VERVOLGBOEK WISKUNDE

Jan van de Craats

PEARSON
Education

ISBN: 978-90-430-1619-3
NUR: 123
Trefw: wiskunde, wiskundeonderwijs

Dit is een uitgave van Pearson Education Benelux bv,
Postbus 75598, 1070 AN Amsterdam
Website: www.pearsoneducation.nl – e-mail: amsterdam@pearson.com

Illustraties en LaTeX-opmaak: Jan van de Craats
Omslag: Inkahootz, Amsterdam

Prof. dr. J. van de Craats is hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit.

Dit boek is gedrukt op een papiersoort die niet met chloorhoudende chemicaliën is gebleekt. Hierdoor is de productie van dit boek minder belastend voor het milieu.

Leeswijzer

Dit boek is een vervolg op *Basisboek wiskunde*. Onderwerpen die daar behandeld zijn, worden in dit boek niet opnieuw uitgelegd. Elk hoofdstuk is op dezelfde manier opgebouwd: eerst enige bladzijden theorie, gevolgd door een *samenvatting* en een collectie *opgaven*. De antwoorden op alle opgaven staan achterin.

De 22 hoofdstukken zijn verdeeld over zeven delen. Per deel is op de tweede (gekleurde) bladzijde aangegeven welke voorkennis voor dat deel nodig is door de bijbehorende hoofdstukken uit *Basisboek wiskunde* of eerdere hoofdstukken uit *Vervolgboek wiskunde* te vermelden. Zo betekent bijvoorbeeld de vermelding BW 17, BW 18, VW 4, VW 5 dat in het desbetreffende deel de hoofdstukken 17 en 18 van *Basisboek wiskunde* en de hoofdstukken 4 en 5 van *Vervolgboek wiskunde* bekend worden verondersteld. Deze vermeldingen zijn bedoeld als service aan de lezer. Uiteraard is het ook mogelijk om *Vervolgboek wiskunde* te gebruiken als je de benodigde voorkennis op een andere manier hebt verworven.

In dit boek wordt gewerkt met een decimale punt, en niet met een decimale komma, in overeenstemming met wat thans algemeen gebruikelijk is in de internationale wetenschappelijke en technische literatuur.

Inhoudsopgave

Het Griekse alfabet

α	A	alfa	ι	I	jota	ρ	P	rho
β	B	bèta	κ	K	kappa	σ	Σ	sigma
γ	Γ	gamma	λ	Λ	lambda	τ	T	tau
δ	Δ	delta	μ	M	mu	υ	Υ	upsilon
ϵ	E	epsilon	ν	N	nu	φ	Φ	phi
ζ	Z	zèta	ξ	Ξ	xi	χ	X	chi
η	H	èta	o	O	omicron	ψ	Ψ	psi
ϑ	Θ	thèta	π	Π	pi	ω	Ω	omega

Voorwoord

Vervolgboek wiskunde is een vervolg op *Basisboek wiskunde* dat ik samen met Rob Bosch geschreven heb. Het is geschreven op verzoek van hogeschooldocenten van verschillende studierichtingen, merendeels uit de exacte vakken, de techniek en de economie. Aan de keuze van de onderwerpen is een uitgebreide behoeftenpeiling voorafgegaan. Het resultaat is een boek geworden dat 22 korte hoofdstukken telt, verdeeld over zeven delen. De onderwerpen omvatten vectorrekening, matrixrekening, het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen met behulp van Gauss-eliminatie, machtreeksen en Taylorreeksen, functies van meer variabelen, meervoudige integralen, complexe getallen en differentiaalvergelijkingen. Binnen het bestek van dit boek kon ik niet aan alle wensen voldoen. Zo moest bijvoorbeeld lineair programmeren buiten beschouwing blijven maar ook onderwerpen als Laplacetransformaties en Fouriertheorie behandel ik niet. Ze zouden voor een te klein deel van de beoogde doelgroep van belang zijn, en bovendien een aanzienlijk ruimtebeslag vergen. Ook kansrekening en statistiek blijven buiten beeld.

Numerieke methodes

Het zal sommigen misschien verwonderen dat ik in dit boek nauwelijks aandacht besteed aan numerieke methodes. De reden is dat de huidige ICT-hulpmiddelen, dat wil zeggen pakketten als MATLAB, Mathematica, Maple en Derive, zulke methodes standaard ingebouwd hebben, en dat het naar mijn idee weinig zin heeft studenten met de technische details die zich 'onder de motorkap' bevinden, te belasten. Natuurlijk weet ik dat je bij de inzet van numerieke methodes voorzichtig moet zijn omdat afrondfouten en numerieke instabiliteiten in bepaalde gevallen voor problemen kunnen zorgen, maar een uitgebreide behandeling daarvan is specialistenwerk. Toepassers die hiermee worden geconfronteerd, raad ik aan experts of de vakliteratuur op dit gebied te raadplegen.

Toepassingen

Ook verwondering zal wekken dat concrete toepassingen, bijvoorbeeld in de techniek of de economie, in dit boek nauwelijks genoemd worden. De reden daarvan is dat de beoogde doelgroep, net als bij *Basisboek wiskunde*, zeer divers is. Toepassingen op het gebied van bijvoorbeeld de elektrotechniek zullen economen of bouwkundigen weinig zeggen. Specialistische voorbeelden werken voor niet-vakgenoten eerder afschrikwekkend dan stimulerend, en bovendien loop je de kans dat door een overvloed aan vaktechnische details de universeel bruikbare essentie ondergesneeuwd raakt. Ik ga ervan uit dat iedere gebruiker zijn motivatie haalt uit het besef dat de wiskunde die hij leert op tal van manieren in zijn eigen vakgebied concreet wordt toegepast, en dat de vertaalslag van abstracte wiskunde naar specifieke toepassing geen onoverkomelijke barrières opwerpt. Maar natuurlijk hoop ik wel dat elke docent zelf motiverende voorbeelden uit de directe interessesfeer van zijn studenten kan aandragen.

De opbouw van dit boek

Net als bij *Basisboek wiskunde* vormen de opgaven het belangrijkste deel van dit boek. Je kunt alleen wiskunde leren door zelf opgaven te maken. Bij het schrijven van *Vervolgboek wiskunde* bleek het, anders dan bij *Basisboek wiskunde*, niet mogelijk te zijn de theorie te beperken tot de rechterbladzijden met de bijbehorende opgaven op de linkerbladzijden. In plaats daarvan heb ik hier de meer gangbare structuur gekozen waarbij in elk hoofdstuk de theorie gevolgd wordt door bijbehorende opgaven. Wel laat ik in elk hoofdstuk de opgavencollectie voorafgaan door een samenvatting waarin de theorie nog eens kort en duidelijk wordt gerecapituleerd. De antwoorden van alle opgaven staan achterin. Volledige uitwerkingen geef ik niet. In veel gevallen belemmeren die namelijk eerder het leerproces dan dat ze het stimuleren. Bovendien zijn er vaak meerdere oplossingswegen mogelijk. Als je er bij een bepaalde opgave niet uitkomt, doe je er goed aan de tekst van het hoofdstuk nog eens door te nemen: daarin staan namelijk genoeg uitgewerkte voorbeelden om je op het goede spoor te zetten. Juist op die manier leer je het meest!

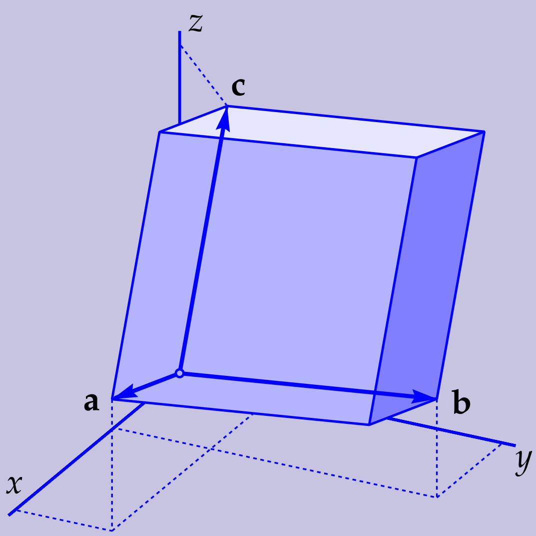
Dankbetuigingen

Door persoonlijke omstandigheden kon Rob Bosch, medeauteur van *Basisboek wiskunde*, niet als auteur aan dit vervolgboek meewerken. Hij heeft wel als meelezer en klankbord gefungeerd. Verder ontving ik nuttig commentaar op een voorlopige versie van Don Duizendstra, Chris van den Eynde, Jan Kiers en Dirk D'Haeyer. Veel dank daarvoor! Lars van den Berg, leerling van het Christelijk Gymnasium Utrecht, ben ik zeer erkentelijk omdat hij het hele boek nauwgezet doorwerkte en daarbij een aantal slordigheden in de tekst en de antwoordenlijst ontdekte. Ze zijn in deze druk verbeterd.

Mijn uitgever Marc Appels was degene die het initiatief nam voor de totstandkoming van dit boek. Ik dank hem en de verdere staf van Pearson voor de plezierige samenwerking.

Oosterhout, maart 2010, Jan van de Craats

I Vectorrekening



In veel toepassingen van de wiskunde wordt gewerkt met vectoren *om grootheden voor te stellen die een grootte en een richting hebben. Een vector is een pijl met de desbetreffende grootte en richting. Gelijk gerichte pijlen die even lang zijn stellen dezelfde vector voor. Je kunt het beginpunt van een vector dus vrij kiezen.*

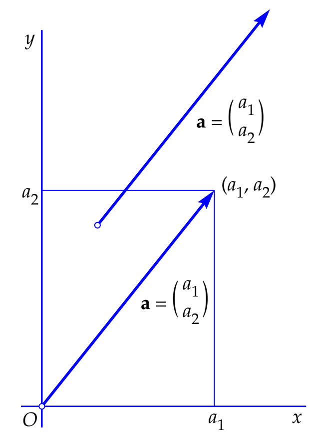
We beperken ons hier tot vectoren in de dimensies 2 *en* 3*. Na keuze van een geschikt coördinatenstelsel in het vlak of in de ruimte kunnen vectoren worden aangegeven met twee of drie kentallen (coördinaten) waarmee kan worden gerekend. In dit hoofdstuk leer je de basisbeginselen van de vectorrekening.*

Voorkennis: BW 12, BW 13, BW 15

1 Vectorbewerkingen

In veel toepassingen van de wiskunde wordt gewerkt met *vectoren* om grootheden voor te stellen die een grootte en een richting hebben. Een vector is een pijl met de desbetreffende grootte en richting[1]. Gelijk gerichte pijlen die even lang zijn, stellen *dezelfde* vector voor. Je kunt het beginpunt van een vector dus vrij kiezen. Vectoren geven we vaak aan door een vet gedrukte letter.

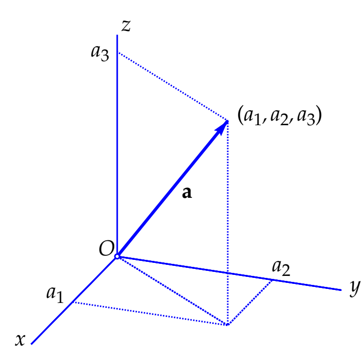
Is in een vlak een orthonormaal coördinatenstelsel Oxy gegeven, dan kun je een vector **a** die in dat vlak ligt coördinaten geven door de pijl in de oorsprong te laten beginnen. De coördinaten van het eindpunt zijn dan de coördinaten van de vector **a**. Om ze te onderscheiden van puntcoördinaten zetten we de coördinaten van een vector onder elkaar. De vector $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ is dus de vector die voorgesteld wordt door de pijl die van de oorsprong O naar het punt (a_1, a_2) loopt, of door iedere andere pijl die even groot is en dezelfde richting heeft.



Volgens de stelling van Pythagoras is de *lengte* $|\mathbf{a}|$ van de vector **a** gelijk aan $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

In de ruimte werken we met drie coördinaten. Wanneer daar een driedimensionaal orthonormaal assenstelsel $Oxyz$ gekozen is, kun je elke vector **a** van coördinaten voorzien door het beginpunt in de oorsprong te kiezen. De coördinaten van het eindpunt geven dan de coördinaten van de vector. We noteren ze weer onder elkaar:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

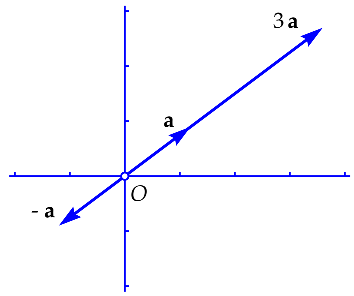


In dit geval wordt de lengte $|\mathbf{a}|$ van **a** gegeven door $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

[1] Let op: het woord *richting* kan verwarring geven. De richting van een *lijn* verandert niet als je de lijn een halve slag draait, die van een *vector* (pijl) wél, want die keert dan van richting om!

Scalaire vermenigvuldiging

Wanneer $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ een gegeven vector is, dan is $3\mathbf{a}$ de vector met dezelfde richting die drie maal zo lang is. In coördinaten: $3\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3a_1 \\ 3a_2 \end{pmatrix}$. De vector $-\mathbf{a}$ is de vector die net zo lang is als $\mathbf{a}$ maar tegengesteld van richting. In coördinaten: $-\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$.



In de figuur hierboven hebben we $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.9 \end{pmatrix}$ genomen. Dan is $3\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3.6 \\ 2.7 \end{pmatrix}$ en $-\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1.2 \\ -0.9 \end{pmatrix}$. In het algemeen: als λ een willekeurig reëel getal is (positief, negatief of nul), dan is $\lambda\mathbf{a}$ de vector die $|\lambda|$ maal zo groot is als de vector $\mathbf{a}$ met dezelfde richting als λ positief is, en met de tegengestelde richting als λ negatief is. In coördinaten is $\lambda\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$.

Een bijzonder geval is $\lambda = 0$. Dan is $0\,\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0\,a_1 \\ 0\,a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dit is de *nulvector*, een vector die we meestal noteren als $\mathbf{0}$. Het is een 'pijl' waarvan begin- en eindpunt samenvallen. Hij heeft geen richting.

In de ruimte geldt een soortgelijk verhaal, maar dan met drie in plaats van twee coördinaten. Als λ een reëel getal is en

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

een vector is, dan is het scalaire product $\lambda\mathbf{a}$ de vector met coördinaten

$$\lambda\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$$

Het is de vector met een lengte die $|\lambda|$ maal zo groot is als $\mathbf{a}$ en dezelfde richting heeft wanneer $\lambda > 0$ is, en de tegengestelde richting als $\lambda < 0$ is. Voor $\lambda = 0$ is $\lambda\mathbf{a}$ de nulvector.

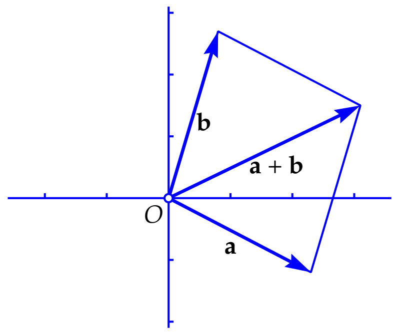
De bewerking die uit een reëel getal λ en een vector $\mathbf{a}$ de vector $\lambda\mathbf{a}$ maakt, heet de *scalaire vermenigvuldiging* van λ en $\mathbf{a}$. Het reële getal λ heet in dit verband een *scalar* (meervoud: *scalairen*). Letterlijk betekent scalar 'schaal', en het gaat hier dan ook om een 'schaalfactor'.

Vectoroptelling

Wanneer twee vectoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ in het vlak gegeven zijn, dan is de *somvector* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ de vector met coördinaten

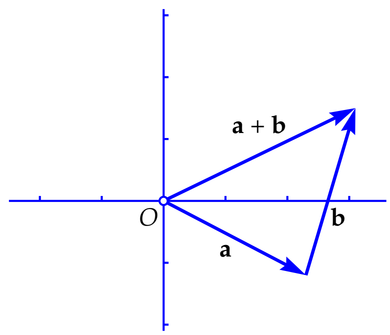
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Meetkundig vind je $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ via de bekende parallellogramconstructie die hiernaast getekend is.



In deze figuur is $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2.3 \\ -1.2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 2.7 \end{pmatrix}$. Dan is dus $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3.1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$.

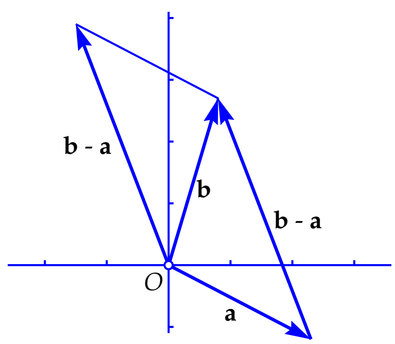
Een andere manier om $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ te construeren, is om de twee vectoren 'kop aan staart' te leggen. Hiernaast is getekend hoe dat gaat: je neemt $\mathbf{b}$ als 'vrije' vector op en legt het beginpunt ervan op het eindpunt van $\mathbf{a}$. Het eindpunt van $\mathbf{b}$ is dan het eindpunt van de vector $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ die in de oorsprong begint. Het kan natuurlijk ook andersom: het beginpunt van $\mathbf{a}$ op het eindpunt van $\mathbf{b}$ leggen.



