Fourier-theorie en complexe getallen*

Jan van de Craats (UvA, OU)

1 Introductie

Toen Napoleon Bonaparte zich op 19 mei 1798 met een leger van veertigduizend man te Toulon inscheepte voor een grote expeditie naar Egypte, liet hij zich vergezellen door prominente kunstenaars en wetenschappers, onder wie de wiskundigen Gaspard Monge (1746-1818) en Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Na een snelle verovering van Egypte op de Engelsen benoemde Bonaparte Fourier, die getoond had niet alleen over wetenschappelijke maar ook over bestuurlijke kwaliteiten te beschikken, tot gouverneur van het zuidelijke deel van dat land. Napoleons onderneming kreeg echter met tegenslagen te kampen: op 1 augustus 1798 vernietigde de Engelse admiraal Nelson de Franse vloot op de rede van Aboekir zodat de Fransen in Egypte opgesloten zaten. In 1799 keerde Napoleon met een groep getrouwen naar Frankrijk terug met achterlating van een bezettingsleger, dat echter in 1801 moest capituleren voor een gezamenlijke strijdmacht van Engelsen en Turken.

Figuur 1: Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).

*Dit is mijn bijdrage aan de syllabus bij de CWI-Vacantiecursus 2005 *De schijf van vijf*.

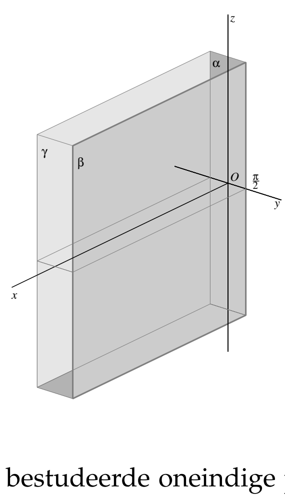
Ook Fourier repatrieerde naar Frankrijk waar hij in 1802 tot prefect van het district Grenoble benoemd werd, een functie die hij tot 1815 zou blijven vervullen. In 1808 kreeg hij de titel van baron en in 1816 werd hij lid van de Académie des Sciences. Daarna wijdde hij zich geheel aan de wetenschap. De publicatie van zijn hoofdwerk *Théorie analytique de la chaleur* in 1822 was echter lang tegengehouden door invloedrijke wiskundigen die vonden dat zijn baanbrekende ideeën niet exact genoeg geformuleerd, laat staan bewezen waren. Toch zou dit boek een revolutie teweegbrengen in de wiskunde van de negentiende en de twintigste eeuw en haar toepassingen. Fourieranalyse is een van de basistechnieken in de theorie van signalen en systemen geworden, en iedereen die een tv-toestel, een cd-speler of een mobiele telefoon bezit, maakt indirect gebruik van resultaten waarvoor Fourier de grondslag heeft gelegd.

2 De *Théorie analytique de la chaleur*

Fourier hield zich echter nauwelijks met signaaltheorie bezig, maar veeleer met het vraagstuk hoe warmte door vaste lichamen stroomt. Daarnaar was al eerder onderzoek gedaan, en bekend was dat de warmtestroom door een homogeen isotroop lichaam gehoorzaamt aan de *diffusievergelijking*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = C\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

voor een zekere constante C. Hierin is $v = v(x, y, z, t)$ de temperatuur van het lichaam in het punt (x, y, z) op tijdstip t.



Figuur 2: De door Fourier bestudeerde oneindige plaat met een temperatuur van honderd graden in vlak α en nul graden in de vlakken β en γ.

