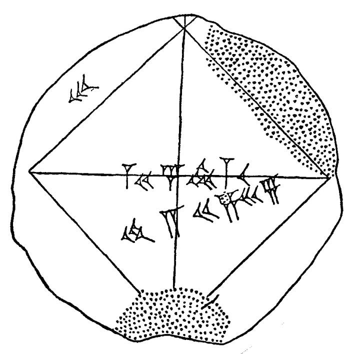
Babylonisch rekenen

Jan van de Craats (UvA, OU)

De oude Babyloniërs die een kleine vierduizend jaar geleden Mesopotamië (het huidige Irak) bewoonden, moeten keien in de wiskunde zijn geweest. Ze kenden de stelling van Pythagoras, beschikten over indrukwekkende algebraïsche vaardigheden en hadden een zeer efficiënt notatiesysteem voor getallen. We weten dat omdat er uit die tijd duizenden kleitabletten bewaard zijn gebleven met inscripties in spijkerschrift. Sommige van die tabletten laten verbazingwekkende staaltjes wiskunde zien.



Figuur 1: *Een Babylonische kleitablet uit circa 1700 voor Christus.*

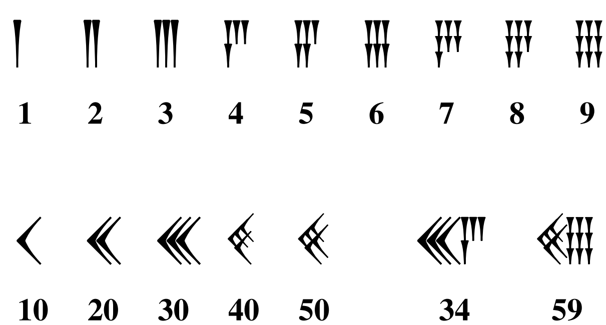
Een voorbeeld is de tablet uit ongeveer 1700 voor Christus. die in Figuur 1 is afgebeeld. De afmetingen ervan zijn circa zes bij zes centimeter. Er staat een vierkant op met zijn twee diagonalen en een aantal tekens in spijkerschrift. Dat blijken getallen te zijn in het zestigtallig stelsel dat destijds bij de Babyloniërs in gebruik was.

De drie tekens linksboven bij de schuine zijde van het vierkant vormen samen het getal 30. De tekens op de horizontale diagonaal stellen een zestigtallige breuk voor. In onze decimale schrijfwijze komt die breuk na afronden overeen met het getal 1,41421296. Dat lijkt erg op wortel twee – niet verwonderlijk voor wie de stelling van Pythagoras kent. De decimale ontwikkeling van wortel twee begint met $1,41421356\ldots$ Het verschil met de Babylonische waarde is kleiner dan een miljoenste! Onder de diagonaal staat, een beetje scheef, nog een getal. In onze notatie omgezet en afgerond is dat het getal 42,426389, precies het product van de zijdelengte 30 en de Babylonische wortel twee. Dat getal scheelt ongeveer één honderdduizendste met de exacte waarde.

De getallen op de kleitablet geven dus de lengte van de diagonaal, de lengte van de zijde en hun onderlinge verhouding aan. En wel met een nauwkeurigheid die veel en veel groter is dan de Babyloniërs ooit door opmeten in een 'echt' vierkant hadden kunnen vinden. Dat de wiskunde van de Babyloniërs het stadium van uitsluitend praktisch gericht meten en rekenen ontstegen was, zal uit het bovenstaande duidelijk zijn. Wat bovendien uit deze tablet en allerlei andere opgegraven tabletten blijkt, is dat de stelling van Pythagoras minstens twaalfhonderd jaar ouder moet zijn dan de naam suggereert: Pythagoras leefde immers omstreeks 500 voor Christus, eerst op Samos en later op Sicilië.

Het Babylonische getallenstelsel

De oude Babyloniërs gebruikten maar twee symbolen om getallen te noteren: een 'spijker' en een 'winkelhaak'. Die symbolen werden in de natte klei gedrukt met behulp van een scherf. De spijker stelde 1 voor en de winkelhaak 10. Maar het Babylonische stelsel is zestigtallig (sexagesimaal); met spijkers en winkelhaken werden alleen maar de getallen van 1 tot en met 59 weergegeven, eerst de winkelhaken (maximaal vijf) en dan de spijkers (maximaal negen). Voor de overzichtelijkheid werden de spijkers en de winkelhaken in groepjes van 3 bij elkaar gezet, zie Figuur 2.