De *verschilvector* $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ kun je ook weer met een parallellogramconstructie construeren, namelijk als som van $\mathbf{b}$ en $-\mathbf{a}$, want $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$.

Maar het is handig om te weten dat het ook korter kan: het is niet nodig om eerst $-\mathbf{a}$ te tekenen. In de figuur hiernaast zie je dat $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ als vrije vector de vector is die van het eindpunt van $\mathbf{a}$ naar het eindpunt van $\mathbf{b}$ loopt. Immers, als je die vector bij $\mathbf{a}$ optelt (kop-aan-staartconstructie), krijg je

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b}$$



In het getekende voorbeeld is $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2.3 \\ -1.2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 2.7 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 3.9 \end{pmatrix}$.

In de ruimte gaat alles net zo, maar dan met drie in plaats van twee coördinaten. Als gegeven zijn twee vectoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

dan vind je de somvector $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ via coördinaatsgewijs optellen:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Meetkundig gezien krijg je ook in de ruimte de somvector via een parallellogramconstructie of via het kop aan staart leggen. En ook in de ruimte geldt:

> *De verschilvector* $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ *is de vrije vector die van het eindpunt van* $\mathbf{a}$ *naar het eindpunt van* $\mathbf{b}$ *loopt.*

Het inproduct

Bij elk tweetal vectoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ in het vlak definieert men het *inproduct*, notatie $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, door

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Andere namen die hiervoor gebruikt worden, zijn *inwendig product* en *scalair product*. In de Engelstalige literatuur wordt ook vaak de term *dot product* gebruikt; het inproduct van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ wordt dan genoteerd als $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$.

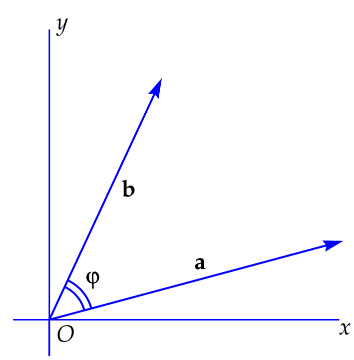
Het inproduct heeft de volgende eigenschappen:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

en

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi$$

waarin φ de hoek is die de twee vectoren in de oorsprong met elkaar maken. Als $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ dan is de cosinus nul en het inproduct dus ook. De vectoren staan dan loodrecht op elkaar.



Dit alles geldt net zo goed in de ruimte, alleen wordt het inproduct dan gedefinieerd door

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Samenvatting

Na keuze van een orthonormaal coördinatenstelsel in het vlak respectievelijk de ruimte krijgt elke vector twee, respectievelijk drie coördinaten:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{respectievelijk} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

De *lengte* van de vector **a** wordt gegeven door:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{respectievelijk} \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

De *scalaire vermenigvuldiging* van de vector **a** met een scalar (reëel getal) λ:

$$\lambda\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix} \quad \text{respectievelijk} \quad \lambda\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$$

De *vectoroptelling* van een vector **a** en een vector **b**:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad \text{respectievelijk} \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

De *verschilvector* $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ is de vrije vector die loopt van het eindpunt van **a** naar het eindpunt van **b**.

Inproduct (scalair product) van de vectoren **a** en **b**:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad \text{respectievelijk} \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Eigenschappen van het inproduct:

1. $|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$
2. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi$
   Hierbij is φ de hoek die de vectoren met elkaar maken.

Als twee vectoren loodrecht op elkaar staan, dan is hun inproduct nul. *Bij afspraak* staat de nulvector loodrecht op iedere vector (inclusief zichzelf), dus ook het omgekeerde geldt: als het inproduct van twee vectoren nul is, staan ze loodrecht op elkaar.

Is het inproduct van twee vectoren positief, dan sluiten ze een scherpe hoek in; is het inproduct negatief, dan is de ingesloten hoek stomp.

Opgaven

1.1 In het vlak zijn gegeven de vectoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Geef de coördinaten van de volgende vectoren, teken ze en bereken hun lengte.

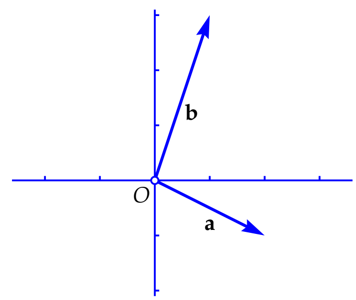
a. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

b. $\mathbf{a} - \mathbf{b}$

c. $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$

d. $-\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$

e. $-3\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$



1.2 In deze opgave is $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bereken de volgende hoeken met behulp van een rekenmachine in radialen. Geef je antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld: Bereken de hoek tussen **a** en **b**.

Oplossing: Schrijf de formule voor het inproduct als $\cos\varphi = \dfrac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$.

In dit geval is $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -1$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{5}$, $\mathbf{b} = \sqrt{2}$ dus $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ en de rekenmachine geeft $\varphi \approx 1.8925$.

a. De hoek tussen **a** en $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

b. De hoek tussen $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ en $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

c. De hoek tussen $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ en de positieve y-as.

1.3 In de ruimte is gegeven de kubus $OABC.DEFG$ met $O = (0, 0, 0)$, $A = (2, 0, 0)$, $C = (0, 2, 0)$ en $D = (0, 0, 2)$. M is het midden van FG.

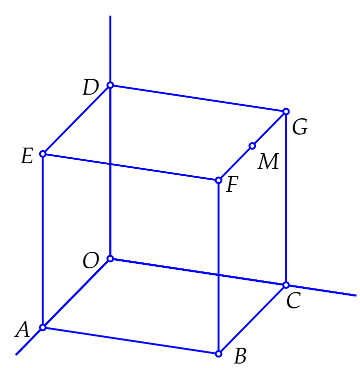
a. Bereken de vectoren $\overrightarrow{EG}$ en $\overrightarrow{EB}$.

b. Ga met behulp van het inproduct na dat deze twee vectoren een hoek van $\frac{1}{3}\pi$ insluiten.

c. Bereken $\cos \angle AMB$.

d. Bereken $\cos \angle AMC$.

e. Bereken $\cos \angle EMC$.



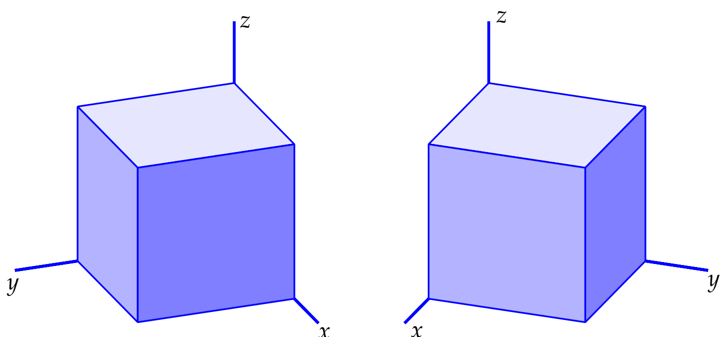
1.4 Bereken de cosinus van de hoek die twee lichaamsdiagonalen van een kubus (bijvoorbeeld OF en CE in de figuur van de vorige opgave) met elkaar maken.

4 Het uitproduct en de determinant

Het uitproduct van twee vectoren in de ruimte is een *vector* die veel toepassingen heeft, onder andere in de mechanica en de electrotechniek. Om met het uitproduct succesvol te kunnen rekenen, moet er een afspraak worden gemaakt over de oriëntatie van de driedimensionale orthonormale coördinatenstelsels waarmee we in de ruimte werken.

Rechtse en linkse stelsels

In wetenschap en techniek wordt algemeen gewerkt met *rechtsgeoriënteerde* coördinatenstelsels $Oxyz$. Bij zo'n stelsel is het zo dat als je je rechterhand in de oorsprong houdt met de duim langs de positieve x-as en de gestrekte wijsvinger langs de positieve y-as, de middelvinger zonder problemen in de richting van de positieve z-as kan wijzen. Bij een linksgeoriënteerd stelsel lukt dat niet, maar daar kan het wel met de linkerhand. Hieronder zie je naast elkaar een links stelsel en een rechts stelsel, beide met de eenheidskubus erin getekend om een goed ruimtelijk beeld te krijgen.



links stelsel

rechts stelsel

In het algemeen heet ook een stelsel van drie (radius)vectoren **a**, **b**, **c** (let op de volgorde!) een *rechts stelsel* als je met de rechterhand in de oorsprong de duim in de richting van **a**, de wijsvinger in de richting van **b** en de middelvinger in de richting van **c** kunt houden. Daarbij wordt aangenomen dat de drie vectoren niet in één vlak door de oorsprong liggen. In een rechts coördinatenstelsel vormen de eenheidsvectoren $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ een rechts stelsel. Als je in een rechts stelsel van drie vectoren twee vectoren verwisselt, wordt het een links stelsel en omgekeerd.

> *Vanaf nu nemen we aan dat alle coördinatenstelsels in de ruimte rechts georiënteerd zijn.*

Definitie van het uitproduct

Stel dat twee vectoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gegeven zijn. Het *uitproduct* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ (in deze volgorde!) is dan de volgende vector:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

In plaats van uitproduct worden ook wel de termen *uitwendig product* en *vectorieel product* gebruikt. De Engelse term is *cross product*. Met nadruk wijzen we erop dat het uitproduct een *vector* is, en dat het *alleen* gedefinieerd is voor vectoren in de ruimte. In het vlak is er geen uitproduct. Vergelijk dit met het *inproduct* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ dat zowel in het vlak als in de ruimte gedefinieerd is, en dat geen vector, maar een reëel getal is.

Voorbeeld: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 3 - 2 \times 1 \\ 2 \times 2 - 1 \times 3 \\ 1 \times 1 - 3 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Het is minder moeilijk dan het lijkt om de formule voor het uitproduct te onthouden. Allereerst moet je opmerken dat in de *eerste* component *geen* index 1 voorkomt: $a_2b_3 - a_3b_2$. Voor de volgende component hoog je alle indices met 1 op, waarbij je na index 3 weer bij 1 begint. De tweede component is dus $a_3b_1 - a_1b_3$. Merk ook op dat hierin geen index 2 voorkomt. En voor de derde component doe je het nog een keer (1 gaat naar 2 en 3 gaat naar 1). Die wordt dus $a_1b_2 - a_2b_1$. Na wat oefeningen krijg je het vanzelf in je vingers!

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Uit de definitie van het uitproduct volgen direct de volgende eigenschappen:

a. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ voor elke vector $\mathbf{a}$. Het uitproduct van een vector met zichzelf is de nulvector.

b. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ voor elk tweetal vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$. Bij verwisselen van de twee vectoren keert de richting van het uitproduct om.

Voorbeelden (reken ze zelf na): $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

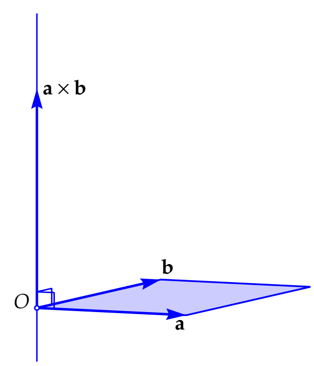
$$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-1\\5\end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\\-5\end{pmatrix}$$

Meetkundige eigenschappen van het uitproduct

We weten nu hoe je een uitproduct van twee vectoren uitrekent, maar het grote belang ervan (vooral ook voor de toepassingen) blijkt pas als je de meetkundige eigenschappen ervan op een rijtje zet. Hier zijn ze:

a. De vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ staat loodrecht op de beide vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.
b. De lengte van de vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ is gelijk aan de oppervlakte van het parallellogram dat door $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ wordt opgespannen.
c. Het drietal $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (let op de volgorde!) vormt een rechts stelsel.

Eigenschap (a) legt de *drager* van het uitproduct, de lijn door de oorsprong waarlangs de vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ligt, vast: het is de lijn loodrecht op het vlak van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$. Eigenschap (b) legt de *lengte* van de uitproductvector vast. Daarmee zijn er op de drager nog twee mogelijkheden: 'naar boven' of 'naar beneden' in de figuur hiernaast. Eigenschap (c) geeft hier uitsluitsel. Het drietal $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ is een *rechts* stelsel. Dat kan maar op één manier, naar boven in het getekende geval; de andere keuze levert een links stelsel op.



Eigenschap (a), het feit dat $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ loodrecht staat op $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$, kun je in de hierboven gegeven voorbeelden direct verifiëren: het inproduct is nul. Maar ook in het algemene geval is het heel eenvoudig:

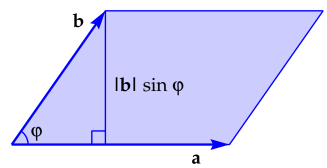
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

want na haakjes uitwerken valt elke term tegen een andere term weg. Hieruit volgt dat $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ loodrecht staat op $\mathbf{a}$. Op dezelfde manier kun je aantonen dat $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ook loodrecht staat op $\mathbf{b}$.

De eigenschappen (b) en (c) zijn lastiger te bewijzen; we laten de bewijzen hier achterwege.

Eigenschap (b) kunnen we ook in formulevorm geven:

b′. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$, waarin φ de hoek is die door de vectoren **a** en **b** wordt ingesloten.



Het rechterlid is immers gelijk aan de oppervlakte van het parallellogram dat door **a** en **b** wordt opgespannen: basislengte $|\mathbf{a}|$ maal hoogte $|\mathbf{b}|\sin\varphi$.

Ook als φ een stompe hoek is, is de sinus ervan positief en ook dan geldt formule (b′). Als **a** en **b** geen van beide de nulvector zijn, kan het uitproduct alleen maar de nulvector zijn als $\sin\varphi = 0$, dus als $\varphi = 0$ of $\varphi = \pi$. De vectoren **a** en **b** zijn dan een scalair veelvoud van elkaar, positief of negatief. Het uitproduct is maximaal als φ een rechte hoek is.

Determinanten in het vlak

We hebben al gezegd dat het uitproduct alleen maar gedefinieerd is voor vectoren in de ruimte. Maar als $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ vectoren in het vlak zijn, kun je ze ook opvatten als ruimtelijke vectoren in het xy-vlak door een z-coördinaat 0 toe te voegen, dus $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Hun uitproduct is dan

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

De lengte van deze vector is $|a_1b_2 - a_2b_1|$ en daarmee hebben we dus een gemakkelijk te onthouden uitdrukking voor de oppervlakte van het parallellogram dat door twee vectoren in het vlak wordt opgespannen.

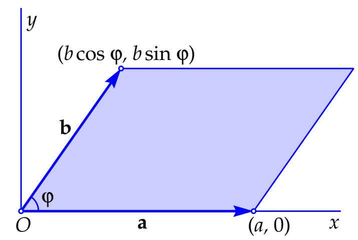
Voorbeeld: als $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan is de oppervlakte van het parallellogram dat door **a** en **b** wordt opgespannen gelijk aan $3 \times 2 - 1 \times 1 = 5$.

De uitdrukking $a_1b_2 - a_2b_1$ heet de *determinant* van $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, notatie $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Een andere notatie is $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Dus

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

De determinant kan positief, negatief en nul zijn. De absolute waarde ervan is gelijk aan de oppervlakte van het parallellogram dat door **a** en **b** wordt opgespannen.

Hiernaast is als voorbeeld een parallellogram getekend dat opgespannen wordt door de vectoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b\cos\varphi \\ b\sin\varphi \end{pmatrix}$ met $a > 0$ en $b > 0$. Dan is dus $|\mathbf{a}| = a$ en $|\mathbf{b}| = b$.



Inderdaad levert de formule van de determinant als uitkomst de oppervlakte van het parallellogram op:

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a & b\cos\varphi \\ 0 & b\sin\varphi \end{vmatrix} = ab\sin\varphi$$

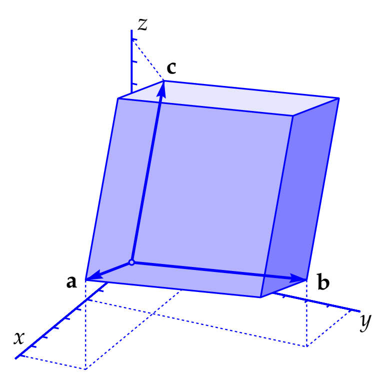
Verwisselen van de vectoren **a** en **b** in de determinant geeft

$$\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \begin{vmatrix} b\cos\varphi & a \\ b\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = -ab\sin\varphi$$

Inderdaad klapt het teken hierdoor om. In het algemeen geldt: de determinant $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ is positief als de draairichting van **a** naar **b** tegen de klok in gaat, en negatief als de draairichting met de klok mee gaat.

Determinanten in de ruimte

Net zoals twee radiusvectoren in het vlak een parallellogram opspannen, spannen drie vectoren **a**, **b**, **c** in de ruimte een *parallellepipedum* op, een soort scheef blok. En zoals de determinant van twee vectoren in het vlak de van een plus- of minteken voorziene oppervlakte van het parallellogram geeft, zo is er ook in de ruimte een determinant die de van een plus- of minteken voorziene *inhoud* geeft van het parallellepipedum.



In de getekende figuur is $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$.

