Euclides heb gepubliceerd, en waarin o.a. de kegelsneden parabool, ellips en hyperbool op een soortgelijke wijze worden behandeld. Zie:

`http://staff.science.uva.nl/~craats/bewijzen.pdf`