Figuur 2: *Getallen in spijkerschrift.*

Het getal zestig werd weer met één spijker aangegeven. Die ene spijker kan dus 1 betekenen, maar ook 60, of $3600(=60^2)$, of $216000(=60^3)$, enzovoort. Of ook 1/60, 1/3600, 1/216000 enzovoort, afhankelijk van de positie. Want net zoals wij met tiendelige breuken werken, werkten de Babyloniërs met zestigtallige breuken. Hun systeem kende maar twee lacunes: ze kenden geen symbool voor 0 en ze gebruikten geen komma of iets dergelijks om het gehele deel van een getal te scheiden van het sexagesimale breukgedeelte. In de praktijk gaf dat zelden problemen omdat uit de context meestal wel duidelijk was wat er bedoeld werd, maar je moet er wel op verdacht zijn.

Als we gewapend met deze kennis weer naar Figuur 1 kijken, zien we langs de schuine zijde links inderdaad het getal 30 staan (drie winkelhaken). Op de diagonaal van het vierkant staan de 'sexagesimalen' (1)(24)(51)(10). Uit de context moeten we dan opmaken dat de komma na de 1 gezet moet worden, en dat het dus gaat om (in onze notatie)

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{3600} + \frac{10}{216000} \approx 1,41421296$$

De lengte van de diagonaal staat er schuin onder. In sexagesimale symbolen uitgedrukt staat er (42)(25)(35). We moeten weer zelf de komma zetten:

$$42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{3600} \approx 42,426389$$

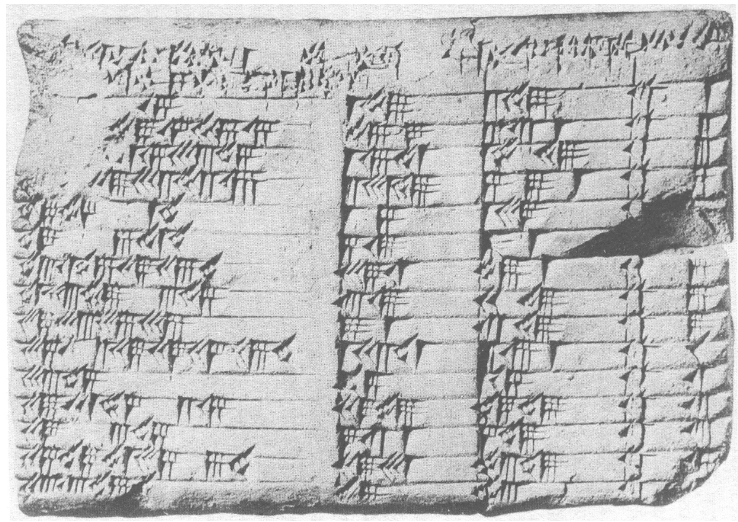
Denk nu niet dat dit zestigtallige stelsel alleen maar een curiositeit is: in feite gebruiken we het nog steeds bij onze tijdmeting (in uren, minuten, seconden) en onze hoekmeting (in graden, minuten, seconden). Het Babylonische stelsel was voor astronomische berekeningen zo handig dat het voor dat doel in veel andere culturen is overgenomen.

De kleitablet Plimpton 322

Een indrukwekkend staaltje Babylonisch rekenwerk laat de kleitablet zien die het nummer 322 draagt in de Plimpton collectie van de University of Columbia (USA). Hij stamt uit de periode tussen 1800 en 1650 v. Chr. Aan de linkerkant en de onderkant zijn er stukken afgebroken, en linksboven en rechtsmidden zijn flinke beschadigingen zichtbaar, maar toch slaagden Neugebauer en Sachs[1] er in 1945 in om een aantal raadsels ervan te ontsluieren. Het blijkt te gaan om *pythagoreïsche drietallen*, drietallen gehele getallen die de lengte, de breedte en de diagonaal vormen van een rechthoek, zoals bijvoorbeeld het bekende drietal 4, 3 en 5.

De rechterkolom bevat de rijnummers en in de kolom links daarvan staan geen getallen, maar telkens hetzelfde tekstje, dat zoiets als 'rijnummer' betekent. Interessanter zijn de eerste drie kolommen. Eerst de tweede en de derde kolom. Noemen we die getallen respectievelijk b en c, dan blijkt dat $c^2 - b^2$ steeds het

[1] O. Neugebauer and A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts*, New Haven CT, Yale University Press, 1945.



Figuur 3: *De kleitablet Plimpton 322 (circa 1700 voor Christus).*

kwadraat van een geheel getal a is. De getallen a, b en c vormen dus inderdaad een pythagoreïsch drietal, een drietal gehele getallen waarvoor geldt dat $a^2 + b^2 = c^2$.