In het algemeen, als $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ dan wordt de *determinant* van **a**, **b** en **c** (let op de volgorde!) als volgt gedefinieerd:

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

In het getekende voorbeeld is dus

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 10 & 4 & 3 \\ 3 & 10 & 3 \\ 4 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 1000 + 27 + 48 - 120 - 90 - 120 = 745$$

In het algemeen is de determinant de van een plus- of minteken voorziene inhoud van het parallellepipedum dat door **a**, **b** en **c** wordt opgespannen: positief als de drie vectoren een *rechts* stelsel vormen, en negatief als ze een *links* stelsel vormen. Verwissel je twee vectoren, dan klapt het teken van de determinant om. Liggen de drie vectoren in één vlak, dan is het parallellepipedum 'platgeslagen', en dan is de inhoud, en dus ook de determinant, nul.

We laten een bewijs van deze eigenschappen achterwege; wel controleren we ze in een paar eenvoudige gevallen.

Neem eerst $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dan is het door **i**, **j** en **k** opgespannen parallellepipedum gewoon de eenheidskubus, en de determinant is

$$\det(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$$

Verwissel je bijvoorbeeld **i** en **j**, dan krijg je een links stelsel, en inderdaad is

$$\det(\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 1 = -1$$

Een rechthoekig blok met lengte a, breedte b en hoogte c kun je opspannen door de vectoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$. De bijbehorende determinant is

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

en dat is inderdaad de inhoud van het blok: lengte $\times$ breedte $\times$ hoogte.

Hoe onthoud je de formule voor een 3×3-determinant?

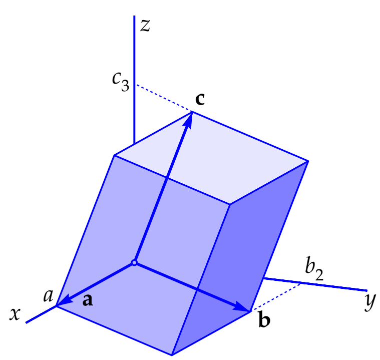
De formule voor een 3×3-determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

ziet er afschrikwekkend uit. Toch zit er veel structuur in, en die maakt het relatief makkelijk om hem te onthouden. Er zijn zes termen, elk van de vorm $a_{..}b_{..}c_{..}$ met op de puntjes telkens de getallen 1, 2 en 3 in alle zes de mogelijke volgordes. Er zijn drie termen met een plusteken en drie termen met een minteken. Je kunt ze 'visueel' als volgt in je geheugen prenten:

$$\begin{array}{ccccccc} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} & & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} & & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = & a_1b_2c_3 & + & a_2b_3c_1 & + & a_3b_1c_2 \\ & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} & & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} & & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ - & a_3b_2c_1 & - & a_1b_3c_2 & - & a_2b_1c_3 \end{array}$$

Tot slot nog een meetkundige illustratie. Stel dat de vectoren **a**, **b** en **c** een rechts stelsel vormen. Je kunt het coördinatenstelsel dan zo kiezen, dat **a** langs de positieve x-as ligt, **b** in het xy-vlak ligt met een y-coördinaat b_2 die positief is, en **c** een positieve z-coördinaat heeft (zie de figuur). Dan is $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ met $a > 0$, $b_2 > 0$ en $c_3 > 0$.



De oppervlakte van het grondvlak van het parallellepipedum is dan $a \cdot b_2$ en de hoogte ervan is c_3, dus de inhoud (= oppervlakte grondvlak $\times$ hoogte) is $a \cdot b_2 \cdot c_3$, en inderdaad is

$$\begin{vmatrix} a & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a\, b_2c_3$$

Samenvatting

Het *uitproduct* (uitwendig product, vectorieel product, *cross product* (Engels)) van twee vectoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ wordt gedefinieerd door

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Het is dus een *vector*, in tegenstelling tot het inproduct, dat een *reëel getal* is.

Eigenschappen van het uitproduct:

a. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ voor elke vector $\mathbf{a}$. Het uitproduct van een vector met zichzelf is de nulvector.
b. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ voor elk tweetal vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$. Bij verwisselen van de twee vectoren keert de richting van het uitproduct om.
c. De vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ staat loodrecht op de beide vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.
d. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$, waarin φ de hoek is die door de vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ wordt ingesloten. Dat wil zeggen: de lengte van de vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ is gelijk aan de oppervlakte van het parallellogram dat door $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ wordt opgespannen.
e. Het drietal $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (let op de volgorde!) vormt een rechts georiënteerd stelsel.

De *determinant* van twee vectoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ in het vlak wordt gegeven door

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

De absolute waarde van de determinant is gelijk aan de oppervlakte van het parallellogram dat door $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ wordt opgespannen.

De *determinant* van drie vectoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ in de ruimte wordt gegeven door

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

De absolute waarde van de determinant is gelijk aan de inhoud van het parallellepipedum dat door $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$ wordt opgespannen.

Opgaven

4.1 Stel $\mathbf{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ en $\mathbf{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

a. Laat zien dat $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$.
b. Laat zien dat $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.
c. Bereken $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j}$ en $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j})$.

4.2 Bereken:

a. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\-6\\6\end{pmatrix}$

f. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix}$

4.3 Gegeven is het vlak α met parametervoorstelling

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

a. Bepaal met behulp van het uitproduct een normaalvector van α.
b. Bepaal hiermee een vergelijking van α.
c. Beantwoord dezelfde vragen voor het vlak β met parametervoorstelling

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

4.4 Bereken de volgende determinanten:

a. $\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix}2 & 0\\4 & 7\end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix}-1 & 2\\2 & -4\end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}$

e. $\begin{vmatrix}5 & 3\\3 & 5\end{vmatrix}$

f. $\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{vmatrix}$

4.5 Bereken de volgende determinanten:

a. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

e. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

f. $\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

g. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

h. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

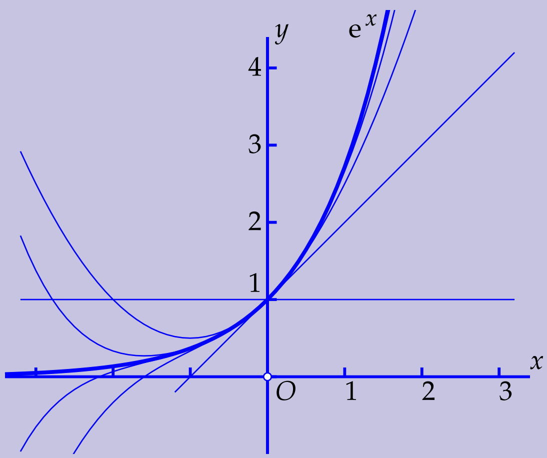
i. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

j. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

4.6 Stel $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

Toon aan dat voor het inproduct van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ geldt dat $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

III Reeksontwikkeling



Polynomen zijn de eenvoudigste functies in de wiskunde. Eigenlijk zijn polynomen de enige functies die je voor alle waarden van x echt exact kunt berekenen. Rekenmachines gebruiken polynoombenaderingen om numerieke waarden van functies zoals wortels, exponentiële functies, logaritmen of goniometrische functies te berekenen.

In dit deel maak je kennis met reeksontwikkelingen. In feite is een reeksontwikkeling een korte schrijfwijze voor een rij polynomen die een bepaalde functie op een zeker interval steeds beter benaderen. Een bekend voorbeeld is de ontwikkeling voor de e*-macht:*

$$\mathrm{e}^{\,x} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

Wanneer je die ontwikkeling na $n+1$ *termen afbreekt, krijg je een polynoom van graad* n *dat een benadering van de functie* e^x *geeft. Hoe groter je* n *kiest, des te beter is de benadering.*

Alle computeralgebrapakketten (Derive, Maple, Mathematica, MATLAB, ...) hebben faciliteiten om reeksontwikkelingen te berekenen en grafisch weer te geven. We gaan ervan uit dat je bij de bestudering van dit deel ook zelf met je favoriete pakket gaat experimenteren. Zo kun je alle figuren ook zelf op een computerscherm produceren, en aan de hand daarvan het convergentiegedrag van machtreeksontwikkelingen bestuderen. De opgaven in dit deel zijn echter bedoeld om met de hand *(pen en papier) te maken. De berekeningen zijn eenvoudig. Het zonder rekenhulp maken ervan is noodzakelijk om verstand van zaken te krijgen!*

Voorkennis: BW 7, BW 8, BW 16, BW 17, BW18, BW20

8 Machtreeksen voor functies

Veel standaardfuncties bezitten een zogenaamde *reeksontwikkeling* in opklimmende machten van x. Bijvoorbeeld

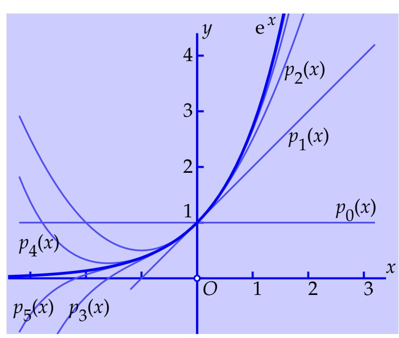
$$
\begin{array}{rcll}
e^x & = & 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots & \text{voor alle } x \\
\cos x & = & 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots & \text{voor alle } x \\
\sin x & = & x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots & \text{voor alle } x \\
\ln(1+x) & = & x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots & \text{voor alle } -1 < x \leq 1 \\
\frac{1}{1+x} & = & 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots & \text{voor alle } |x| < 1 \\
\arctan x & = & x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \cdots & \text{voor alle } |x| \leq 1 \\
\frac{1}{1+x^2} & = & 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots & \text{voor alle } |x| < 1
\end{array}
$$

Wat is de betekenis van zulke machtreeksontwikkelingen en waar worden ze voor gebruikt? Op deze vragen geeft dit deel antwoord.

De reeksontwikkeling van de e-macht

Laten we eerst eens kijken naar de machtreeksontwikkeling van de functie e^x. Die reeksontwikkeling is een oneindige som van termen, dus het gaat om de *limiet* van het proces waarbij je steeds meer termen bij elkaar optelt. Anders gezegd, je bekijkt de volgende rij *polynomen*

$$
\begin{array}{rcl}
p_0(x) & = & 1 \\
p_1(x) & = & 1 + x \\
p_2(x) & = & 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \\
p_3(x) & = & 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \\
p_4(x) & = & 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \\
\cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$



(de faculteiten hebben we uitgerekend).

Elke $p_n(x)$ is een n-degraadspolynoom. In $p_n(x)$ zijn alle machten tot en met de n-de macht uit de reeksontwikkeling meegenomen. Hierboven zijn de grafieken van de functie e^x en de eerste zes polynomen getekend. Rond $x = 0$ vlijen de grafieken van de polynomen zich steeds dichter tegen de grafiek van e^x aan. De grafiek van $p_1(x)$ is de raaklijn in $x = 0$.

Het lijkt alsof de formules voor de eerste twee termen van de reeksontwikkeling een beetje uit de toon vallen: de andere hebben allemaal een faculteit in de noemer. Maar als je bedenkt dat $0! = 1$ en $1! = 1$ (en dat $x^0 = 1$), dan zie je dat alle termen de gedaante $\frac{1}{k!}x^k$ hebben ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$). Met de sigmanotatie kunnen we de reeksontwikkeling voor de e-macht dus heel kort beschrijven:

$$\mathrm{e}^x = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

terwijl de n-de polynoombenadering gegeven wordt door

$$p_n(x) = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$$

Voor alle x convergeert $p_n(x)$ naar e^x, dat wil zeggen

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{voor alle } x$$

De convergentie verloopt sneller naarmate x dichter bij 0 ligt, zoals je ook in de grafieken kunt zien. Op het interval $-1 \le x \le 1$, bijvoorbeeld, is de grafiek van $p_3(x)$ op het oog al nauwelijks meer van die van e^x te onderscheiden.

De reeksontwikkelingen van de cosinus en de sinus

De reeksontwikkelingen van de cosinus en de sinus zijn

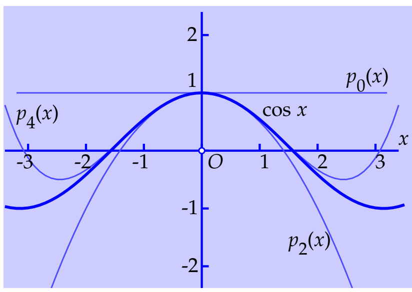
$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \quad \text{voor alle } x \\
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \quad \text{voor alle } x
\end{aligned}$$

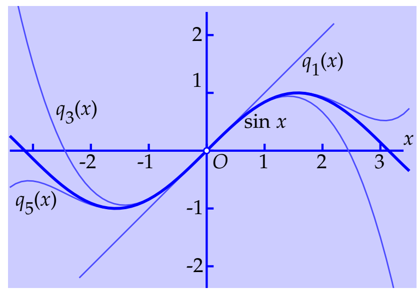
Ze lijken op die van de e-macht, alleen zie je dat plus- en mintekens elkaar afwisselen. Verder bevat de cosinus alleen *even* machten, en de sinus alleen *oneven* machten. Dit wekt geen verwondering, want de cosinus is immers een *even* functie (voor alle x geldt $\cos(-x) = \cos x$), terwijl de sinus een *oneven* functie is (voor alle x geldt $\sin(-x) = -\sin x$).

In de sigmanotatie kun je de machtreeksontwikkelingen weer kort beschrijven. Bedenk hiervoor dat $(-1)^k = 1$ als k even is, en $(-1)^k = -1$ als k oneven is. Verder doorloopt $2k$ alle even getallen, en $2k+1$ alle oneven getallen als $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Dan geldt dus (ga na!):

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad \text{en} \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Hieronder zie je de grafieken met de eerste polynoombenaderingen:





$$\begin{array}{lcl} p_0(x) & = & 1 \\ p_2(x) & = & 1 - \frac{1}{2}x^2 \\ p_4(x) & = & 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} q_1(x) & = & x \\ q_3(x) & = & x - \frac{1}{6}x^3 \\ q_5(x) & = & x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Om verwarring te voorkomen, hebben we de polynoombenaderingen van de sinus hier aangegeven met $q_n(x)$. De faculteiten hebben we weer uitgerekend. Je ziet opnieuw dat de opvolgende benaderingen zich steeds dichter tegen de grafiek van de functie aanvlijen.

Er is nog iets interessants om op te merken. Bekijk opnieuw de reeksontwikkelingen van de cosinus en de sinus.

$$\begin{array}{lcl} \cos x & = & 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \\ \sin x & = & x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \end{array}$$

Je weet dat de afgeleide van de sinus gelijk is aan de cosinus, en dat de afgeleide van de cosinus gelijk is aan *min* de sinus. Als je de reeksontwikkeling van de sinus *term voor term* differentieert, krijg je precies de machtreeksontwikkeling van de cosinus, ga maar na! En als je de machtreeksontwikkeling van de cosinus term voor term differentieert, krijg je die van de sinus, maar dan met een minteken: bij alle termen is het teken omgeklapt.

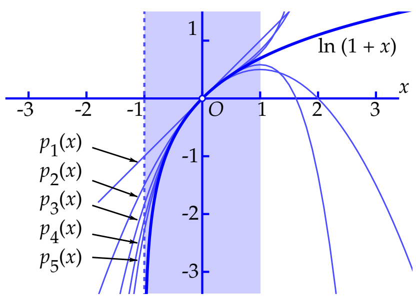
De reeksontwikkelingen van $\ln(1+x)$ en $\dfrac{1}{1+x}$

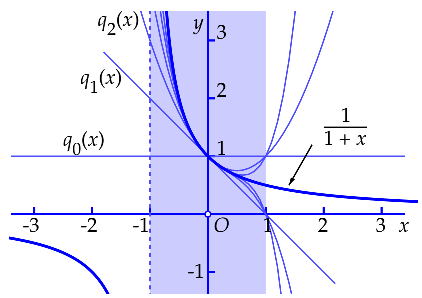
De volgende twee reeksontwikkelingen zijn

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots && \text{voor alle } -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots && \text{voor alle } |x| < 1 \end{aligned}$$

De onderste is een oude bekende: het is de somformule voor de meetkundige rij met reden $-x$ want $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)}$. We weten al dat die alleen geldig is als $|x| < 1$. De bovenste reeksontwikkeling is nieuw, maar bedenk nu dat de afgeleide van $\ln(1+x)$ gelijk is aan $\dfrac{1}{1+x}$ en kijk wat er gebeurt als je de gegeven reeksontwikkeling voor $\ln(1+x)$ term voor term differentieert. Dan krijg je inderdaad precies de ontwikkeling die eronder staat! Dit maakt de gegeven ontwikkeling plausibel.