Een van de voorbeelden die Fourier bekeek, was een geïdealiseerd lichaam dat de vorm heeft van een oneindige plaat die in $\mathbb{R}^3$ gegeven wordt door

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, -\infty < z < \infty\}$$

In het bijzonder vroeg hij zich af wat de uiteindelijke stationaire temperatuurverdeling in de plaat zou zijn wanneer het vlakdeel $\alpha = \{x = 0, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ door kokend water steeds op honderd graden Celsius gehouden werd, terwijl de temperatuur van de halfvlakken $\beta = \{x \geq 0, y = -\frac{\pi}{2}\}$ en $\gamma = \{x \geq 0, y = \frac{\pi}{2}\}$ met behulp van ijsblokjes op nul graden Celsius wordt gefixeerd. Er zal zich dan op den duur een stationaire warmtestroom van α naar β en γ instellen waarbij de temperatuur $v(x,y,z,t)$ niet meer van t en van z afhangt. Door v zo te normeren dat $v = 0$ met nul graden overeenkomt en $v = 1$ met honderd graden verkreeg Fourier een tweedimensionaal randwaardenprobleem voor de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

op het gebied

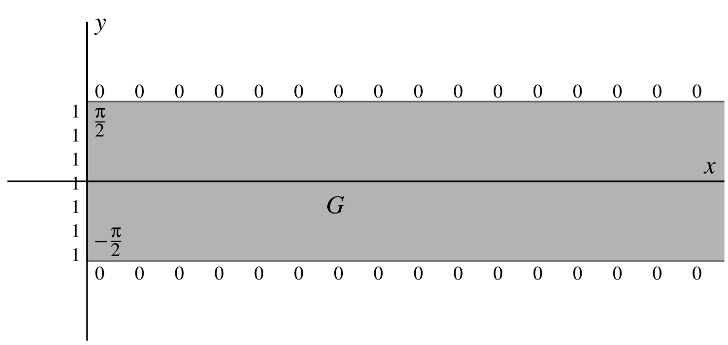
$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$$

met de volgende randvoorwaarden:

$$v(0,y) = 1 \quad \text{als } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

$$v(x,-\frac{\pi}{2}) = v(x,\frac{\pi}{2}) = 0 \quad \text{als } x \geq 0 \tag{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} v(x,y) = 0 \quad \text{als } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \tag{4}$$



Figuur 3: Het tweedimensionale randwaardenprobleem.

Fourier beredeneerde dat er oplossingen van de vorm $v(x,y) = F(x)f(y)$ moeten zijn, en daarvoor levert differentiaalvergelijking (1) na substitutie en herleiding

$$\frac{1}{F(x)}\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{f(y)}\frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2}$$

waarin het linkerlid onafhankelijk van y, en het rechterlid onafhankelijk van x is. Wegens de gelijkheid moeten beide leden dus constant zijn, zeg m, dus

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - mF(x) = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + mf(y) = 0$$

De reële oplossingen hiervan zijn e-machten of combinaties van sinussen en cosinussen, afhankelijk van het teken van m. Uit randvoorwaarde (4) kun je gemakkelijk afleiden dat $m > 0$ moet zijn, dus $F(x) = c\,\mathrm{e}^{-\sqrt{m}x}$ voor een zekere constante c. Fourier merkte vervolgens op dat de keuze $m = (2k+1)^2$ voor $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ speciale oplossingen $f(y)$ geeft van de vorm

$$f(y) = \cos\sqrt{m}y = \cos(2k+1)y$$

waarvoor geldt dat $v(x, y) = F(x)f(y) = c\,\mathrm{e}^{-(2k+1)x}\cos(2k+1)y$ niet alleen aan randvoorwaarde (4), maar ook aan (3) voldoet. Tot op dit moment van de afleiding volgde Fourier nog gebaande paden. Maar het probleem is randvoorwaarde (2), waar geen van de gevonden oplossingen aan voldoet. Fourier pakte het dan als volgt aan. Hij schrijft: *'Nu is het echter gemakkelijk een nog algemenere functie voor v op te stellen. Want omdat* $2k+1$ *een willekeurig oneven positief getal mag zijn, en de differentiaalvergelijking lineair en homogeen is, zal ook*

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\mathrm{e}^{-(2k+1)x}\cos(2k+1)y \\ &= a_1\mathrm{e}^{-x}\cos y + a_3\mathrm{e}^{-3x}\cos 3y + a_5\mathrm{e}^{-5x}\cos 5y + \cdots \end{aligned}$$

een functie zijn die aan (1), (3) en (4) voldoet. Om bovendien nog aan (2) te voldoen, moeten de constanten $a_1, a_3, a_5, \ldots$ *zo bepaald worden dat voor alle* $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ *aan de vergelijking*

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\cos(2k+1)y = a_1\cos y + a_3\cos 3y + a_5\cos 5y + \cdots$$

voldaan is.' Daarmee was de eerste Fourierreeks geboren!