Die getallen a zijn overigens niet op de kleitablet te vinden, maar ze hebben wel twee merkwaardige eigenschappen: elke a is groter dan de bijbehorende b, en elke a heeft alleen maar de priemfactoren 2, 3 en 5 in zijn priemontbinding. Dat zijn, niet toevallig zoals we zullen zien, precies de priemfactoren van 60, de basis van het Babylonische getalstelsel.

Nu de getallen van de eerste kolom. Die krijgen betekenis als je ze opvat als sexagesimale breuken. Dan zijn ze namelijk steeds gelijk aan de sexagesimale breukontwikkeling van b^2/a^2. Juist omdat a alleen maar de priemfactoren 2, 3 en 5 bevat, breekt zo'n ontwikkeling na een eindig aantal stappen af, precies zoals in ons decimale stelsel een decimale ontwikkeling van een breuk alleen maar afbreekt als 2 en 5 (de priemfactoren van 10) de enige priemfactoren van de noemer zijn.

De reconstructie van Conway en Guy

In *The Book of Numbers*[2] geven John H. Conway en Richard K. Guy de op bladzijde 6 gereproduceerde reconstructie van de tabel zoals die er misschien oorspronkelijk heeft uitgezien. Zij hebben aan de linkerkant een kolom toege-

[2]Springer-Verlag, New York, 1996, pp. 173-176.

voegd voor de getallen a, het aantal rijen tot 34 uitgebreid en enige kleine, voor de hand liggende correcties uitgevoerd.

Op de tiende rij vinden we $a = (1)(48) = 3600 + 48 \times 60 = 6480$, $b = (1)(22)(41) = 3600 + 22 \times 60 + 41 = 4961$ en $c = (2)(16)(1) = 2 \times 3600 + 16 \times 60 + 1 = 8161$. Inderdaad is $6480^2 + 4961^2 = 8161^2$. Op de tweede plaats in diezelfde rij staat de sexagesimale breuk $0,(35)(10)(2)(28)(27)(24)(26)(40)$ (hierbij heb ik zelf de 0 en de komma toegevoegd). Dit kun je schrijven als de breuk $24611521/41990400$ en dat is inderdaad het getal $4961^2/6480^2$.

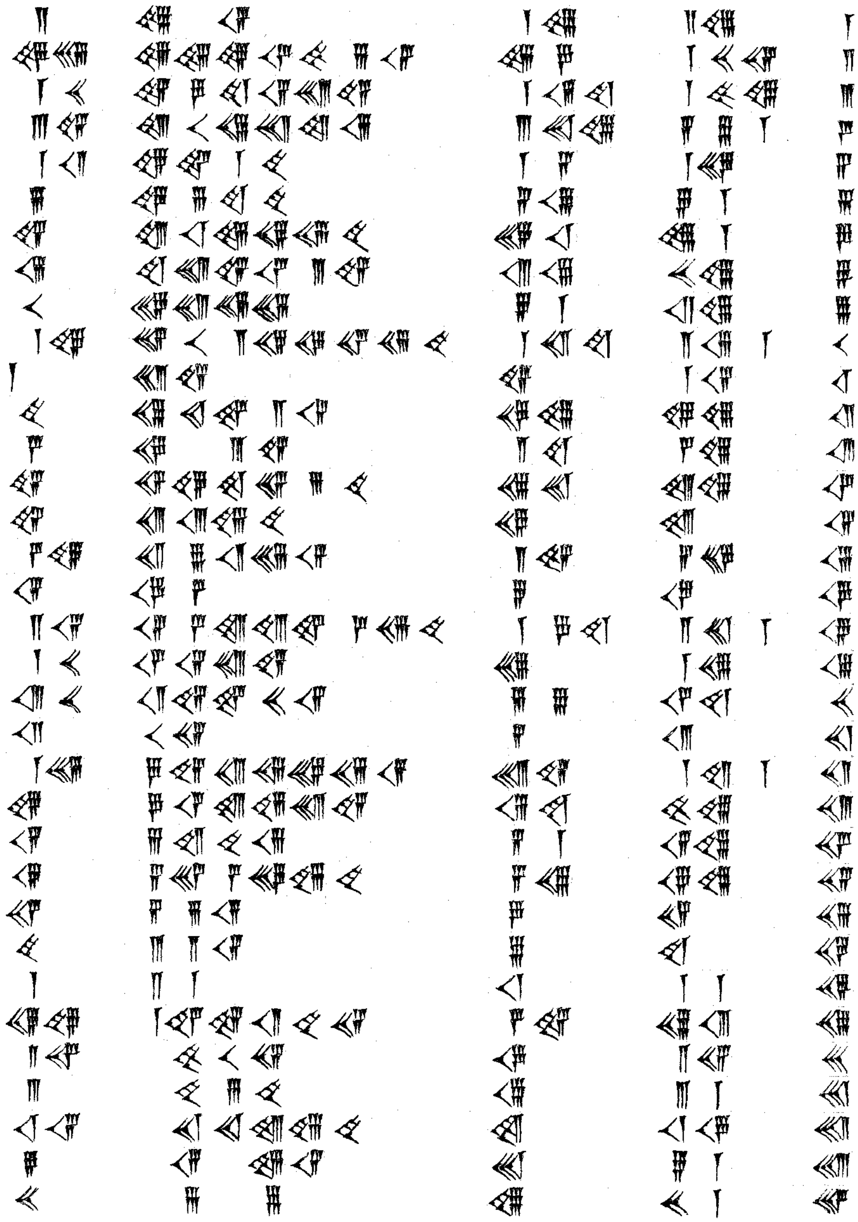
Gemakkelijker te ontcijferen, maar misschien minder indrukwekkend, is de achtentwintigste rij, met $a = 60$, $b = 11$, $c = 61$ en in de tweede kolom de sexagesimale breuk $0,(2)(1) = 2/60 + 1/3600 = 121/3600 = b^2/a^2$. Inderdaad is $60^2 + 11^2 = 61^2$.