Hieronder zie je de grafieken met de eerste polynoombenaderingen:





$$\begin{aligned} p_0(x) &= 0 & q_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= x & q_1(x) &= 1 - x \\ p_2(x) &= x - \frac{1}{2}x^2 & q_2(x) &= 1 - x + x^2 \\ p_3(x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 & q_3(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 \\ p_4(x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 & q_4(x) &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \\ \cdots &\quad \cdots \quad \cdots & \cdots &\quad \cdots \quad \cdots \end{aligned}$$

De polynoombenaderingen van $\ln(1+x)$ hebben we aangegeven met $p_n(x)$ en die van $\dfrac{1}{1+x}$ met $q_n(x)$. Op de gekleurde gebieden convergeert de machtreeksontwikkeling naar de functie. Je ziet ook daar weer dat de opvolgende benaderingen zich steeds dichter tegen de grafiek van de functie aanvlijen. Buiten de gekleurde gebieden is er echter geen convergentie. De convergentie is sneller naarmate x dichter bij 0 ligt. Naar de rand van het convergentiegebied toe neemt de convergentiesnelheid af. Let ook op de verticale asymptoot bij $x = -1$ die de beide functies hebben.

Het randpunt $x = 1$ is een bijzonder punt van de machtreeksontwikkeling van de functie $\ln(1 + x)$. Het is een grensgeval: je kunt bewijzen dat de machtreeks daar 'nog net' naar de functie convergeert, met andere woorden, dat

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

maar de convergentie is daar tergend langzaam: als je duizend termen van de reeks bij elkaar optelt, krijg je, afgerond, 0.6926474306 terwijl $\ln 2$ in tien decimalen nauwkeurig gelijk is aan 0.6931471806. Er zijn dus nog geen drie decimalen goed! Dit illustreert opnieuw het feit dat dit soort machtreeksontwikkelingen vooral bruikbaar is voor *kleine* waarden van x; hoe kleiner x is, des te sneller is de convergentie.

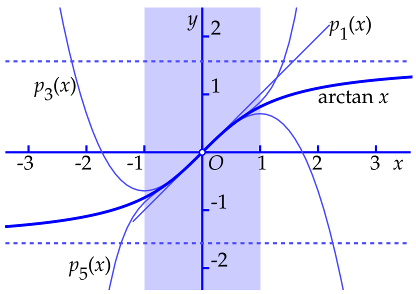
Overigens, als we $x = -\frac{1}{2}$ nemen, krijgen we $\ln(1 + (-\frac{1}{2})) = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$, en dan convergeert de reeks veel sneller. Nu geeft de reeksontwikkeling na tien termen al een benadering die in vier decimalen goed is: -0.6930648562.

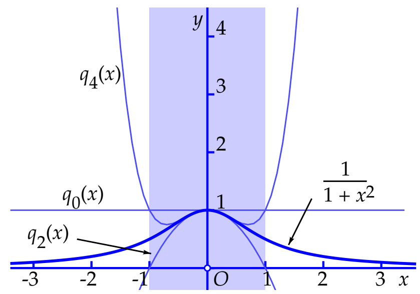
De reeksontwikkelingen van $\arctan x$ en $\dfrac{1}{1+x^2}$

De laatste twee reeksontwikkelingen zijn

$$\begin{aligned} \arctan x &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \cdots && \text{voor alle } |x| \le 1 \\ \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots && \text{voor alle } |x| < 1 \end{aligned}$$

De onderste is weer een oude bekende: het is de somformule voor de meetkundige rij met reden $-x^2$ want $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)}$. We weten al dat die alleen geldig is als $|x| < 1$. Bij de bovenste reeksontwikkeling kun je bedenken dat de afgeleide van $\arctan x$ gelijk is aan $\dfrac{1}{1+x^2}$. Als je de gegeven reeksontwikkeling voor $\arctan x$ term voor term differentieert, krijg je precies de ontwikkeling die eronder staat. Dit maakt de gegeven ontwikkeling plausibel. Hieronder zie je de grafieken met de eerste polynoombenaderingen:





$$\begin{array}{lcl} p_0(x) & = & 0 \\ p_1(x) & = & x \\ p_3(x) & = & x - \frac{1}{3}x^3 \\ p_5(x) & = & x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} q_0(x) & = & 1 \\ q_2(x) & = & 1 - x^2 \\ q_4(x) & = & 1 - x^2 + x^4 \\ q_6(x) & = & 1 - x^2 + x^4 - x^6 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Op de gekleurde gebieden convergeert de machtreeksontwikkeling naar de functie. Je ziet ook daar weer dat de opvolgende benaderingen zich steeds dichter tegen de grafiek van de functie aanvlijen. Buiten de gekleurde gebieden is er echter geen convergentie. De convergentie is sneller naarmate x dichter bij 0 ligt. Naar de rand van het convergentiegebied toe neemt de convergentiesnelheid af.

De randpunten $x = 1$ en $x = -1$ zijn bijzondere punten van de machtreeksontwikkeling van de functie $\arctan x$. Het zijn weer grensgevallen: je kunt bewijzen dat de machtreeks daar 'nog net' naar de functie convergeert, met andere woorden, dat

$$\arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

maar ook hier is de convergentie tergend langzaam.

Overigens, je weet misschien nog dat $\arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$, en vier maal deze reeks zou je dus kunnen gebruiken om π numeriek te benaderen:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots\right)$$

Dat is een slecht idee: de convergentie is zó langzaam, dat je na duizend termen nog maar twee decimalen goed hebt: 3.140592654 terwijl $\pi \approx 3.141592654$.

De convergentiestraal van een machtreeks

Elke machtreeks

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots$$

heeft een *convergentiestraal* $R \geq 0$. De reeks *convergeert* voor alle x met $|x| < R$ en *divergeert* (dat wil zeggen: convergeert niet) voor alle x met $|x| > R$. Voor $x = \pm R$ kan er, afhankelijk van de reeks, convergentie of divergentie optreden. De machtreeksen van de e-macht, de cosinus en de sinus hebben $R = \infty$; ze convergeren voor elke x. Voor de overige reeksen in dit hoofdstuk geldt $R = 1$.

Het *open convergentie-interval* van een machtreeks is het open interval $\langle -R, R \rangle$. De randpunten horen er dus niet bij. Binnen het open convergentie-interval convergeert de machtreeks, maar in het algemeen is de convergentie langzamer naarmate je dichter bij de rand komt.

Binnen het open convergentie-interval mag je de machtreeks van een functie term voor term differentiëren: je krijgt dan de machtreeks van de afgeleide functie. Er geldt dus: als

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \cdots$$

een machtreeks is met convergentiestraal R, dan is voor alle $|x| < R$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \cdots$$

De machtreeks voor $f'(x)$ heeft *dezelfde* convergentiestraal R als die voor $f(x)$.

Samenvatting

Hieronder staan de machtreeksontwikkelingen van enige standaardfuncties.

$$\begin{array}{rcll}
e^{x} & = & 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots & \text{voor alle } x \\
\cos x & = & 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots & \text{voor alle } x \\
\sin x & = & x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots & \text{voor alle } x \\
\ln(1+x) & = & x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots & \text{voor alle } -1 < x \leq 1 \\
\frac{1}{1+x} & = & 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots & \text{voor alle } |x| < 1 \\
\arctan x & = & x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \cdots & \text{voor alle } |x| \leq 1 \\
\frac{1}{1+x^2} & = & 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots & \text{voor alle } |x| < 1
\end{array}$$

Elke machtreeks heeft een *convergentiestraal* $R \geq 0$. De reeks *convergeert* voor alle x met $|x| < R$ en *divergeert* (dat wil zeggen: convergeert niet) voor alle x met $|x| > R$. Voor $x = \pm R$ kan er, afhankelijk van de reeks, convergentie of divergentie optreden. De machtreeksen van de e-macht, de cosinus en de sinus hebben $R = \infty$; ze convergeren voor elke x. De overige reeksen in de bovenstaande lijst hebben allemaal $R = 1$. Sommige van die reeksen convergeren ook nog in een of in beide randpunten.

Het *open convergentie-interval* van een machtreeks is het open interval $\langle -R, R \rangle$. Binnen het open convergentie-interval mag je de machtreeks van een functie term voor term differentiëren: je krijgt dan de machtreeks van de afgeleide functie. De machtreeks van de afgeleide functie heeft dezelfde convergentiestraal als die van de oorspronkelijke functie.

Opgaven

Let op: probeer de volgende opgaven eerst 'zelfstandig' te maken. Loop je vast, kijk dan eens naar het begin van het volgende hoofdstuk. Met wat er daar staat, zul je wel op weg geholpen worden!

Geef de machtreeksontwikkeling van de volgende functies. Geef telkens minimaal de eerste vijf termen.

8.1

a. e^{-x}

b. e^{2x}

c. e^{-x^2}

d. e^{1+x} *hint:* $e^{1+x} = e \cdot e^{x}$

e. $e^{x} + e^{-x}$

8.2

a. $\sin 3x$

b. $\cos x^2$

c. $\sin \frac{1}{2}x$

d. $x \sin x$

e. $\sin x + \cos x$

Geef de machtreeksontwikkeling van de volgende functies en de bijbehorende convergentiestraal. Geef telkens minimaal de eerste vijf termen.

8.3

a. $\dfrac{1}{1+3x}$

b. $\dfrac{1}{3+x}$ *hint:* $3 + x = 3(1 + \frac{1}{3}x)$

c. $\dfrac{x}{1+x}$

d. $\dfrac{x}{1+x^3}$

e. $\dfrac{1+x}{1-x}$

8.4

a. $\ln(1-x)$

b. $\ln(1+2x)$

c. $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$ *hint:* $\ln \dfrac{p}{q} = \ln p - \ln q$

d. $\ln(2+x)$ *hint:* $2 + x = 2(1 + \frac{1}{2}x)$

e. $x^2 \ln(1+x)$

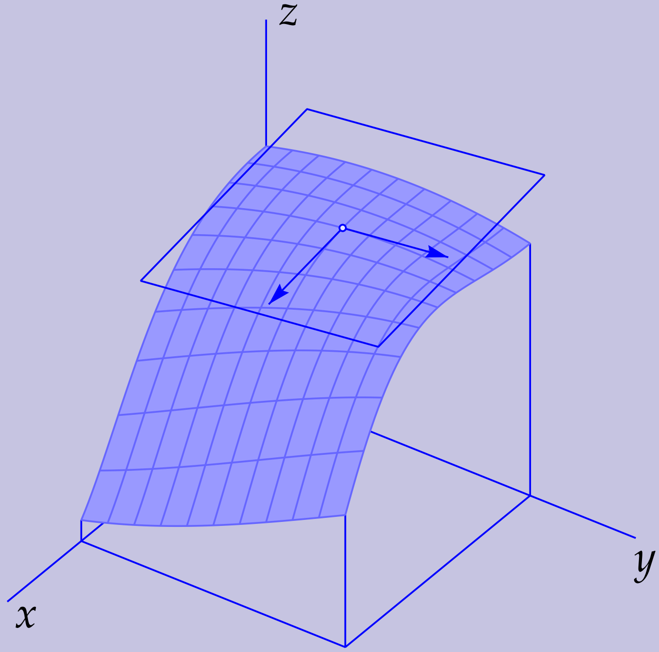
f. $\arctan 2x$

g. $\arctan 2x^2$

8.5 Differentieer de machtreeks van $\dfrac{1}{1+x}$ term voor term. Van welke functie is dit de machtreeksontwikkeling, en wat is de convergentiestraal?

8.6 Differentieer de machtreeks van $\dfrac{1}{1-x^2}$ term voor term. Van welke functie is dit de machtreeksontwikkeling, en wat is de convergentiestraal?

IV Functies van meer variabelen



In vrijwel alle toepassingen van de wiskunde komen naast functies van één variabele ook functies van meer variabelen voor. In het eenvoudigste geval heb je een functie $f(x, y)$ van twee variabelen x en y. Bij zulke functies kun je ook een grafiek maken. Dat is in het algemeen een gekromd oppervlak in de ruimte, net zoals de grafiek van een functie van één variabele een kromme in het vlak is. Met behulp van een computeralgebrapakket kun je zulke grafieken op het scherm krijgen. Je kunt ze dan ook draaien en op die manier van verschillende kanten bekijken.

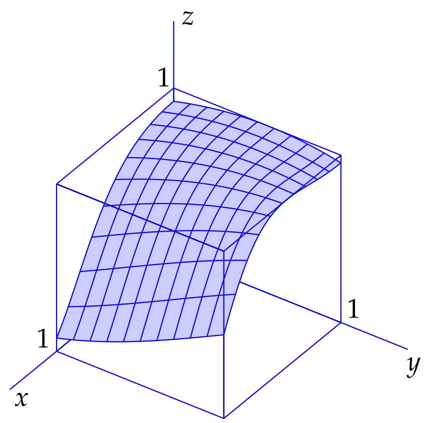
Bij de studie van functies van meer variabelen spelen partiële afgeleiden *een belangrijke rol. We laten zien hoe je er* raakvlakken *mee kunt beschrijven en* lineaire benaderingen. *Ook maak je kennis met de* totale differentiaal *en de* gradiënt *van een functie en met* kettingregels *voor functies van twee of meer variabelen. We sluiten dit deel af met een hoofdstuk over* bolcoördinaten *en* cilindercoördinaten*.*

Voorkennis: BW 16, BW 17, BW 18, BW 19, BW 20,
BW 21, VW 1, VW 2, VW 3, VW 4

11 Functies van twee variabelen

Hieronder zie je een grafiek van een functie $f(x,y)$ van *twee* variabelen x en y. In dit geval is het functievoorschrift

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(1 - \sin(2x^2 - y - 1)\right)$$

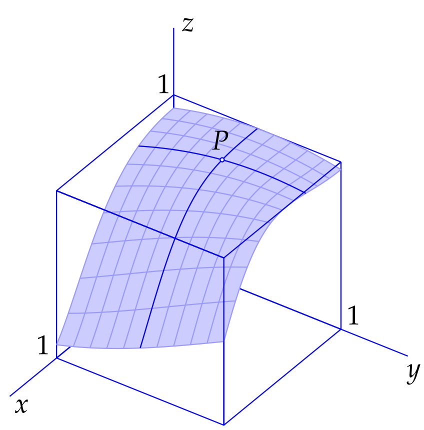


Schrik niet van deze 'ingewikkelde' formule; die is alleen maar zo gekozen om een aardige grafiek te krijgen. Bij elk tweetal getallen x en y kun je de *functiewaarde* $f(x,y)$ uitrekenen door x en y in het functievoorschrift in te vullen. Zo is bijvoorbeeld $f(0,1) = \frac{1}{2}(1 - \sin(-2)) \approx 0.9546$ en $f(1,1) = \frac{1}{2}$.

De grafiek van de functie wordt gevormd door de punten (x,y,z) in de ruimte waarvoor $z = f(x,y)$.

Grafieken, coördinatenlijnen en niveaulijnen

De grafiek van een functie van twee variabelen is dus in het algemeen een gebogen oppervlak in de ruimte, net zoals de grafiek van een functie van één variabele in het algemeen een kromme lijn is in het vlak. De punten (x,y) in het grondvlak waarvoor het functievoorschrift $f(x,y)$ kan worden berekend, vormen het *domein* van de functie. In het gegeven voorbeeld hierboven is het domein de gehele $\mathbb{R}^2$ (het gehele xy-vlak).

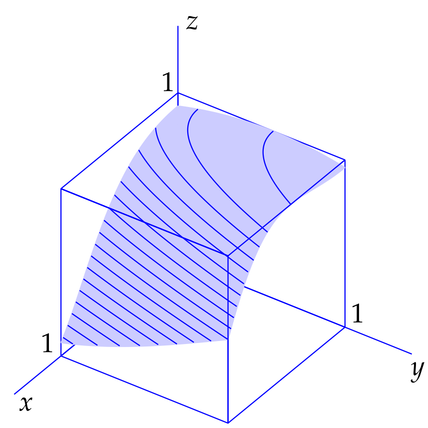


In de tekening van de grafiek is ook een *coördinatennet* aangegeven, gevormd door lijnen op het oppervlak waar x, dan wel y constant is. Hiernaast zijn de coördinatenlijnen door $P = (0.3, 0.5, f(0.3, 0.5))$ donker getekend. De ene lijn hoort dus bij alle punten op het oppervlak waarvoor geldt dat $x = 0.3$, de andere lijn hoort bij alle punten waarvoor geldt dat $y = 0.5$. Het gehele net is getekend voor $x = 0.0, 0.1, \ldots 0.9, 1.0$ en voor $y = 0.0, 0.1, 0.2, \ldots 0.9, 1.0$.

Bij een tekening van een grafiek van een functie maak je altijd een keuze voor het *venster*, het deel van de grafiek dat je tekent. In de figuren hierboven is als venster het gebied $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ genomen. Om de ruimtelijke suggestie van de grafiek te vergroten, is er een kubus omheen getekend. Die maakt echter geen deel uit van de grafiek.

Met computeralgebrapakketten en andere wiskundige software kun je gemakkelijk plaatjes van grafieken van functies van twee variabelen produceren. Het venster moet je dan zelf opgeven, maar meestal berekent het pakket daarna zelf een geschikte schaalverdeling op de z-as om een hanteerbaar plaatje te krijgen. Vaak kun je er ook een omhullend blok omheen laten zetten, en met de muis kun je de grafiek dan ook nog eens roteren. Als je de beschikking hebt over zulke software, moet je daarmee vooral zelf flink experimenteren!

Vaak hebben computeralgebrapakketten ook de mogelijkheid om *niveaulijnen* in een grafiek van een functie van twee variabelen aan te geven. Dat zijn lijnen op het oppervlak waar de functiewaarde constant is, met andere woorden, lijnen waar de functie hetzelfde *niveau* heeft. Op zo'n lijn op het oppervlak is z dus constant. Hiernaast zijn voor dezelfde functie als boven de niveaulijnen aangegeven voor $z = 1.00$, $z = 0.95$, $z = 0.90$, $z = 0.85$, $z = 0.80, \ldots$.



In het getekende voorbeeld geldt

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\left(1 - \sin(2x^2 - y - 1)\right)$$

Voor alle punten op het niveau $z = 1$ geldt $f(x, y) = 1$, dus

$$\frac{1}{2}\left(1 - \sin(2x^2 - y - 1)\right) = 1$$

Dit geeft na omwerken $\sin(2x^2 - y - 1) = -1$ en binnen het gekozen venster geldt dan $2x^2 - y - 1 = -\frac{1}{2}\pi$ oftewel

$$y = 2x^2 + \frac{1}{2}\pi - 1$$

Dit is een (deel van een) parabool op hoogte $z = 1$. Je kunt laten zien dat de andere getekende niveaulijnen ook delen zijn van parabolen. Zo is de getekende niveaulijn voor $z = \frac{1}{2}$ een deel van de parabool

$$y = 2x^2 - 1$$

Partiële afgeleiden

Als we bij de functie $f(x, y)$ een van de twee variabelen, bijvoorbeeld y, constant houden, is de functie alleen nog maar van x afhankelijk. In de grafiek bevinden we ons dan op de coördinatenlijn die bij die constante y-waarde hoort. Als $f(x, y)$ dan als functie van x *differentieerbaar* is, heet de afgeleide de *partiële afgeleide van* $f(x, y)$ *naar* x. Er zijn voor de partiële afgeleide drie verschillende notaties gangbaar:

$$f_x(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

Let hierbij op de kromme d's (∂) in de tweede en de derde notatie. Wij zullen overigens in het vervolg meestal de eerste (korte) notatie gebruiken.

Volgens de definitie van de afgeleide is

$$f_x(x, y) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x + dx, y) - f(x, y)}{dx}$$

Evenzo krijg je de *partiële afgeleide naar* y wanneer je juist x constant houdt en y als variabele opvat. De gangbare notaties hiervoor zijn

$$f_y(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Volgens de definitie van de afgeleide is

$$f_y(x, y) = \lim_{dy \to 0} \frac{f(x, y + dy) - f(x, y)}{dy}$$

In het eerder gegeven voorbeeld was

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\left(1 - \sin(2x^2 - y - 1)\right)$$

Dan is dus (let op: je moet y hier als een constante beschouwen!)

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2}(-4x)\cos(2x^2 - y - 1) = -2x\cos(2x^2 - y - 1)$$

en evenzo, nu partieel naar y differentiëren en dus x constant houden:

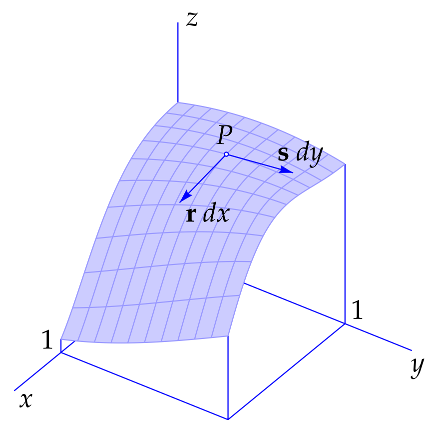
$$f_y(x, y) = \frac{1}{2}\cos(2x^2 - y - 1)$$

Nemen we weer het punt P op de grafiek van $f(x, y)$ waarvoor geldt $x = 0.3$ en $y = 0.5$, dan geeft een korte berekening dat $f(x, y) \approx 0.98436$ en dus is (afgerond) $P = (0.3, 0.5, 0.98436)$. De beide partiële afgeleiden zijn

$$f_x(0.3, 0.5) \approx -0.14891 \qquad \text{en} \qquad f_y(0.3, 0.5) \approx 0.12409$$

Raakvectoren en raakvlak

In de figuur hiernaast hebben we *raakvectoren* aan de coördinatenlijnen door $P = (x_P, y_P, f(x_P, y_P))$ getekend. Ze hebben beide het punt P als beginpunt. De ene raakvector heeft een component in de x-richting die we dx zullen noemen, en een component in de y-richting die 0 is. De component dz van die raakvector in de z-richting is dan gelijk aan $f_x(x_P, y_P)dx$ want in dit geval geldt (denk aan differentialen) $dz = f_x(x_P, y_P)\,dx$.



De raakvector zelf is dus

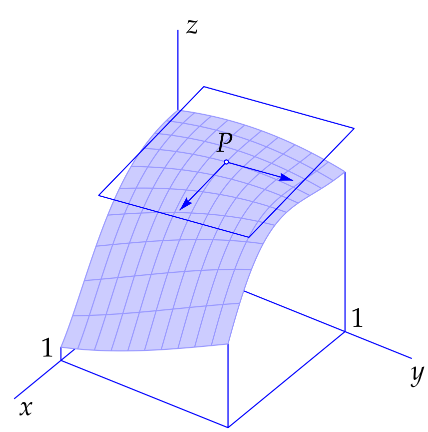
$$\begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ f_x(x_P, y_P)dx \end{pmatrix} = \mathbf{r}\,dx \quad \text{met} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_P, y_P) \end{pmatrix}$$

De andere raakvector heeft een component in de y-richting die we dy noemen, en een component 0 in de x-richting. De component dz in de z-richting is dan $dz = f_y(x_P, y_P)dy$ en de raakvector zelf is

$$\begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ f_y(x_P, y_P)dy \end{pmatrix} = \mathbf{s}\,dy \quad \text{met} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_P, y_P) \end{pmatrix}$$

In het getekende voorbeeld hebben we $dx = dy = 0.4$ genomen.

Deze raakvectoren $\mathbf{r}$ en $\mathbf{s}$ spannen het *raakvlak* aan de grafiek van $f(x, y)$ in P op. Elke vector met aangrijpingspunt in P in het raakvlak is een lineaire combinatie $\lambda\mathbf{r} + \mu\mathbf{s}$ van $\mathbf{r}$ en $\mathbf{s}$. En elk van die vectoren is een raakvector in P aan het oppervlak dat de grafiek van $f(x, y)$ vormt. Hiernaast zie je een schets van het raakvlak. Het is eenvoudig om een vergelijking van dat raakvlak te geven. Daartoe hoeven we alleen maar een normaalvector $\mathbf{n}$ op dat vlak te vinden.



Het *uitproduct* van **r** en **s** is zo'n normaalvector (zie bladzijde 28):

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_P, y_P) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_P, y_P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x(x_P, y_P) \\ -f_y(x_P, y_P) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Als we de z-coördinaat van P aangeven met z_P, waarbij dus $z_P = f(x_P, y_P)$, dan heeft het raakvlak in P de vergelijking

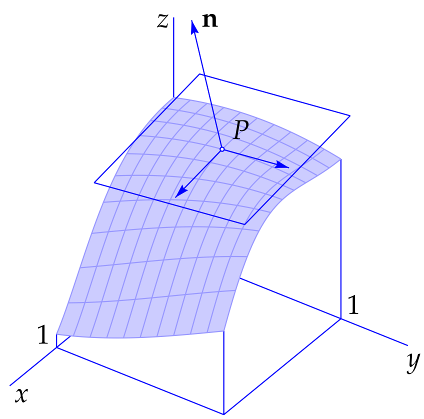
$$-f_x(x_P, y_P)(x - x_P) - f_y(x_P, y_P)(y - y_P) + (z - z_P) = 0$$

In de figuur hiernaast is het raakvlak aangegeven samen met **n**. Hier geldt (afgerond op vijf decimalen)

$$\begin{aligned} P &= (0.3, 0.5, 0.98436) \\ f_x(0,3, 0.5) &= -0.14891 \\ f_y(0.3, 0.5) &= 0.12409 \end{aligned}$$

De normaalvector **n** is dan

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0.14891 \\ -0.12409 \\ 1 \end{pmatrix}$$



en een vergelijking van het raakvlak is

$$0.14891\,x - 0.12409\,y + z = 0.96699$$

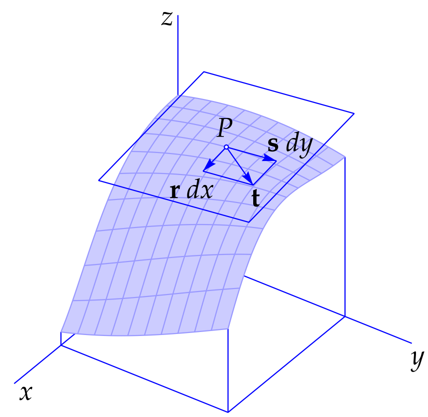
In de bovenstaande figuren heeft de grafiek van $f(x, y)$ een 'glad' verloop: als je steeds meer op een punt ervan inzoomt, gaat de grafiek daar steeds meer op een plat vlak lijken. Dat vlak is het *raakvlak* in dat punt. Je kunt bewijzen dat dit altijd het geval is wanneer de partiële afgeleiden in zo'n punt bestaan en continu zijn. Men noemt de functie dan *differentieerbaar* in dat punt. In het vervolg nemen we steeds aan dat alle functies differentieerbaar zijn in de gebieden waar we ze bestuderen.

De totale differentiaal

Een willekeurige raakvector **t** aan de grafiek van $f(x, y)$ in P is van de vorm

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{r}\,dx + \mathbf{s}\,dy \\ &= \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ f_x(x_P, y_P)dx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ f_y(x_P, y_P)dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ f_x(x_P, y_P)dx + f_y(x_P, y_P)dy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De eerste component, dx, is de toename van de x-coördinaat langs $\mathbf{t}$, de tweede component, dy, is de toename van de y-coördinaat langs $\mathbf{t}$ en de derde component is de toename van de z-coördinaat langs $\mathbf{t}$. Voor *kleine* dx en dy valt het raakvlak in P vrijwel samen met de grafiek van $f(x, y)$, en de toename van z valt dan dus vrijwel samen met de toename van $f(x, y)$.



Die toename van $f(x, y)$ is gelijk aan

$$\Delta f = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$$

Dit is dus voor kleine dx en dy vrijwel gelijk aan

$$f_x(x_P, y_P)dx + f_y(x_P, y_P)dy$$

Men noemt deze laatste uitdrukking de *totale differentiaal* van $f(x, y)$ in het punt P. De notatie hiervoor is df, dus

$$df = f_x(x_P, y_P)dx + f_y(x_P, y_P)dy$$

Kortere notaties zijn

$$df = f_x\, dx + f_y\, dy \qquad \text{of} \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

maar hierbij is de afhankelijkheid van het punt P niet meer zichtbaar. Deze notaties zijn echter wel heel gemakkelijk te onthouden. Ze sluiten ook goed aan bij de bekende notatie $dg = \frac{dg}{dx}\, dx$ voor de differentiaal van een functie van één variabele. Overigens, let in de tweede notatie voor df op de 'kromme' d's bij de partiële afgeleiden!

In de tekening is, net als eerder, $x_P = 0.3$, $y_P = 0.5$ genomen en

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\left(1 - \sin(2x^2 - y - 1)\right)$$

Om een duidelijk plaatje te krijgen, zijn dx en dy niet al te klein genomen: $dx = 0.2$, $dy = 0.3$. De afwijking tussen raakvlak en grafiek is dan ook niet al te klein: het verschil tussen de differentiaal df en het functiewaardenverschil Δf is hierbij ongeveer 0.01. Maar neem je dx en dy tien keer zo klein, dus $dx = 0.02$ en $dy = 0.03$, dan is de totale differentiaal

$$df = f_x(x_P, y_P)\, dx + f_y(x_P, y_P)\, dy \approx -0.14891 \times 0.02 + 0.12409 \times 0.03 \approx 0.00074$$

terwijl Δf gelijk is aan $\Delta f = f(0.32, 0.53) - f(0.3, 0.5) \approx 0.00064$. Het verschil tussen df en Δf is nu nog maar ongeveer 0.0001. Maak je dx en dy nog eens tien maal zo klein, dan blijkt het verschil ongeveer 0.000001 te zijn!

De gradiënt

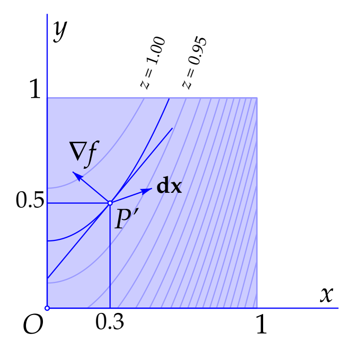
De vector van partiële afgeleiden

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$$

heet de *gradiënt* van $f(x,y)$. Het symbool ∇ wordt uitgesproken als 'nabla'. Vaak schrijven we kortweg ∇f in plaats van $\nabla f(x,y)$. Om de meetkundige betekenis van de gradiënt uit te leggen, gaan we nu over naar het xy-vlak.

In de figuur hieronder zie je de projectie op het xy-vlak van het deel van de grafiek van $f(x,y)$ dat we ook steeds op de vorige bladzijden hebben gebruikt. Het verloop van de grafiek hebben we nu aangegeven door de projectie van de niveaulijnen van $f(x,y)$ te tekenen (zie de figuur op bladzijde 80 voor de niveaulijnen zelf).

De projectie op het xy-vlak van het punt $P = (x_P, y_P, f(x_P, y_P))$ is het punt $P' = (x_P, y_P)$. Opnieuw hebben we hier $x_P = 0.3$ en $y_P = 0.5$ genomen. De niveaulijn door P' is toegevoegd (donker gekleurd). Omdat $f(0.3, 0.5) \approx 0.98436$, ligt deze niveaulijn tussen de (lichtgekleurde) niveaulijnen bij de niveaus $z = 1.00$ en $z = 0.95$. Verder is de raaklijn aan de niveaukromme in P' getekend.



Je ziet in de tekening ook twee vectoren die in P' aangrijpen: een *toenamevector* $\mathbf{dx} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ en de *gradiënt* $\nabla f = \begin{pmatrix} f_x(0.3, 0.5) \\ f_y(0.3, 0.5) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.14891 \\ 0.12409 \end{pmatrix}$.
De toenamevector $\mathbf{dx}$ is willekeurig gekozen; de gradiënt ∇f ligt vast.

De *totale differentiaal* van $f(x,y)$ in P' bij deze toenamevector $\mathbf{dx}$ is

$$df = f_x(0.3, 0.5)\, dx + f_y(0.3, 0.5)\, dy$$

Dit is precies het *inproduct* van ∇f en $\mathbf{dx}$ (zie bladzijde 9), dus

$$df = \langle \nabla f, \mathbf{dx} \rangle = |\nabla f||\mathbf{dx}| \cos \varphi$$

waarin φ de hoek is tussen de beide vectoren.

Stel nu dat $\mathbf{dx}$ een *kleine, vaste* lengte $|\mathbf{dx}|$ heeft, maar een variabele richting. Dan is df alleen nog maar afhankelijk van φ. Bedenk ook dat df voor kleine $|\mathbf{dx}|$ vrijwel samenvalt met de toename $\Delta f = f(x_p + dx, y_P + dy) - f(x_P, y_P)$ van f. Als je voldoende dicht inzoomt op P', zijn Δf en df nauwelijks van elkaar te onderscheiden.

Uit de relatie $df = \langle \nabla f, \mathbf{dx} \rangle = |\nabla f||\mathbf{dx}| \cos\varphi$ volgt dat de totale differentaal df *maximaal* is voor $\varphi = 0$, want dan is $\cos\varphi = 1$. Dat wil zeggen dat df maximaal is als $\mathbf{dx}$ dezelfde richting heeft als de gradiënt. Met andere woorden:

De gradiënt geeft de richting aan waarin $f(x, y)$ het sterkst toeneemt.

En natuurlijk geeft $-\nabla f$ dan de richting aan waarlangs $f(x, y)$ het snelst afneemt. Op een berglandschap waarin $f(x, y)$ de hoogte boven zeeniveau aangeeft, zal water dus zo naar beneden stromen, dat de horizontale component van de stroming altijd precies tegen de gradiënt in loopt. En wil je het snelst de top van een berg bereiken, dan moet je ervoor zorgen dat de horizontale component van je looprichting overal de richting van de gradiënt volgt. Loodrecht op die beide richtingen omhoog en omlaag staat de richting van de niveaulijn want dan is $\cos\varphi = 0$, en ook df is dan dus nul. Op een landkaart snijden de rivieren de hoogtelijnen daarom altijd loodrecht.

De vergelijking $df = 0$ luidt, in uitgeschreven vorm,

$$f_x(x_P, y_P)\, dx + f_y(x_P, y_P)\, dy = 0$$

Met $dx = x - x_P$ en $dy = y - y_P$ wordt dit

$$f_x(x_P, y_P)\,(x - x_P) + f_y(x_P, y_P)\,(y - y_P) = 0$$

en dat is de vergelijking (in x en y) van een rechte lijn door $P' = (x_P, y_P)$. Het is de *raaklijn aan de niveaulijn door P'*. Die lijn heeft de gradiënt $\nabla f(x_P, y_P)$ als normaalvector.

Er is nog een andere, veel gebruikte interpretatie van de totale differentiaal. Die heeft te maken met het gedrag van $f(x, y)$ in de buurt van een vast gekozen punt (x_P, y_P). Je weet dat df voor kleine dx en dy een goede benadering is van $\Delta f = f(x, y) - f(x_P, y_P)$. We schrijven dit als

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_P, y_P) + \Delta f \;\approx\; f(x_P, y_P) + df \\ &= f(x_P, y_P) + f_x(x_P, y_P)(x - x_P) + f_y(x_P, y_P)(y - y_P) \end{aligned}$$

waarbij we weer $dx = x - x_P$ en $dy = y - y_P$ hebben genomen. Het rechterlid van de tweede regel is een *lineaire* functie (eerstegraadsfunctie) van x en y, en het rechterlid heet daarom de *linearisatie* (eerstegraadsbenadering) van $f(x, y)$ met centrum (x_P, y_P).

In het voorbeeld hierboven gold dat $f(x_P, y_P) = f(0.3, 0.5) \approx 0.98436$ en dat $f_x(0.3, 0.5) \approx -0.14891$ en $f_y(0.3, 0.5) \approx 0.12409$. De linearisatie van $f(x, y)$ rond P' is dus (afgerond)

$$0.98436 - 0.14891(x - 0.3) + 0.12409(y - 0.5)$$

en de vergelijking van de raaklijn aan de niveaulijn door P' is

$$-0.14891(x - 0.3) + 0.12409(y - 0.5) = 0$$

Samenvatting

Als $f(x,y)$ een functie van twee variabelen x en y is, wordt de grafiek ervan gevormd door de punten $(x,y,f(x,y))$. De grafiek is een (in het algemeen gekromd) oppervlak in de ruimte. De *coördinatenlijnen* zijn de (kromme) lijnen op het oppervlak waar x constant is, dan wel y constant is. De *niveaulijnen* zijn de (kromme) lijnen op het oppervlak waar $f(x,y)$ constant is, met andere woorden, de lijnen waar z constant is.

De *partiële afgeleiden* van een functie zijn de afgeleiden die je krijgt als je alle variabelen op een na constant houdt. Voor de partiële afgeleide van $f(x,y)$ naar x worden de volgende notaties gebruikt:

$$f_x(x,y), \quad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

en voor de partiële afgeleide van $f(x,y)$ naar y

$$f_y(x,y), \quad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y) \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

De *raakvectoren* in een punt $P = (x_P, y_P, f(x_P, y_P))$ op de grafiek van $f(x,y)$ in de richting van de coördinaatlijnen door P zijn

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_P,y_P) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_P,y_P) \end{pmatrix}$$

Samen spannen ze het *raakvlak* in P op. Een vergelijking ervan is

$$f_x(x_P,y_P)(x-x_P) + f_y(x_P,y_P)(y-y_P) - (z-z_P) = 0$$

De *totale differentiaal* df van $f(x,y)$ die hoort bij de toenames dx van x en dy van y is

$$df = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy$$

Als de partiële afgeleiden in een punt bestaan en continu zijn, dan heet de functie daar *differentieerbaar*.

De *gradiënt* van $f(x,y)$ is de vector $\nabla f = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$.

Wanneer $\mathbf{dx} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ dan geldt voor de bijbehorende totale differentiaal

$$df = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy = \langle \nabla f, \mathbf{dx} \rangle$$

De gradiënt in een punt in het xy-vlak geeft de richting aan van de snelste stijging van $f(x,y)$. De gradiënt staat loodrecht op de projectie van de niveaulijn van $f(x,y)$ door dat punt. De gradiënt is een normaalvector van de raaklijn in dat punt aan die niveaulijn.

Opgaven

11.1 Onderzoek met behulp van de computer de grafiek van de volgende functies. Kies daarbij geschikte vensters, draai de grafiek met de muis en laat ook niveaulijnen op de grafiek tekenen.

a. $f(x, y) = xy$
b. $f(x, y) = 3x + 2y - 1$
c. $f(x, y) = x^2 y$
d. $f(x, y) = x^2 + y^2$
e. $f(x, y) = xe^{y}$
f. $f(x, y) = x^3 + y^3$
g. $f(x, y) = \sqrt{xy}$
h. $f(x, y) = \dfrac{3x^2 - 2y^2}{3x^2 + 2y^2}$
i. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
j. $f(x, y) = \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

Opmerking: wanneer je niet over een geschikt pakket op de computer beschikt, kun je ook met de hand enige niveaulijnen in het xy-vlak tekenen, en zo een indruk krijgen van het verloop van de functie.

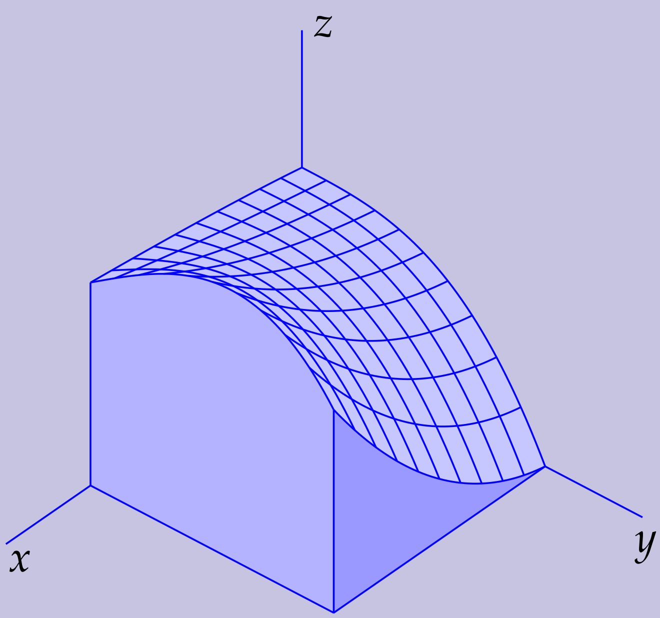
11.2 Bereken bij de eerste zes functies uit de vorige opgave de partiële afgeleiden $f_x(x, y)$ en $f_y(x, y)$. Bereken ook de gradiënt en de totale differentiaal.

11.3 Gegeven is de functie $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2$ en het punt $P = (2, -1, 2)$ op de grafiek ervan.

a. Bereken een vergelijking van het raakvlak in P aan de grafiek.
b. De projectie op het xy-vlak van de niveaulijn door P is een ellips. Geef een vergelijking van die ellips.
c. De projectie van P op het xy-vlak noemen we P'. Bereken de gradiënt van $f(x, y)$ in het punt P'.
d. Geef een vergelijking van de raaklijn aan de ellips in P'. Bereken hiermee ook de richtingscoëfficiënt van die raaklijn.
e. Neem $\mathbf{dx} = \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.15 \end{pmatrix}$ en bereken hierbij de totale differentiaal df in P'. Vergelijk die met Δf.
f. Zelfde vragen voor $\mathbf{dx} = \begin{pmatrix} 0.010 \\ 0.015 \end{pmatrix}$.

11.4 Beantwoord dezelfde vragen als in de vorige opgave voor de functie $f(x, y) = xy$ en het punt $P = (1, 2, 2)$ (de niveaulijnen zijn nu geen ellipsen maar hyperbolen).

V Meervoudige integralen



In veel toepassingen worden functies van meer variabelen geïntegreerd over gebieden in het vlak of in de ruimte. In dit deel leggen we uit wat de betekenis is van zulke dubbelintegralen en drievoudige integralen. We laten zien hoe je ze kunt interpreteren en hoe je ze in benaderende vorm zou kunnen berekenen. Krachtige software hiervoor is ruim beschikbaar, maar in dit boek zullen we daar geen aandacht aan besteden. Daarnaast is het in sommige gevallen ook mogelijk om meervoudige integralen exact uit te rekenen door ze terug te brengen tot herhaalde integralen van functies van één variabele. Daar zullen we wél uitgebreid mee oefenen. In sommige gevallen is het ook handig om op andere coördinatenstelsels over te gaan, bijvoorbeeld op poolcoördinaten, cilindercoördinaten of bolcoördinaten. De bijbehorende integralen moeten dan worden aangepast. Ook dat komt in dit deel uitgebreid aan de orde.

Voorkennis: BW 21, BW 22, VW 11, VW 12, VW 13, VW 14

15 Dubbelintegralen

Een *dubbelintegraal* is een uitdrukking van de vorm

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy$$

waarin E een deel is van het xy-vlak en $f(x,y)$ een functie is van twee variabelen. We zullen ons voorlopig beperken tot dubbelintegralen waarbij E een rechthoek is met zijden evenwijdig aan de coördinaatassen en waarbij bovendien de functie $f(x,y)$ continu is op E (dat wil zeggen dat de grafiek ervan op E geen sprongen maakt).

In het voorbeeld hieronder is voor E het vierkant $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ genomen. Als functie hebben we gekozen

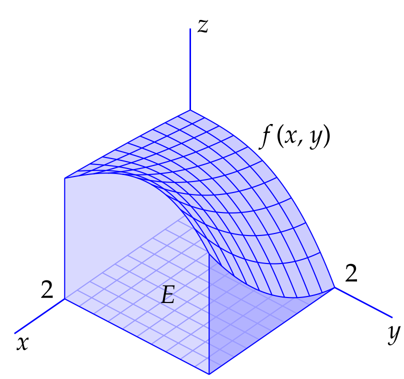
$$f(x,y) = \frac{1}{6}(x^2y + 2\sqrt{x+1} - y^3 + 6)$$

Dubbelintegraal als inhoud

Wat is de betekenis van zo'n dubbelintegraal? Net zoals $\int_a^b g(x)\,dx$ de oppervlakte voorstelt onder de grafiek van $g(x)$ boven $[a,b]$, zo stelt

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy$$

de *inhoud* voor van het deel van de ruimte onder de grafiek van $f(x,y)$ dat boven E ligt. Althans, als $f(x,y) \geq 0$ is op E zoals in de figuur hiernaast. Als er stukken zijn waar $f(x,y) < 0$ is, dan moet je de inhoud daarvan met een minteken nemen, net als bij gewone (enkelvoudige) integralen.



Om de ruimtelijke indruk van de figuur hierboven te vergroten, hebben we op de grafiek van $f(x,y)$ een coördinatennet aangebracht. Ook de projectie ervan op het grondvlak is getekend. Daar is het een verdeling van E in vierkantjes met zijden van lengte 0.2. Het zijn er tien in elke richting, dus honderd in totaal.

Numerieke benaderingen van een dubbelintegraal

Hoe bereken je een dubbelintegraal? In principe zijn er, net als bij enkelvoudige integralen, twee methodes: exact en benaderend. De exacte methode maakt gebruik van de calculus, de differentiaal- en integraalrekening. Helaas is de bruikbaarheid ervan beperkt: niet voor alle functies $f(x, y)$ en niet voor alle gebieden E lukt het om een exacte uitkomst te geven.

De integraal $\iint_E f(x, y)\, dxdy$ uit de vorige paragraaf kan wel exact berekend worden. We zullen later uitleggen hoe dat gaat. Hier geven we alvast de uitkomst:

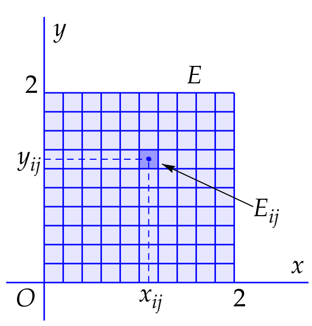
$$\iint_E f(x, y)\, dxdy = \frac{28}{9} + \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 5.420512188$$

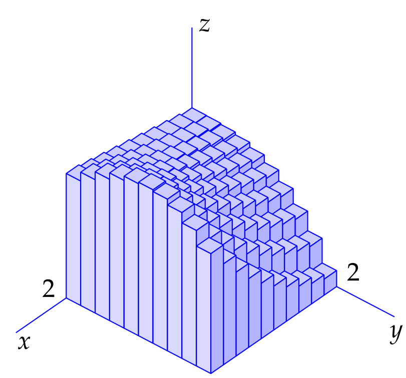
Een numerieke benadering van de dubbelintegraal kunnen we als volgt berekenen. Verdeel het gebied E waarover je moet integreren door horizontale en verticale lijnen in rechthoekjes van lengte dx en breedte dy. De oppervlakte van zo'n rechthoekje is dus $dxdy$. We nummeren die deelrechthoekjes met twee indices, net als de elementen van een matrix, dus E_{ij}. In de figuur hieronder lopen i en j beide van 1 tot 10.

Kies vervolgens in elk deelrechthoekje E_{ij} een punt (x_{ij}, y_{ij}) en bereken daar de functiewaarde $f(x_{ij}, y_{ij})$. Dan is

$$f(x_{ij}, y_{ij})\, dxdy$$

de inhoud van het staafje met hoogte $f(x_{ij}, y_{ij})$ en dit rechthoekje als grondvlak. Als je de inhouden van al die staafjes bij elkaar optelt, krijg je een numerieke benadering van de dubbelintegraal.





In de figuur hierboven hebben we $dx = dy = 0.2$ gekozen en in elk deelrechthoekje is voor (x_{ij}, y_{ij}) het middelpunt ervan genomen. De benadering wordt dan, in negen decimalen afgerond,

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} f(x_{ij}, y_{ij})\, dxdy = 5.425190986$$

Hoe fijner de verdeling gekozen wordt, des te nauwkeurig wordt de exacte uitkomst benaderd. Zo geeft $dx = dy = 0.02$

$$\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{100} f(x_{ij}, y_{ij})\, dxdy = 5.420558998$$

terwijl $dx = dy = 0.002$ als benadering 5.420512656 geeft (zes decimalen goed).

Uiteraard kan de bovenstaande methode nog op tal van punten efficiënter gemaakt worden. Een aparte, en voor de toepassingen buitengewoon belangrijke tak van de wiskunde, de *numerieke wiskunde*, houdt zich hiermee bezig. Dat valt echter buiten het bestek van dit boek. Ook zullen we ons niet bezighouden met de vraag voor welke functies $f(x, y)$ dit goed gaat (continuïteit is een voldoende voorwaarde, maar ook functies die 'niet al te wild discontinu' zijn, kunnen op zo'n manier worden geïntegreerd).

Wel geeft het bovenstaande een goed idee wat zo'n dubbelintegraal nu eigenlijk is. Je kunt het berekenen van een benadering ervan in een iets algemenere notatie als volgt in een stappenplan samenvatten:

1. Verdeel het integratiegebied E in kleine deelgebiedjes dE (men noemt die stukjes dE ook vaak *oppervlakte-elementjes*).
2. Ga ervan uit dat de functie $f(x, y)$ op zo'n klein deelgebiedje dE vrijwel constant is.
3. Kies daarom een willekeurig punt (x, y) in dE en bereken daar $f(x, y)$. Vermenigvuldig dit met de oppervlakte $|dE|$ van dE.
4. Tel alle uitkomsten bij elkaar op. De som $\sum\sum f(x, y)\, |dE|$ is dan bij benadering gelijk aan de dubbelintegraal.

Op deze manier bekeken is het ook duidelijk dat gebieden waar $f(x, y)$ negatief is, een negatieve bijdrage aan die som leveren. Dan is immers zo'n term $f(x, y)\, |dE|$ ook negatief.

De bovenstaande zienswijze heeft een nog veel grotere draagwijdte. Ze werkt ook als het gebied E geen rechthoek is, maar een anders gevormd gebied in het vlak, bijvoorbeeld een cirkel of in het algemeen een gebied dat door rechte of gebogen lijnen begrensd wordt. En als je voor $f(x, y)$ de functie neemt die identiek gelijk aan 1 is, krijg je als uitkomst de *oppervlakte* van E.

Zelfs bij functies van drie variabelen en drievoudige integralen is deze aanpak toepasbaar. Dan integreer je over een gebied E in de ruimte. Ook dan kun je op die manier benaderingen vinden: verdeel E in kleine deelgebiedjes, kies in elk gebiedje een punt, reken daar de functie uit, vermenigvuldig die met de *inhoud* van zo'n deelgebiedje en tel alle uitkomsten bij elkaar op. Zo krijg je een benadering van de integraal, en voor 'nette' functies geldt: hoe kleiner de deelgebiedjes zijn, des te nauwkeuriger is de benadering. En voor $f(x, y, z) = 1$ krijg je nu de *inhoud* van E.

Herhaalde integralen

We zullen nu laten zien hoe je in bepaalde gevallen een dubbelintegraal ook *exact* kunt berekenen. Stel weer dat we de volgende integraal willen berekenen:

$$\iint_E f(x, y)\, dxdy$$

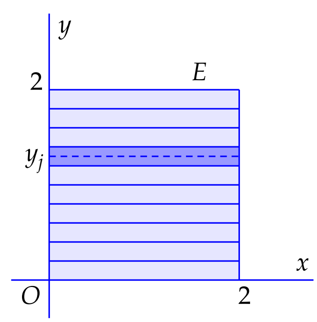
waarin E het vierkant $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ is en

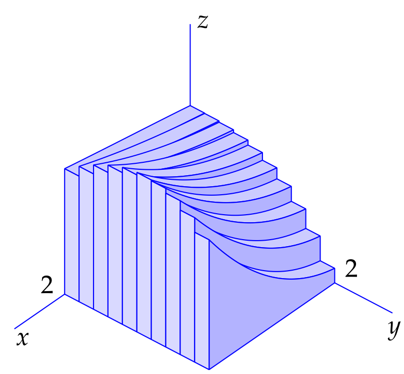
$$f(x, y) = \frac{1}{6}(x^2y + 2\sqrt{x+1} - y^3 + 6)$$

Definieer de volgende hulpfunctie

$$g(y) = \int_{x=0}^{x=2} f(x, y)\, dx$$

Bij vaste y integreer je dus de functie $f(x, y)$ naar x. Het resultaat is dan inderdaad nog een functie van y; we hebben die functie even $g(y)$ genoemd.





Verdeel het gebied E in smalle horizontale stroken met hoogte dy. Kies in elke strook een horizontale lijn op hoogte y_j en bereken $g(y_j)$. In de figuur hierboven is $dy = 0.2$ genomen. Er zijn dan 10 stroken.

Het product $g(y_j)\,dy$ is gelijk aan de inhoud van de 'plak' met dikte dy die de grafiek van de functie $f(x, y_j)$ als profiel heeft (x is hier de variabele, y_j is vast). De oppervlakte van dat profiel is $g(y_j)$. De som

$$\sum_{j=1}^{10} g(y_j)\,dy$$

is weer een benadering van de dubbelintegraal $\iint_E f(x,y)\,dxdy$. Tegelijkertijd is het ook een benadering van de enkelvoudige integraal $\int_0^2 g(y)\,dy$. Voor 'nette' functies geldt nu dat die beide integralen gelijk zijn:

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy = \int_0^2 g(y)\,dy = \int_{y=0}^{y=2} \left(\int_{x=0}^{x=2} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Zo kunnen we de dubbelintegraal dus schrijven als een herhaalde integraal: integreer de functie $f(x,y)$ eerst bij vaste y naar x, en integreer vervolgens de resulterende functie van y naar y.

In het gegeven voorbeeld geldt

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_0^2 f(x,y)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{6}(x^2 y + 2\sqrt{x+1} - y^3 + 6)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{18}x^3 y + \frac{2}{9}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}xy^3 + x \right]_0^2 \\ &= \left(\frac{4}{9}y + \frac{2}{9}\sqrt{27} - \frac{1}{3}y^3 + 2 \right) - \frac{2}{9} \\ &= \frac{4}{9}y + \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{3}y^3 + \frac{16}{9} \end{aligned}$$

en dus is

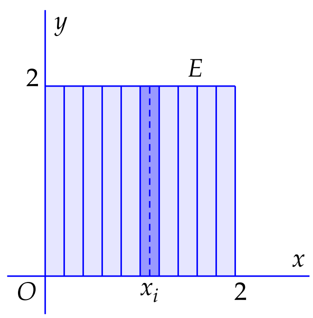
$$\begin{aligned} \iint_E f(x,y)\,dxdy &= \int_{y=0}^{y=2} \left(\int_{x=0}^{x=2} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_0^2 g(y)\,dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{4}{9}y + \frac{2}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{3}y^3 + \frac{16}{9} \right) dy \\ &= \left[\frac{2}{9}y^2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\,y - \frac{1}{12}y^4 + \frac{16}{9}y \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{9} + \frac{4}{3}\sqrt{3} - \frac{16}{12} + \frac{32}{9} = \frac{28}{9} + \frac{4}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

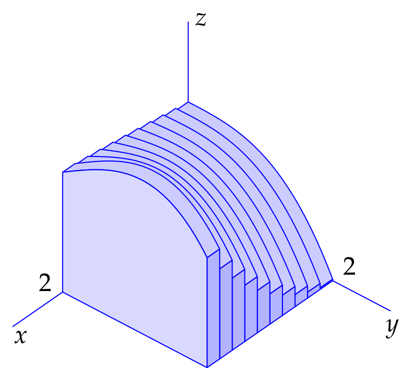
De bovenstaande berekening toont de kracht, maar ook de beperking van de exacte methode. Het is immers lang niet altijd mogelijk een primitieve functie te vinden in termen van bekende, elementaire functies. In zulke gevallen moet je dus hoe dan ook je toevlucht nemen tot numerieke benaderingen.

We hebben in het gegeven voorbeeld eerst naar x geïntegreerd, en daarna naar y. Maar je kunt die volgorde natuurlijk ook omkeren. De dubbelintegraal wordt dan op de volgende manier een herhaalde integraal:

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy = \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=2} f(x,y)\,dy \right) dx$$

De uitkomst is hetzelfde, maar de weg ernaartoe verloopt anders. Hieronder zie je de bijbehorende strokenverdeling van E en de plakkenbenadering van de dubbelintegraal.





Voorbeelden

In deze paragraaf geven we een aantal uitgewerkte voorbeelden van dubbelintegralen die berekend kunnen worden als herhaalde integraal.

1. $\iint_E (xy + y^2)\,dxdy$ met $E = \{1 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3\}$.

$$\begin{aligned}
\iint_E (xy+y^2)\,dxdy &= \int_{x=1}^{x=5} \left(\int_{y=0}^{y=3} (xy+y^2)\,dy \right) dx \\
&= \int_{x=1}^{x=5} \left[\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=0}^{y=3} dx \\
&= \int_{x=1}^{x=5} (\frac{9}{2}x + 9)\,dx \;=\; \left[\frac{9}{4}x^2 + 9x \right]_{x=1}^{x=5} \\
&= (\frac{225}{4} + 45) - (\frac{9}{4} + 9) \;=\; 54 + 36 \;=\; 90
\end{aligned}$$

Als je de integratievolgorde omkeert, krijg je

$$
\begin{aligned}
\iint_E (xy+y^2)\,dxdy &= \int_{y=0}^{y=3}\left(\int_{x=1}^{x=5}(xy+y^2)\,dx\right)dy \\
&= \int_{y=0}^{y=3}\left[\frac{1}{2}x^2y+xy^2\right]_{x=1}^{x=5}dy \\
&= \int_{y=0}^{y=3}(\frac{25}{2}y+5y^2)-(\frac{1}{2}y+y^2)\,dy \\
&= \int_{y=0}^{y=3}(12y+4y^2)\,dy \\
&= \left[6y^2+\frac{4}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=3} \;=\; 54+36 \;=\; 90
\end{aligned}
$$

Dezelfde uitkomst, maar op een heel andere wijze verkregen!

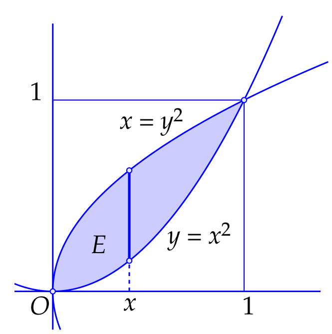
2. $\iint_E y\cos(xy)\,dxdy$ met $E = \{0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le 1\}$.

   Hier is het zaak om de integratievolgorde weloverwogen te kiezen. We integreren eerst naar x (waarbij we y dus als een constante opvatten) en vervolgens naar y.

$$
\begin{aligned}
\iint_E y\cos(xy)\,dxdy &= \int_{y=0}^{y=1}\left(\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} y\cos(xy)\,dx\right)dy \\
&= \int_{y=0}^{y=1}\left[y\frac{1}{y}\sin(xy)\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}dy \\
&= \int_0^1 \sin(\frac{\pi}{2}y)\,dy \;=\; \frac{2}{\pi}\left[-\cos(\frac{\pi}{2}y)\right]_0^1 \;=\; \frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

3. $\iint_E (x+2y)\,dxdy$

   Hierbij is E het deel van het vlak dat wordt ingesloten tussen de twee parabolen $y = x^2$ en $x = y^2$. Die parabolen snijden elkaar in de oorsprong en in het punt $(1,1)$. Houden we eerst x vast (met $0 \le x \le 1$) en integreren we voor vaste x naar y, dan loopt het integratietraject van $y = x^2$ tot $y = \sqrt{x}$ (zie het verticale lijnstukje binnen E in de figuur hiernaast). De herhaalde integraal wordt dus:



$$\begin{aligned}
\iint_E (x+2y)\,dxdy &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} (x+2y)\,dy \right) dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \left[xy + y^2 \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} (x^{\frac{3}{2}} + x) - (x^3 + x^4)\,dx \\
&= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}
\end{aligned}$$

Je ziet dat we erin geslaagd zijn om nu ook te integreren over een gebied E dat door kromme lijnen begrensd is. Het recept is steeds hetzelfde: houd een van de beide variabelen vast, bijvoorbeeld x zoals in het bovenstaande geval, kijk tussen welke grenzen y dan binnen E loopt (in het bovenstaande geval: $y = x^2$ en $y = \sqrt{x}$), integreer de functie naar de variabele y over dit traject, en integreer het resultaat daarna naar de andere variabele x tussen de grenzen die x binnen E aanneemt ($x = 0$ en $x = 1$ in het bovenstaande geval).

4. $\iiint_E xyz^2\,dxdydz$ waarin E het rechthoekige blok in de driedimensionale ruimte is dat gegeven wordt door $0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 1$. We kunnen deze integraal als volgt als een herhaalde integraal schrijven en uitrekenen:

$$\begin{aligned}
\iiint_E xyz^2\,dxdydz &= \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=2} \left(\int_{z=0}^{z=1} xyz^2\,dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=2} \left[\frac{1}{3}xyz^3 \right]_{z=0}^{z=1} dy \right) dx \\
&= \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=2} \frac{1}{3}xy\,dy \right) dx \\
&= \int_{x=0}^{x=2} \left[\frac{1}{6}xy^2 \right]_{y=0}^{y=2} dx \\
&= \int_{x=0}^{x=2} \frac{2}{3}x\,dx = \left[\frac{1}{3}x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Hierbij is dus eerst bij vaste x en y naar z geïntegreerd, vervolgens bij vaste x naar y en ten slotte naar x.

Samenvatting

Er zijn twee manieren om een dubbelintegraal

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy$$

uit te rekenen: numeriek benaderend en exact. Voor een numerieke benadering volg je het stappenschema:

1. Verdeel het integratiegebied E in kleine deelgebiedjes dE (men noemt die stukjes dE ook vaak *oppervlakte-elementjes*).
2. Ga ervan uit dat de functie $f(x,y)$ op zo'n klein deelgebiedje dE vrijwel constant is.
3. Kies daarom een willekeurig punt (x,y) in dE en bereken daar $f(x,y)$. Vermenigvuldig dit met de oppervlakte $|dE|$ van dE.
4. Tel alle uitkomsten bij elkaar op. De som $\sum\sum f(x,y)\,|dE|$ is dan bij benadering gelijk aan de dubbelintegraal.

Bij een exacte berekening schrijf je de dubbelintegraal als een herhaalde integraal. Dat gaat als volgt.

1. Maak een tekening van E in het xy-vlak.
2. Kies een van beide variabelen vast. Laten we aannemen dat dit x is.
3. Teken bij deze x de verticale lijn voor zover die binnen E ligt.
4. Integreer $f(x,y)$ over deze lijn naar y. De uitkomst is een functie van x.
5. Integreer deze functie naar x.

Je kunt de integratievolgorde ook omkeren, dus bij vaste y eerst naar x integreren en de resulterende functie van y vervolgens integreren naar y.

Ook drievoudige integralen kun je op die manier berekenen: numeriek benaderend of exact via een herhaalde integraal.

Opgaven

15.1 In deze opgave is E de rechthoek $-1 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 3$. Bereken $\iint_E f(x,y)\,dxdy$ in de volgende gevallen:

a. $f(x,y) = xy$

b. $f(x,y) = 3x + 2y - 1$

c. $f(x,y) = x^2 y$

d. $f(x,y) = x^2 + y^2$

e. $f(x,y) = x^2\sqrt{y}$

f. $f(x,y) = x^2 \mathrm{e}^{y}$

15.2 Bereken $\iint_E (xy - y^2)\,dxdy$ in de volgende gevallen. Maak daarbij eerst een schets van het integratiegebied E en kies je integratievolgorde met overleg.

a. $E = \{0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x^2\}$

b. $E = \{0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1\}$

c. $E = \{0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \sin x\}$

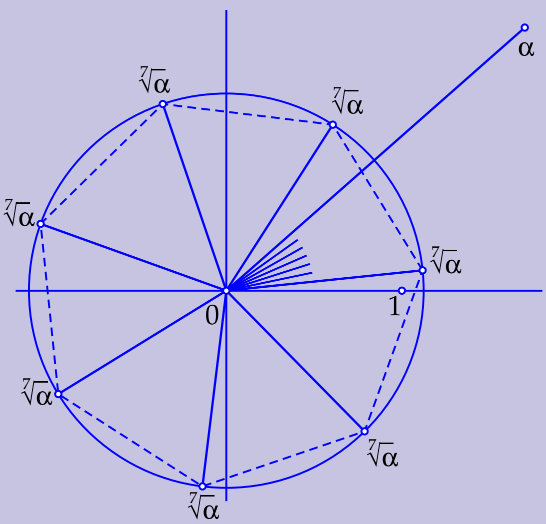
d. $E = \{0 \leq x \leq \sin y,\ 0 \leq y \leq \pi\}$

e. E is het deel van de cirkel met straal 2 en middelpunt in de oorsprong dat in het eerste kwadrant ligt.

15.3 Bereken de integraal $\iint_E f(x,y)\,dxdy$ van bladzijde 119 als herhaalde integraal door eerst naar y en vervolgens naar x te integreren.

15.4 Bereken de drievoudige integraal $\iiint_E xy^2 \sin z\,dxdydz$ waarin E gegeven wordt door $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq \pi$.

VI Complexe getallen



Complexe getallen worden in vrijwel alle toepassingen van de wiskunde gebruikt. Met name in de bètavakken, de techniek, de informatica en de econometrie. Je komt ze bijvoorbeeld tegen in de elektrotechniek, de mechanica, de theoretische natuurkunde, de regeltechniek en de systeemtheorie, maar ook in de theorie van micro- en macro-economische modellen.

Als je met complexe getallen gaat werken, kom je mysterieuze zaken tegen. Je ontdekt dan bijvoorbeeld dat $\sqrt{-37}$ *een getal is waar je echt mee kunt rekenen. En dat een vierkantsvergelijking met een negatieve discriminant toch twee oplossingen heeft. Je leert ook dat elk complex getal precies zeven zevendemachtswortels heeft. Je maakt kennis met* $\mathrm{i}^2 = -1$ *en met andere spannende formules zoals*

$$e^{\varphi \mathrm{i}} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \qquad \textit{of} \qquad e^{\pi \mathrm{i}} + 1 = 0$$

Complexe getallen zijn mysterieus, zeker voor de niet-ingewijde. Maar niet zo mysterieus dat je je er niets bij voor kunt stellen. Want net zoals je je reële getallen kunt voorstellen als punten op een lijn (de reële getallenlijn), zo kun je je complexe getallen voorstellen als punten in het vlak: het complexe vlak. Daarmee krijgen complexe getallen een meetkundige betekenis die het rekenen ermee aanschouwelijk maakt en daardoor enorm verduidelijkt.

Voorkennis: BW 12, BW 13, BW 14, BW 16, BW 17, BW 18, BW 20

17 Rekenen met complexe getallen

Op school leer je dat er geen getal x bestaat waarvoor $x^2 = -1$. Kwadraten zijn immers nooit negatief. Maar wat als we ons nu eens *indenken* dat er wél zo'n getal zou bestaan? Een getal, we noemen het 'i' (van **i***maginair*, dat wil zeggen denkbeeldig) waarvoor dus geldt dat

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

Je zou dat getal dan een *wortel uit* -1 kunnen noemen: $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Ook uit andere negatieve getallen kun je dan een wortel trekken als je de gewone rekenregels toepast. Zo is $6\,\mathrm{i}$ een wortel uit -36 want $(6\,\mathrm{i})^2 = 6\,\mathrm{i} \times 6\,\mathrm{i} = 36 \times \mathrm{i}^2 = 36 \times (-1) = -36$. Net zo kun je laten zien dat $\sqrt{-13} = \sqrt{13}\,\mathrm{i}$, of dat $\sqrt{-12} = \sqrt{12}\,\mathrm{i} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ (bedenk daarbij dat $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$).

Wat we eigenlijk hebben gedaan, is het bepalen van een oplossing van de vergelijking $x^2 = -a$, waarbij a een positief getal is. We vonden $\sqrt{a}\,\mathrm{i}$ als oplossing, maar natuurlijk is $-\sqrt{a}\,\mathrm{i}$ dan ook een oplossing want er geldt $(-\sqrt{a}\,\mathrm{i})^2 = (-1)^2(\sqrt{a})^2\,\mathrm{i}^2 = 1 \cdot a \cdot (-1) = -a$. De volledige oplossing van de vergelijking $x^2 = -a$ is dus $x = \pm\sqrt{a}\,\mathrm{i}$.

De *abc*-formule

Als je een getal i hebt waarvoor $\mathrm{i}^2 = -1$, kun je ook elke vierkantsvergelijking oplossen, zelfs als de discriminant negatief is. Bijvoorbeeld de vergelijking $x^2 + 2x + 5 = 0$. Kijk maar:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 5 &= 0 \\ (x+1)^2 + 4 &= 0 \\ (x+1)^2 &= -4 \end{aligned}$$

Dit geeft $x + 1 = \pm 2\,\mathrm{i}$ oftewel $x = -1 + 2\,\mathrm{i}$ of $x = -1 - 2\,\mathrm{i}$.

Waar het op neer komt, is dat je gewoon de bekende *abc*-formule kunt toepassen. De oplossingen van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ worden daarbij gegeven door

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

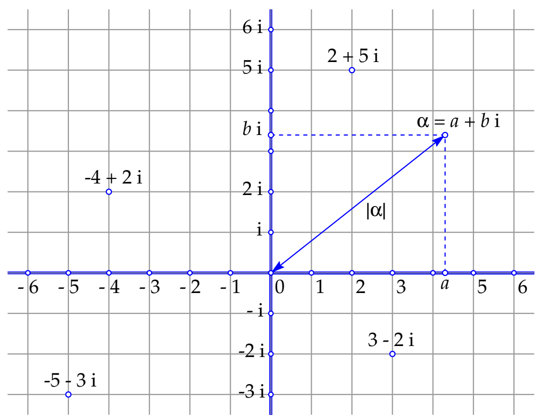
Als de discriminant $b^2 - 4ac$ negatief is, is $4ac - b^2$ positief, en dan geldt dus $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(4ac - b^2)(-1)} = \sqrt{4ac - b^2}\,\mathrm{i}$. In het voorbeeld hierboven was $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$ en $b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$, en dus geldt inderdaad $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 4\,\mathrm{i}}{2} = -1 \pm 2\,\mathrm{i}$.

Het complexe vlak

Bij het oplossen van vierkantsvergelijkingen zijn we nu ook getallen van de vorm $a + b\,\mathrm{i}$ tegengekomen. Ze heten *complexe getallen*. Bijvoorbeeld $-1 + 2\,\mathrm{i}$ of $3 - 5\,\mathrm{i}$. Je kunt zulke getallen bij elkaar *optellen*: $(-1 + 2\,\mathrm{i}) + (3 - 5\,\mathrm{i}) = 2 - 3\,\mathrm{i}$. Of van elkaar *aftrekken*: $(-1 + 2\,\mathrm{i}) - (3 - 5\,\mathrm{i}) = -4 + 7\,\mathrm{i}$. Of met elkaar *vermenigvuldigen*:

$$(-1 + 2\,\mathrm{i})(3 - 5\,\mathrm{i}) = -3 + 5\,\mathrm{i} + 6\,\mathrm{i} - 10\,\mathrm{i}^2 = -3 + 11\,\mathrm{i} + 10 = 7 + 11\,\mathrm{i}.$$

Gewoon haakjes uitwerken dus, en gebruiken dat $\mathrm{i}^2 = -1$.
Een complex getal $a + b\,\mathrm{i}$ ligt helemaal vast door de *twee reële getallen* a en b. Reële getallen kun je voorstellen als punten op een lijn, de *reële getallenlijn*. Op net zo'n manier kun je complexe getallen voorstellen als punten in het vlak, het *complexe vlak*. Daarin moet dan eerst een coördinatenstelsel gekozen zijn. Het complexe getal $a + b\,\mathrm{i}$ hoort dan bij het punt met de coördinaten (a, b):



Voor de punten op de x-as is $b = 0$. In plaats van $a + 0\,\mathrm{i}$ schrijven we dan gewoon a. En voor de punten op de y-as geldt $a = 0$. Die schrijven we dan niet als $0 + b\,\mathrm{i}$ maar gewoon als $b\,\mathrm{i}$. En voor $1\,\mathrm{i}$ schrijven we natuurlijk gewoon i.

De x-as noemen we voortaan de *reële as* en de getallen daarop de *reële getallen*. De y-as heet de *imaginaire as* en de getallen daarop heten de *imaginaire getallen*. Complexe getallen worden vaak aangegeven met de letter z of met Griekse letters zoals α (alfa). We schrijven dan $z = x + y\,\mathrm{i}$ of $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$.

Als $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$ een complex getal is, heet a het *reële deel*, notatie $a = \mathrm{Re}(\alpha)$, en b het *imaginaire deel*, notatie $b = \mathrm{Im}(\alpha)$. Het imaginaire deel is dus een reëel getal! Het getal $\sqrt{a^2 + b^2}$ heet de *absolute waarde* van α, notatie $|\alpha|$. In plaats van absolute waarde wordt ook vaak het woord *modulus* gebruikt. De absolute waarde van α is de afstand van α tot de oorsprong (stelling van Pythagoras). (Als α een reëel getal is, is $|\alpha|$ dus de gewone absolute waarde van α.)

Vermenigvuldigen en delen

Vermenigvuldigen van complexe getallen is een kwestie van haakjes uitwerken en gebruik maken van $\mathrm{i}^2 = -1$. Je hebt er in de vorige paragraaf al mee geoefend. Dat gaat altijd als volgt:

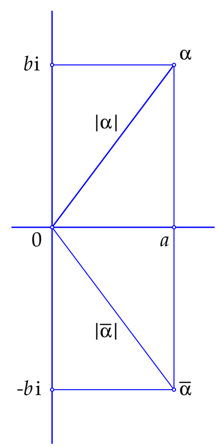
$$\begin{aligned}(a_1 + b_1\,\mathrm{i})(a_2 + b_2\,\mathrm{i}) &= a_1a_2 + a_1b_2\,\mathrm{i} + a_2b_1\,\mathrm{i} + b_1b_2\,\mathrm{i}^2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\mathrm{i}\end{aligned}$$

Delen is het omgekeerde van vermenigvuldigen. We zullen je een rekentruc leren om het quotiënt van twee complexe getallen snel en eenvoudig te berekenen. Eerst met een voorbeeld:

$$\frac{1-2\,\mathrm{i}}{2+3\,\mathrm{i}} = \frac{(1-2\,\mathrm{i})(2-3\,\mathrm{i})}{(2+3\,\mathrm{i})(2-3\,\mathrm{i})} = \frac{-4-7\,\mathrm{i}}{4-6\,\mathrm{i}+6\,\mathrm{i}-9\,\mathrm{i}^2} = \frac{-4-7\,\mathrm{i}}{13} = -\frac{4}{13} - \frac{7}{13}\,\mathrm{i}$$

We hebben bij de derde stap in de noemer het *reële* getal 13 gekregen, en daarmee konden we vervolgens het quotiënt uitrekenen, dat wil zeggen schrijven in de vorm $a + b\,\mathrm{i}$.

De truc bestaat blijkbaar uit het vermenigvuldigen van teller en noemer met *hetzelfde* complexe getal (daardoor verandert het quotiënt niet). Dat getal is de zogenaamde *geconjugeerde* van de noemer. De geconjugeerde van een complex getal $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$ is het getal $a - b\,\mathrm{i}$, notatie $\overline{\alpha}$. Je krijgt $\overline{\alpha}$ door het teken van het imaginaire deel van α om te klappen. In plaats van het geconjugeerde complexe getal zegt men ook wel het *toegevoegd complexe getal* (het Latijnse woord *coniungare* betekent *toevoegen*).
De bovenstaande truc werkt omdat daardoor in de noemer een getal komt van de vorm



$$\alpha\overline{\alpha} = (a+b\,\mathrm{i})(a-b\,\mathrm{i}) = a^2 - ab\,\mathrm{i} + ab\,\mathrm{i} - b^2\,\mathrm{i}^2 = a^2 + b^2$$

Dat is altijd een *positief reëel getal* (behalve als $a = b = 0$, maar dan is $\alpha = 0$, en ook bij complexe getallen kun je niet door 0 delen).

In de vorige paragraaf is de *absolute waarde* $|\alpha|$ van α gedefinieerd als $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Je ziet dus dat $\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2$ en ook dat $|\overline{\alpha}| = |\alpha|$.

Wat je van het bovenstaande moet onthouden, is eigenlijk alleen maar dit:

> *Bij vermenigvuldigen moet je haakjes uitwerken en gebruiken dat* $\mathrm{i}^2 = -1$. *Bij delen moet je teller en noemer vermenigvuldigen met de geconjugeerde van de noemer.*

Samenvatting

Complexe getallen zijn getallen van de vorm $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$, waarbij a en b *reële* getallen zijn. Je kunt ze voorstellen als punten in het vlak waarin een coördinatenstelsel gekozen is. Het complexe getal $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$ is dan het punt met coördinaten (a, b).

Terminologie en notaties:

Als $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$ dan heet a het *reële deel* en b het *imaginaire deel* van α.
Als $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$ dan heet $\overline{\alpha} = a - b\,\mathrm{i}$ de *complex geconjugeerde* van α.
Als $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$ dan heet $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$ de *absolute waarde* of *modulus* van α. Dit is een niet-negatief reëel getal. Het is de afstand van het punt α tot de oorsprong.

In plaats van $\alpha = a + b\,\mathrm{i}$ schrijft men soms ook $\alpha = a + \mathrm{i}\,b$. Het imaginaire deel staat dan niet vóór de i, maar achter de i.

Rekenregels:

Optellen en aftrekken (coördinaatsgewijs):

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= (a_1 + b_1\,\mathrm{i}) + (a_2 + b_2\,\mathrm{i}) &&= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,\mathrm{i} \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= (a_1 + b_1\,\mathrm{i}) - (a_2 + b_2\,\mathrm{i}) &&= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

Vermenigvuldigen:

$$\alpha_1\alpha_2 = (a_1 + b_1\,\mathrm{i})(a_2 + b_2\,\mathrm{i}) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\,\mathrm{i}$$

Dus: haakjes uitwerken en gebruiken dat $\mathrm{i}^2 = -1$.
Bijzonder geval: $\alpha\overline{\alpha} = (a + b\,\mathrm{i})(a - b\,\mathrm{i}) = a^2 + b^2$. Gevolg: $\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2$.

Delen:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} &= \frac{\alpha_1\,\overline{\alpha_2}}{\alpha_2\,\overline{\alpha_2}} = \frac{(a_1 + b_1\,\mathrm{i})(a_2 - b_2\,\mathrm{i})}{(a_2 + b_2\,\mathrm{i})(a_2 - b_2\,\mathrm{i})} \\ &= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (-a_1b_2 + a_2b_1)\,\mathrm{i}}{{a_2}^2 + {b_2}^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} + \frac{-a_1b_2 + a_2b_1}{{a_2}^2 + {b_2}^2}\,\mathrm{i} \end{aligned}$$

Ook dit is gemakkelijk te onthouden: teller en noemer vermenigvuldigen met de complex geconjugeerde van de noemer en vervolgens haakjes uitwerken.

Voor *reële* getallen (dat wil zeggen complexe getallen $a + b\,\mathrm{i}$ met $b = 0$) komen de rekenregels overeen met de 'gewone' regels voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. De complexe getallen vormen zo dus een *uitbreiding* van het systeem van de reële getallen met behoud van de gewone rekenregels. Je vindt de reële getallen op de horizontale as, die daarom ook de *reële as* heet. De verticale as heet de *imaginaire as*. De getallen daarop heten de *imaginaire getallen*.

Opgaven

17.1 Bereken:

a. $(3\,\mathrm{i}\,)^2$
b. $(-3\,\mathrm{i}\,)^2$
c. $-(4\,\mathrm{i}\,)^2$
d. $(-\,\mathrm{i}\,)^3$
e. $\mathrm{i}^{\,4}$

17.2 Bereken:

a. $(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{i}\,)^2$
b. $(-\frac{1}{3}\sqrt{6}\,\mathrm{i}\,)^2$
c. $(\frac{1}{2}\sqrt{4}\,\mathrm{i}\,)^2$
d. $(\frac{2}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{i}\,)^2$
e. $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}\,)^2$

Schrijf de volgende wortels in de vorm $\pm r\,\mathrm{i}$ waarbij r een positief reëel getal is. Voorbeeld: $\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}\,\mathrm{i}$. Geef exacte antwoorden en vereenvoudig daarbij de wortels zo veel mogelijk (schrijf bijvoorbeeld $3\sqrt{3}$ in plaats van $\sqrt{27}$).

17.3

a. $\sqrt{-3}$
b. $\sqrt{-9}$
c. $\sqrt{-8}$
d. $\sqrt{-25}$
e. $\sqrt{-15}$

17.4

a. $\sqrt{-33}$
b. $\sqrt{-49}$
c. $\sqrt{-48}$
d. $\sqrt{-45}$
e. $\sqrt{-75}$

Los de volgende vierkantsvergelijkingen op. Geef ook hier exacte antwoorden en vereenvoudig de wortels.

17.5

a. $x^2 - 2x + 2 = 0$
b. $x^2 + 4x + 5 = 0$
c. $x^2 + 2x + 10 = 0$
d. $x^2 - 6x + 10 = 0$
e. $x^2 - 4x + 8 = 0$

17.6

a. $x^2 - 12x + 40 = 0$
b. $x^2 - 4x + 6 = 0$
c. $x^2 + 2x + 4 = 0$
d. $x^2 - 6x + 12 = 0$
e. $x^2 + 8x + 20 = 0$

Bereken de volgende complexe getallen, teken ze in in het complexe vlak en bereken hun absolute waarde.

17.7

a. $(1-2\,\mathrm{i}\,) + (3-4\,\mathrm{i}\,)$
b. $2\,\mathrm{i} - (4-2\,\mathrm{i}\,)$
c. $(2-2\,\mathrm{i}\,) + (-1+2\,\mathrm{i}\,)$
d. $(4-6\,\mathrm{i}\,) - (1-3\,\mathrm{i}\,)$
e. $(2-\,\mathrm{i}\,) + (3-2\,\mathrm{i}\,)$

17.8

a. $(1-2\,\mathrm{i}\,)(3-4\,\mathrm{i}\,)$
b. $2\,\mathrm{i}\,(4-2\,\mathrm{i}\,)$
c. $(2-2\,\mathrm{i}\,)(2+2\,\mathrm{i}\,)$
d. $(1-3\,\mathrm{i}\,)^2$
e. $(2-\,\mathrm{i}\,)^2$

17.9
a. i^3
b. i^4
c. i^5
d. i^{10}
e. i^{2006}

17.10
a. $(-\mathrm{i})^5$
b. $(2\mathrm{i})^3$
c. $(-2\mathrm{i})^7$
d. $(1+\mathrm{i})^3$
e. $(1-\mathrm{i})^3$

Alle complexe getallen z waarvoor geldt dat $\mathrm{Re}(z) = 5$ vormen samen de verticale lijn $x = 5$ in het complexe vlak. Teken de volgende lijnen in het complexe vlak.

17.11
a. $\mathrm{Re}(z) = 4$
b. $\mathrm{Re}(z) = -3$
c. $\mathrm{Im}(z) = 2$
d. $\mathrm{Im}(z) = -2$
e. $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)$

17.12
a. $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 1$
b. $\mathrm{Re}(z) = 2\,\mathrm{Im}(z)$
c. $\mathrm{Re}(z) - 2\,\mathrm{Im}(z) = 1$
d. $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 5$
e. $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 3 - \mathrm{Im}(z)$

Alle complexe getallen z waarvoor geldt dat $|z| = 5$ vormen samen de cirkel met straal 5 en middelpunt 0. Ga zelf na dat alle complexe getallen z waarvoor geldt dat $|z-1| = 5$ samen de cirkel vormen met straal 5 en middelpunt 1. Teken nu de volgende cirkels in het complexe vlak en geef bij elke cirkel het middelpunt en de straal.

17.13
a. $|z| = 4$
b. $|z-1| = 3$
c. $|z-2| = 2$
d. $|z-3| = 1$
e. $|z+1| = 5$

17.14
a. $|z+3| = 4$
b. $|z-\mathrm{i}| = 5$
c. $|z+2\mathrm{i}| = 1$
d. $|z-1-\mathrm{i}| = 3$
e. $|z+3-\mathrm{i}| = 2$

Bereken de volgende quotiënten van complexe getallen, dat wil zeggen schrijf elk quotiënt in de vorm $a + b\,\mathrm{i}$ met a en b reëel.

17.15
a. $\dfrac{1}{3-4\mathrm{i}}$
b. $\dfrac{3}{4-2\mathrm{i}}$
c. $\dfrac{2-2\mathrm{i}}{-1+2\mathrm{i}}$
d. $\dfrac{4-6\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}$
e. $\dfrac{2-\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$

17.16
a. $\dfrac{1-2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$
b. $\dfrac{2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$
c. $\dfrac{1}{\mathrm{i}}$
d. $\dfrac{1-3\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$
e. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

17.17
a. $\dfrac{3\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}}$
b. $\dfrac{3+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$
c. $\dfrac{2-\mathrm{i}}{-1+2\mathrm{i}}$
d. $\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$
e. $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$

17.18
a. $\dfrac{1-2\mathrm{i}}{4\mathrm{i}}$
b. $\dfrac{2-\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}}$
c. $\dfrac{1+\mathrm{i}}{4\mathrm{i}}$
d. $\dfrac{2-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}$
e. $\dfrac{1+3\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$