Het berekenen van die coëfficiënten a_k was voor Fourier echter geen sinecure. Na een bladzijdenlange rekenpartij kwam hij tot de formule $a_k = (-1)^k\frac{4}{\pi(2k+1)}$ dus tot

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(\cos y - \frac{1}{3}\cos 3y + \frac{1}{5}\cos 5y - \frac{1}{7}\cos 7y \cdots\right) \quad \text{als} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

Dat is een verrassend resultaat. De geldigheid ervan wordt echter ondersteund doordat een aantal substituties leiden tot bekende formules. Voor $y = 0$ krijg je bijvoorbeeld de bekende alternerende harmonische reeks van Leibniz, namelijk

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

en voor $y = \frac{\pi}{4}$ vind je een formule die ook al door Euler op een heel andere wijze was afgeleid, namelijk

$$\pi = 2\sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots\right)$$

Voor het volgende, ook door Fourier genoemde substitutieresultaat citeer ik Fourier vrijwel letterlijk: '*Vermenigvuldigt men beide leden van vergelijking (5) met* $\frac{\pi}{4}dy$ *en integreert men dit vervolgens van* $y = 0$ *tot* $y = y$*, dan ontstaat*

$$\frac{\pi}{4}y = \sin y - \frac{1}{3^2}\sin 3y + \frac{1}{5^2}\sin 5y - \frac{1}{7^2}\sin 7y + \cdots$$

Wanneer men hierin $y = \frac{\pi}{2}$ *substitueert, ontstaat een andere beroemde formule van Euler, namelijk*

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots \tag{6}$$

Ik voeg daar zelf nog aan toe dat je hieruit direct de waarde van een nog beroemdere Euler-som kan afleiden, namelijk de waarde van de zètafunctie in het punt 2

$$\zeta(2) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

Euler had die zètafunctie als volgt gedefinieerd:

$$\zeta(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots \quad \text{voor } s > 1$$

Met het integraalkenmerk kun je direct verifiëren dat die reeks voor $s > 1$ convergeert. De exacte berekening van de waarde van $\zeta(2)$ was een van de vele grote wapenfeiten van Euler geweest. In 1859 zou Riemann de zètafunctie uitbreiden tot een analytische functie op het gehele complexe vlak met uitzondering van $s = 1$. Zijn vermoeden dat de niettriviale nulpunten van deze functie allemaal voldoen aan $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ is inmiddels een van de belangrijkste open problemen in de wiskunde geworden.

De welbekende afleiding van $\zeta(2)$ uit formule (6) gaat als volgt

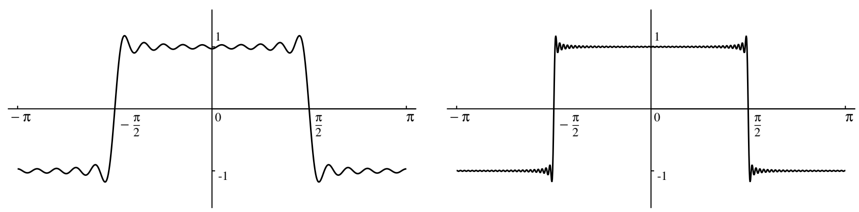
$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) = \frac{1}{4}\zeta(2)$$

en dus is

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \zeta(2) - \frac{1}{4}\zeta(2) = \frac{3}{4}\zeta(2)$$

waaruit volgt dat $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Het lijdt geen twijfel dat dit soort resultaten Fourier sterkten in zijn overtuiging dat hij met zijn methode op het juiste spoor zat. Zou hij al over computeralgebra beschikt hebben, dan was die overtuiging zeker nog verder vergroot door plotjes van de partiële sommen van zijn reeks. Hieronder geven we de grafiek van $S_n(y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{4}{\pi(2k+1)} \cos(2k+1)y$ voor $n = 10$ en $n = 50$.