Hoe is de tabel gemaakt?

In de *Elementen* van Euclides (circa 300 voor Christus) staat een methode om pythagoreïsche drietallen te maken: kies gehele getallen p en q met $p > q$ en vorm $a = 2pq$, $b = p^2 - q^2$, $c = p^2 + q^2$, dan geldt $a^2 + b^2 = c^2$. De oude Babyloniërs zullen die methode ook wel gekend hebben. In elk geval kan Plimpton 322 ermee verklaard worden. De methode is algemeen bruikbaar, maar de maker van Plimpton 322 heeft speciale keuzen voor p en q gemaakt. Hij wilde dat elk getal $a = 2pq$ alleen maar priemfactoren 2, 3 en 5 zou bevatten. Dan moet hetzelfde voor p en q gelden. Ik noem getallen die uitsluitend priemfactoren 2, 3 en 5 bevatten, in dit verband *reguliere* getallen; de rij van alle reguliere getallen begint als volgt: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, \ldots$

Voor de getallen in de tabel geldt ook dat $b^2/a^2 < 1$, dus dat $b < a$. Dan moet $p^2 - q^2 < 2pq$ zijn, oftewel $(p - q)^2 < 2q^2$ dus $p < (1 + \sqrt{2})q$. Gecombineerd met $1 \leq q < p$ levert dit de voorwaarde dat p en q reguliere getallen moeten zijn met $1 \leq q < p < (1 + \sqrt{2})q$. En natuurlijk neem je $ggd(p, q) = 1$ want (kp, kq) geeft hetzelfde pythagoreïsche drietal als (p, q) op een factor k^2 na.

Conway en Guy hebben waarschijnlijk alle reguliere paren (p, q) bepaald met $q < 60$ die aan de bovenstaande voorwaarden voldoen, de bijbehorende getallen a, b, c en b^2/a^2 uitgerekend en in de Babylonische notatie omgezet, en de rijen vervolgens gerangschikt naar dalende grootte van b^2/a^2 (de tweede kolom in hun tabel). De eerste vijftien rijen van hun tabel komen dan overeen met Plimpton 322 op een paar gemakkelijk verklaarbare foutjes na die de Babylonische rekenaar destijds gemaakt moet hebben; Conway en Guy geven gemotiveerde verklaringen voor die kleine correcties.