Figuur 4: De partiële sommen $S_{10}(y)$ en $S_{50}(y)$ van de Fourierreeks.

Omdat alle termen van de reeks periodiek zijn met een periode 2π, zijn de partiële sommen dat ook. Op het interval $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ lijken de partiële sommen inderdaad naar 1 te convergeren. Hoewel? Wat zijn die rare bergpuntjes vlak boven $-\frac{\pi}{2}$ en vlak onder $\frac{\pi}{2}$? Misschien is het maar goed dat Fourier ze niet gezien heeft; misschien hadden ze zijn zelfvertrouwen ondermijnd. Dat 'doorschietverschijnsel' werd in 1848 voor het eerst opgemerkt door Wilbraham, wiens werk echter in de vergetelheid raakte. In 1898 verscheen in *Nature* echter een artikel van de fysicus Michaelson waarin hij er aandacht voor vroeg. In 1899 verklaarde Gibbs het verschijnsel door te laten zien dat het altijd optreedt bij een Fourierreeks die een periodieke functie representeert met sprongdiscontinuïteiten. De 'doorschiethoogte' nadert op den duur tot een vaste fractie van ongeveer 9 procent van de spronggrootte, onafhankelijk van de aard van de functie. Wel schuiven die doorschiettoppen steeds dichter naar het discontinuïteitspunt toe waardoor de puntsgewijze convergentie van de reeks in alle punten waar de functie continu is – hier het interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ – niet in gevaar komt. Maar van uniforme convergentie op dat interval is dus geen sprake!

De Fourierreeks van een willekeurige functie

Aan de hand van de tekst van Fourier zelf zijn we het terrein van de trigonometrische reeksen binnengeleid. Fourier bepaalde een cosinusreeks voor de functie die 1 is op het interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ en 0 in de beide eindpunten. Maar buiten dat interval stelt die reeks ook een functie voor, en wel een periodieke functie met periode 2π. Het is een 'blokfunctie' die nul is in alle punten van de vorm $\frac{\pi}{2} + k\pi$, 1 op alle intervallen van de vorm $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ en -1 op alle intervallen van de vorm $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ (k geheel).

Nadat hij dit voorbeeld behandeld had, wierp Fourier de vraag op of men ook een willekeurige periodieke functie $f(t)$ – stel voor de eenvoud maar weer dat de periode van die functie 2π is – als een trigonometrische reeks kan schrijven. Daniel Bernoulli had dit al beweerd in het kader van zijn onderzoek naar trillende snaren. Fourier is het met hem eens, en denkt het ook te kunnen bewijzen. Hij beweert dus dat er bij zo'n periodieke functie $f(t)$ altijd een reeks van de vorm

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

bestaat die $f(t)$ representeert. Tegenwoordig noemen we zo'n reeks een Fourierreeks. Fourier staaft zijn bewering door expliciete formules te geven voor de coëfficiënten A_0, a_n en b_n van de reeks, namelijk

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt \tag{7}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt \tag{8}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt \tag{9}$$

Het is een aardige opgave om te verifiëren dat deze formules in het hierboven behandelde voorbeeld van een blokfunctie met periode 2π inderdaad de gevonden reeks opleveren, dus dat in dat geval geldt dat $A_0 = 0$, $b_n = 0$ voor alle n en dat $a_{2k} = 0$ en $a_{2k+1} = \frac{4}{\pi(2k+1)}$ voor alle k. Bij de berekening van a_{2k+1} kun je wegens de periodiciteit van f het integratie-interval naar believen verschuiven, zolang de lengte ervan maar 2π blijft. Hier is $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ een handige keuze.

We zullen nu niet laten zien hoe Fourier die integraalformules gevonden heeft. Wel merken we op dat ze direct een aantal vragen oproepen. Bijvoorbeeld: bestaan die integralen wel voor een willekeurige periodieke functie? Zo ja, convergeert de ermee geconstrueerde Fourierreeks dan voor alle t? En zo ja, stelt de som van die reeks dan ook echt in alle punten de oorspronkleijke functie $f(t)$ voor? Tot ver in de twintigste eeuw hebben dit soort vragen wiskundigen beziggehouden. Eerst onder andere Dirichlet en Riemann (de Riemann-integraal en de Riemann-sommen zijn geïntroduceerd in een artikel van Riemann over Fourierreeksen), later Cantor, Weierstrass, Lebesgue en vele anderen.

Voor nette periodieke functies, bijvoorbeeld functies die continu of stuksgewijs continu zijn, lukte het al vrij snel om de zaken tot klaarheid te brengen, maar het is niet al te moeilijk 'pathologische' functies te bedenken waar het helemaal misloopt. Wij zullen deze problematiek hier verder laten rusten en ons, net als de meeste toepassers, beperken tot nette functies. Ons interesseert hier vooral de vraag hoe je zo'n Fourierreeks vindt, en wat ervan de belangrijkste eigenschappen zijn. Daarbij blijkt, zoals zo vaak in de wiskunde, dat de eenvoudigste en overzichtelijkste weg naar reële resultaten door het complexe vlak loopt.

De complexe Fourierreeks

Tot nu toe hadden we voor de eenvoud de periode op 2π gesteld. Het algemene geval van een functie $f(t)$ met periode T kan hierop gemakkelijk worden teruggebracht via de substitutie $t = (2\pi/T)t'$. Men noemt $\omega = 2\pi/T$ dan de *hoekfrequentie* en de formules (7), (8) en (9) voor de Fouriercoëfficiënten worden (met weglating van de accenten)

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt \tag{10}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos n\omega t\,dt \tag{11}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin n\omega t\,dt \tag{12}$$

waarbij de T onder het integraalteken aangeeft dat er over een 'volle periode', dat wil zeggen een interval van lengte T, geïntegreerd moet worden; waar dat interval begint, maakt vanwege de periodiciteit van $f(t)$ niets uit. De Fourierreeks zelf krijgt nu de vorm

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Met behulp van de bekende relaties van Euler

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi \\ \cos\varphi &= \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} \end{aligned}$$

kunnen we de Fourierreeks herschrijven als

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{in\omega t} = \cdots + \alpha_{-2}e^{-2i\omega t} + \alpha_{-1}e^{-i\omega t} + \alpha_0 + \alpha_1 e^{i\omega t} + \alpha_2 e^{2i\omega t} + \cdots \tag{13}$$

waarin

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= A_0 \\
\alpha_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad (n \geq 1) \\
\alpha_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \;=\; \overline{\alpha_n} \quad (n \geq 1)
\end{aligned}$$

Wanneer we aannemen dat de Fourierreeks (13) inderdaad de functie $f(t)$ voorstelt, dat de hieronder beschreven integralen bestaan en dat we sommatie en integratie mogen verwisselen (dat zijn allemaal voorwaarden die vallen onder de vage veronderstelling dat $f(t)$ een 'nette' functie is), dan geldt voor elk geheel getal k dat

$$\begin{aligned}
\int_T f(t)\, \mathrm{e}^{-ik\omega t}\, dt &= \int_T \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n\, \mathrm{e}^{in\omega t} \right) \mathrm{e}^{-ik\omega t}\, dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \left(\int_T \mathrm{e}^{i(n-k)\omega t}\, dt \right)
\end{aligned}$$

De cruciale opmerking is nu dat $\int_T \mathrm{e}^{i(n-k)\omega t}\, dt = 0$ voor alle n behalve $n = k$. Immers, op grond van Eulers relaties is

$$\begin{aligned}
\int_T \mathrm{e}^{i(n-k)\omega t}\, dt &= \int_T \cos i(n-k)\omega t\, dt + i \int_T \sin i(n-k)\omega t\, dt \\
&= \int_T \cos i(n-k)\frac{2\pi}{T} t\, dt + i \int_T \sin i(n-k)\frac{2\pi}{T} t\, dt
\end{aligned}$$

en omdat $n-k$ een geheel getal is en we over een interval van lengte T (dat wil zeggen $n-k$ volle periodes) integreren, zijn beide integralen nul. De enige uitzondering is het geval dat $n = k$, want dan is $\mathrm{e}^{i(n-k)\omega t} = \mathrm{e}^0 = 1$, en dus is dan $\int_T \mathrm{e}^{i(n-k)\omega t}\, dt = \int_T 1\, dt = T$. We concluderen dat

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_T f(t)\, \mathrm{e}^{-ik\omega t}\, dt \tag{14}$$

waarmee we een eenvoudige en overzichtelijke formule gevonden hebben voor de Fouriercoëfficiënten α_k. Dat zijn echter in veel gevallen wel *complexe* getallen. De som van de bijbehorende complexe Fourierreeks is echter een reële functie van t, mits natuurlijk $f(t)$ zelf een nette, reële functie is. Men kan bewijzen dat voor stuksgewijs continue functies de Fourierreeks naar $f(t)$ convergeert in alle continuïteitspunten van f, en naar het gemiddelde van de linker- en de rechterlimiet van $f(t)$ in alle sprongpunten.

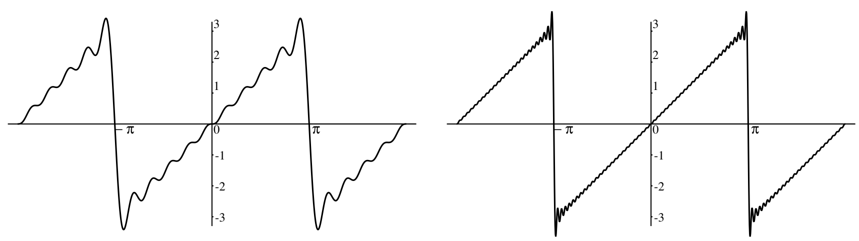
We berekenen als voorbeeld de complexe Fourierreeks van de functie $f(t)$ met periode $T = 2\pi$ (dus $\omega = 1$) die op het interval $(-\pi, \pi)$ gegeven wordt door $f(t) = t$. Dit is een soort 'zaagtand-functie'. Daarvoor is $\alpha_0 = 0$ en voor $k \neq 0$

geeft partiële integratie

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,\mathrm{e}^{-ikt}dt = \frac{-1}{2\pi ik}\int_{-\pi}^{\pi} t\,d(\mathrm{e}^{-ikt}) \\ &= \left[\frac{-1}{2\pi ik}t\,\mathrm{e}^{-ikt}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi ik}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-ikt}\,dt \\ &= \frac{-1}{2ik}(\mathrm{e}^{-ik\pi}+\mathrm{e}^{ik\pi}) = \frac{i}{k}\cos k\pi = \frac{i(-1)^k}{k}\end{aligned}$$

De reële Fourierreeks is dus een zuivere sinusreeks, en wel

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin kt = 2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \cdots\right)$$



Figuur 5: De partiële sommen $S_{10}(y)$ en $S_{50}(y)$ van de Fourierreeks van de zaagtandfunctie. Let weer op het 'doorschietverschijnsel' rond de sprongpunten.

Het spectrum

In het algemeen is, zoals we al gezien hebben, α_k een complex getal. We schrijven het in de *polaire vorm*

$$\alpha_k = |\alpha_k|\,\mathrm{e}^{i\varphi_k}$$

Wegens $\alpha_{-k} = \overline{\alpha_k}$ geldt dat $|\alpha_k| = |\alpha_{-k}|$ en $\varphi_{-k} = -\varphi_k (\text{mod } 2\pi)$. Vullen we dit in de complexe Fourierreeks in, dan kunnen we die schrijven als

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \, \mathrm{e}^{in\omega t} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n| \, \mathrm{e}^{i(n\omega t + \varphi_n)} \\
&= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \left(\mathrm{e}^{i(n\omega t + \varphi_n)} + \mathrm{e}^{-i(n\omega t + \varphi_n)} \right) \\
&= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|\alpha_n| \cos(n\omega t + \varphi_n) \\
&= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)
\end{aligned}
$$

We hebben hier $A_n = 2|\alpha_n|$ ($n \geq 1$) gesteld. Wanneer $f(t)$ een periodiek geluidssignaal voorstelt (dat wil zeggen een muzikale toon), is α_0 het gemiddelde niveau (nulniveau) van het geluidssignaal, $A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ de grondtoon van het signaal en $A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ de n-de boventoon. De frequentie is $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ Hertz. Dit is ook de frequentie van de grondtoon. De n-de boventoon heeft frequentie $n\nu$. Men noemt $A_n = 2|\alpha_n|$ de amplitude, en φ_n de fase(hoek) van de n-de boventoon. In het algemeen heet de rij $\{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ het (complexe) *spectrum* van $f(t)$. Voor nette periodiek functies geldt dat het spectrum de functie via de Fourrierreeks volledig bepaalt: zo'n functie ligt volledig vast als men zijn periode en zijn spectrum geeft. De rijen $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ noemt men respectievelijk het *amplitudespectrum* en het *fasespectrum*.

Fourierintegralen

Kun je het bij Fourierreeksen met enige moeite nog wel zonder complexe getallen stellen, bij de *Fourier-integralen* is dat praktisch uitgesloten. Fourierintegralen vormen het analogon van Fourierreeksen bij niet-periodieke functies. Je kunt ze via een limietovergang intuïtief uit Fourierreeksen afleiden, maar daarvoor ontbreekt ons hier de tijd en de ruimte. In plaats daarvan laten we de definitie gewoon uit de lucht vallen.

Bij een gegeven 'nette' functie f(t) (we laten weer in het midden wat men precies onder 'net' mag verstaan) wordt de *Fourier-getransformeerde* $\hat{f}(\omega)$ gedefinieerd door

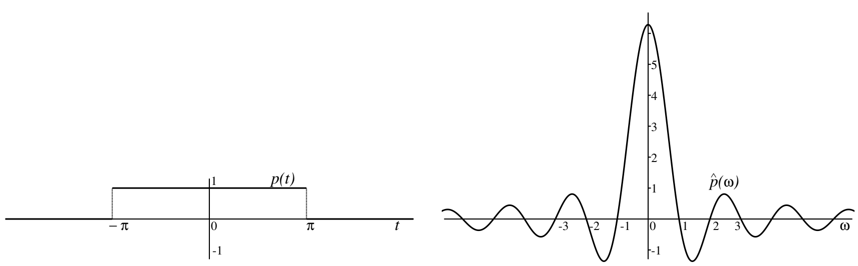
$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, \mathrm{e}^{-i\omega t} dt$$

Deze functie speelt een rol die vergelijkbaar is met die van de Fourier-coëfficienten α_k van de Fourierreeks van een periodieke functie. Men noemt $\hat{f}(\omega)$ ook wel de *spectrale dichtheid* van $f(t)$.

In zekere zin is het gebruik van ω in deze notatie ongelukkig, want de variabele ω speelt hier een andere rol dan de ω bij de Fourierreeksen. Daar was $\omega = \frac{2\pi}{T}$, maar hier is ω een variabele die de gehele $\mathbb{R}$ doorloopt, net als de variabele t bij de functie $f(t)$. In de toepassingen spreekt men vaak over het t-domein (of het tijddomein) en het ω-domein (of het frequentiedomein). De Fouriertransformatie zet dan een functie $f(t)$ in het tijddomein over in een functie $\hat{f}(\omega)$ in het frequentiedomein. Het verrassende is dat er bij deze overzetting geen informatie verloren gaat, althans wanneer de functies zich netjes gedragen. We hebben al gezien hoe een functie van het t-domein naar het ω-domein wordt getransformeerd. Er is ook een inverse transformatie die functies uit het ω-domein weer naar het t-domein terughaalt, en de formule waarmee dit gebeurt lijkt erg op die van de gewone Fourier-transformatie:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, \mathrm{e}^{i\omega t} d\omega.$$

Dat is in zekere zin het analogon van de Fourierreeks voor periodieke functies, die immers een functie schrijft als een oneindige som van Fouriercoëfficiënten en complexe e-machten. Ook hierover is veel meer te vertellen dan hier mogelijk is. Ik volsta ermee op te merken dat de Fourier-integralen, meer nog dan de Fourierreeksen, voor de toepassingen van eminent belang zijn.



Figuur 6: De functie $p(t)$ in het tijddomein en de Fouriergetransformeerde $\hat{p}(\omega)$ in het frequentiedomein.

Als voorbeeld berekenen we de spectrale dichtheid $\hat{p}(\omega)$ van het signaal $p(t)$ dat gegeven wordt door

$$p(t) = \begin{cases} 1 & \text{als } |t| \leq \pi \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

In dat geval is

$$\begin{aligned} \hat{p}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-i\omega t} dt \\ &= \left[\frac{-1}{i\omega} \mathrm{e}^{-i\omega t} \right]_{t=-\pi}^{\pi} = \frac{-1}{i\omega} \left(\mathrm{e}^{-i\omega\pi} - \mathrm{e}^{i\omega\pi} \right) = \frac{2 \sin \pi\omega}{\omega} \end{aligned}$$

De omkeerformule geeft nu

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(\omega)\, \mathrm{e}^{i\omega t} d\omega$$

en in het bijzonder is (substitueer $t = 0$)

$$p(0) = 1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(\omega)\, \mathrm{e}^{0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin \pi\omega}{\omega} d\omega$$

en hieruit volgt (stel $x = \pi\omega$ en merk op dat $\frac{\sin x}{x}$ een even functie is) het beroemde resultaat

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Het belang van de Fouriertransformatie is alleen maar toegenomen door de komst van de computer. Die maakte het in principe mogelijk de integralen waarmee de Fouriertransformatie gedefinieerd is ook numeriek te berekenen via een zogenaamde *Discrete Fouriertransformatie* (DFT), maar dit werd pas echt doenlijk toen de *Fast Fourier Transform* (FFT) ten tonele verscheen, een buitengewoon efficiënt algoritme om van het discrete tijddomein naar het discrete frequentiedomein over te stappen en omgekeerd. Al deze ontwikkelingen hebben het mogelijk gemaakt zowel continue als discrete signalen in de beide domeinen te analyseren en te bewerken, met schier onbegrensde toepassingsmogelijkheden. En bij al die toepassingen zijn complexe getallen een onontbeerlijk hulpmiddel gebleken.

Verder lezen

Het aantal elementaire inleidingen in de Fourieranalyse is legio. In het Nederlands kan ik voor een eerste kennismaking deel 4, *Fourier-theorie en systeemtheorie* van de serie *Voortgezette wiskunde* van A. Kaldewaij en J. van Tiel aanbevelen (Bohn, Scheltema & Holkema, Utrecht/Antwerpen 1983, ISBN 90-3130575-8). Dit boek geeft een goede inleiding in de toepassingen in onder andere de electrotechniek op hts-niveau.

Zeer gedegen, met ook aandacht voor alle wiskundige finesses, is het boek dat oorspronkelijk als cursusboek voor de Open Universiteit werd geschreven, en dat later ook afzonderlijk in de handel is gebracht: R.J. Beerends, H.G. ter Morsche, J.C. van den Berg, E.M. van der Vrie: *Fourier- en Laplace-transformaties* (Educaboek, Culemborg, 1993, ISBN 90-11-021096).