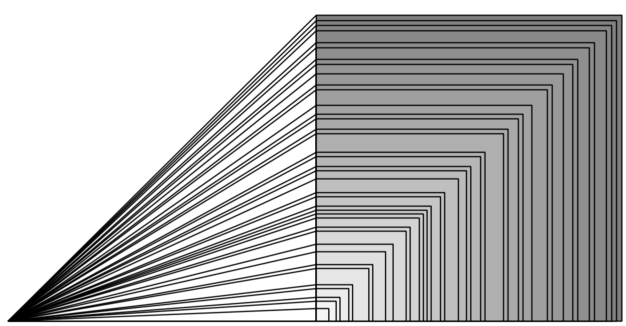
Figuur 4: *De reconstructie door Conway en Guy van Plimpton 322*

Controles, suggesties en vragen

Het is leuk om het werk van Conway en Guy op een regenachtige zondagmiddag te controleren, liefst zonder rekenmachine, want die hadden de Babyloniërs ook niet. Je zult dan constateren dat Conway en Guy vier paren (p, q) vergeten zijn, namelijk $(27, 16)$, $(32, 25)$, $(36, 25)$ en $(40, 27)$. Hun tabel zou dus eigenlijk 38 rijen moeten bevatten. Overigens, de heren zijn in hun boek niet al te duidelijk over de criteria volgens welke zij hun tabel hebben samengesteld. Misschien is er dus toch een plausibele verklaring voor hun 'omissies'; ik heb die echter niet kunnen vinden.

Uit $ggd(p, q) = 1$ volgt dat $ggd(a, b, c) = 1$ is wanneer één van beide getallen p en q even is, en dat $ggd(a, b, c) = 2$ is wanneer p en q allebei oneven zijn. In dat laatste geval kun je a, b en c dus door 2 delen, hetgeen Conway en Guy ook steeds gedaan hebben.

Er is iets vreemds aan de hand met rij elf: daar staat $a = 60$, $b = 45$ en $c = (1)(15) = 75$. Dat is blijkbaar het bekende drietal $(a, b, c) = (4, 3, 5)$, vermenigvuldigd met een factor 15. Maar als je b en c als Babylonische breuken leest, namelijk $b = 0, (45)$ en $c = (1), (15)$, krijg je $a = 1$, $b = 3/4$ en $c = 1 + 1/4$ en dat is Babylonisch gezien eigenlijk eenvoudiger dan $(4, 3, 5)$. In feite kun je *alle* getallen a herleiden tot een macht van 60, dus, in Babylonische notatie, tot (1), door ze met een geschikte reguliere factor te vermenigvuldigen. Dat zou kunnen verklaren waarom er in de Plimpton-tablet geen kolom voor de getallen a is: die zijn dan toch allemaal (1). En door b met diezelfde reguliere factor te vermenigvuldigen en het resultaat te kwadrateren krijg je de eerste kolom van die tablet, zonder breuken! Dat lijkt tevens de eenvoudigste manier te zijn om de Plimpton-tabel te maken.



Figuur 5: *De aangevulde tabel van Conway en Guy in beeld gebracht.*

In Figuur 5 heb ik de door Conway en Guy gereconstrueerde Plimpton-tabel (aangevuld met de vier extra items) in beeld gebracht via rechthoekige driehoeken met basislengte 1 en opstaande rechthoekszijde van lengte b/a. De daarop geconstrueerde vierkanten hebben dus oppervlakte b^2/a^2, de getallen uit de tweede kolom. De grootste 15 vierkanten corresponderen met de regels van de oorspronkelijke Plimpton-tablet.

Blijft nog het raadsel wat het nut van deze tabel geweest kan zijn. Daarover zijn allerlei speculaties geuit, maar geen van alle zijn ze erg bevredigend. De vraag is vooral ook waarom de rijen op de tablet gerangschikt zijn naar dalende volgorde van de eerste kolom. Waarschijnlijk zijn de rijen eerst via de paren (p, q) berekend, en pas later op volgorde gezet. Dat zou ook verklaren waarom er een aantal (overschrijf?)fouten ingeslopen zijn.

Waarvoor werd die eerste kolom gebruikt? Was het een soort goniotabel? Werd die misschien bij astronomische berekeningen toegepast? We weten het niet. Maar misschien zoeken we er veel te veel achter. Misschien was het gewoon een strafwerkopgave voor een lastige leerling tijdens de rekenles!

Het bovenstaande is een uitgebreide bewerking van een gedeelte van de lezing *De oorsprong van de wiskunde* die de auteur op 27 juni 2004 in Paradiso heeft gegeven. De teksten van alle Paradisolezingen in de cyclus *De oorprong* zijn gepubliceerd in een boek dat bij uitgeverij Boom, Amsterdam, is verschenen (2004): Niki Korteweg (red.), *De Oorsprong – Over het ontstaan van het leven en alles eromheen*, prijs: € 19,50. ISBN 90-8506-008-7.

Op het internet is veel over Babylonische wiskunde te vinden. Zoek bijvoorbeeld op het trefwoord *Plimpton 322*.

Over de auteur: Jan van de Craats (`craats@science.uva.nl`) is hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit.