Over de rol van vermoedens in de wiskunde

J. van de Craats
KMA, Postbus 90154, 4800 RG Breda
e-mail: jcr@euronet.nl

1. Inleiding

Veel beroemde stellingen in de wiskunde zijn hun bestaan als een vermoeden begonnen. Zonder de waarheid veel geweld aan te doen zou je de geschiedenis van de wiskunde zelfs in grote lijnen kunnen beschrijven als een geschiedenis van vermoedens en bewijzen. Kenmerkend voor de wiskunde is dat er een strikte scheiding bestaat tussen onbewezen vermoedens en bewezen stellingen. In principe is er over de status van belangrijke uitspraken in de wiskunde eigenlijk nooit discussie: is het een onbewezen uitspraak, dan is het een vermoeden, is het bewijs geleverd, dan is het vermoeden een stelling geworden. De enige slag die we om de arm moeten houden, is dat het controleren van een bewijsclaim een tijdrovende zaak kan zijn, waarbij een enkele keer wel eens details over het hoofd worden gezien. Maar in principe – ik herhaal die woorden nog maar eens voor de zekerheid – kan elke bekwame wiskundige elk bewijs verifiëren. Sommige wiskundigen zijn zelfs van mening dat die verificatie aan een computer zou kunnen worden overgelaten; het project Automath van N.G. de Bruijn is op deze overtuiging gestoeld.

Bij de andere wetenschappen spelen vermoedens en bewijzen een geheel andere rol. Meestal is er daar sprake van een glijdende schaal die loopt van wilde hypothesen tot algemeen aanvaarde theorieën. Bewijzen zijn daar niet meer dan argumenten die een theorie of een vermoeden in zekere mate ondersteunen. In de natuurwetenschappen toetst men een hypothese door experimenten uit te voeren en te bepalen of de uitslag ervan met die hypothese verenigbaar is. Uiteindelijk heeft het experiment daar het laatste woord. Bewijzen in de wiskunde daarentegen zijn absoluut: een bewijs van een stelling kan niet door de uitslag van een experiment onderuit worden gehaald. In geen enkele andere wetenschap is de zekerheid bereikbaar die een wiskundig bewijs verschaft. Wiskunde is dan ook geen experimentele wetenschap, maar een vrije schepping van de menselijke geest.

Toch bestaat er wel zoiets als experimentele wiskunde. De wiskunde ontwikkelt zich immers niet los van de werkelijkheid; ze laat zich voortdurend door haar inspireren. Getallen en getallenpatronen komen voort uit structuren en patronen die we in de werkelijkheid waarnemen. Hetzelfde geldt voor de meetkunde, de analyse, de topologie, de grafentheorie, de kansrekening, ja zelfs voor wezenlijk abstractere vakken als de algebra en de logica. Experimentele wiskunde kan nuttig zijn als middel om structuren en patronen te ontdekken en te onderzoeken. Als je speciale gevallen tekent of doorrekent, kun je vermoedens testen of op het spoor komen. De computer speelt daarbij tegenwoordig een belangrijke rol.

2. Het $3n+1$ vermoeden

Een mooi voorbeeld hiervan is het nog steeds niet opgeloste $3n+1$ vermoeden, een vermoeden dat sinds de jaren vijftig onder tal van verschillende namen de ronde doet: het wordt ook wel het *Collatz-probleem*, het *Kakutani-probleem*, of het *Syracuse-probleem* genoemd. Het luidt als volgt. Begin met een willekeurig positief geheel getal n. Pas hierop de volgende transformatie $T(n)$ toe:

$$T(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{als } n \text{ oneven is} \\ n/2 & \text{als } n \text{ even is} \end{cases}$$

en blijf dit herhalen, zodat een rij

$$n,\ T(n),\ T^2(n) = T(T(n)),\ T^3(n) = T(T(T(n))), \ldots$$

ontstaat. Zodra de rij het getal 1 bereikt, wordt ze periodiek:

$$\ldots, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots.$$

Het $3n+1$ vermoeden luidt dat dit voor iedere n na eindig veel stappen zal gebeuren, met andere woorden dat er bij elke n een $k = k(n)$ bestaat waarvoor $T^k(n) = 1$. De numerieke evidentie voor de juistheid van dit vermoeden is groot: in het boek *Getaltheorie voor beginners* van Frits Beukers lees ik dat het vermoeden in 1998 al geverifieerd was voor alle $n < 3.2 \times 10^{16}$, en inmiddels zal men waarschijnlijk al weer veel verder zijn.

Maar hoe veel waarden van n we ook testen, zolang we geen tegenvoorbeeld vinden, helpt de computer ons op die manier niet verder. Als het vermoeden juist is, zullen we er een bewijs voor willen vinden; numerieke evidentie is niet voldoende. Als waarschuwing kan dienen dat het overeenkomstige $5n+1$ vermoeden niet juist is: naast de cyclus

$$\ldots, 1, 6, 3, 16, 8, 4, 2, 1, \ldots$$

is er ook nog minstens één andere cyclus, namelijk

$$\ldots, 13, 66, 33, 166, 83, 416, 208, 104, 52, 26, 13, \ldots$$

Bij het $7n+1$ probleem is de situatie nog verwarrender: weliswaar levert 1 een eindige cyclus op, namelijk $1, 8, 4, 2, 1$, maar wat er met de geïtereerden van 3 gebeurt, is niet bekend: er zijn in de rij die met 3 begint al getallen gevonden van meer dan negenduizend cijfers!

Is het $3n+1$ vermoeden een belangrijk vermoeden in de wiskunde of is het alleen maar een curiositeit? Dat is moeilijk te zeggen. Het belang van een vermoeden zou men misschien willen afmeten aan de praktische toepasbaarheid ervan. In dat geval zijn we gauw uitgepraat: voor zover bekend is die er niet. Maar in de wiskunde wordt het belang niet in de eerste plaats bepaald door praktische toepassingen, maar door de vraag in hoeverre zo'n vermoeden verbonden is met andere, substantiële delen van de wiskunde. Het gaat dus om de vraag hoe centraal de plaats is die zo'n vermoeden binnen de wiskunde inneemt. In dat opzicht is de kort geleden bewezen Laatste Stelling van Fermat van enorm belang gebleken: in zijn meer dan 350 jaar oude geschiedenis heeft ze meer dan eens geleid tot de ontwikkeling van nieuwe en veelbetekenende theorieën in de algebra, de getallentheorie en de algebraïsche meetkunde. Andrew Wiles wist de stelling uiteindelijk te bewijzen als een speciaal geval van een veel algemener vermoeden, dat van Taniyama en Shimura, dat twee op het eerste gezicht totaal verschillende terreinen binnen de wiskunde met elkaar verbindt: de theorie van de modulaire vormen en de theorie van de elliptische functies. De spannende geschiedenis ervan is de afgelopen jaren al herhaaldelijk beschreven. Voor de beginner is de beste gids het boek *Het laatste raadsel van Fermat* van Simon Singh.

Zo'n centrale plaats als de Laatste Stelling van Fermat neemt het $3n + 1$ vermoeden in de wiskunde thans zeker nog niet in. Wel zijn er deelresultaten en bewijzen bekend onder aanname van zekere plausibel lijkende andere vermoedens, maar, in de woorden van Paul Erdös, de huidige wiskunde lijkt nog niet klaar te zijn om dit soort problemen aan te pakken.

3. Niet-euclidische meetkunde

Niet altijd wordt een belangrijk vermoeden met een bewijs bekroond. De geschiedenis van de wiskunde telt heel wat vermoedens die onjuist zijn gebleken, maar waarbij juist de ontdekking van de ongeldigheid ervan voor de wiskunde van groot belang is geweest. De oude Griekse meetkunde biedt een groot aantal voorbeelden. Zo is er de geschiedenis van het beroemde *parallellenaxioma* uit de Elementen van Euclides. Zoals bekend trachtte Euclides de meetkunde op strikt logische wijze af te leiden uit een beperkt aantal 'vanzelfsprekende' basisstellingen, de axioma's. Het volgende axioma nam daarbij een bijzondere plaats in:

> Als twee lijnen een derde lijn snijden, en de binnenhoeken aan één kant van die lijn zijn samen minder dan 180 graden, dan snijden die twee lijnen elkaar aan diezelfde kant van de derde lijn.

Al in de tijd van Euclides was men gefrappeerd door het, in vergelijking met de andere axioma's, gecompliceerde karakter van dit axioma. Het leek veel meer de gedaante te hebben van een stelling die uit de andere axioma's kan worden afgeleid. Het vermoeden dat dit parallellenaxioma een uit de andere axioma's afleidbare stelling is, heeft tot in de negentiende eeuw tal van wiskundigen beziggehouden – zonder succes. Dat wil zeggen, zonder dat men zo'n afleiding vond. Wel werden allerlei andere, equivalente formuleringen gevonden, zoals bijvoorbeeld

> Door een gegeven punt buiten een gegeven lijn gaat precies één lijn die de gegeven lijn niet snijdt.

of

> De som van de hoeken van elke driehoek is gelijk aan 180 graden.

maar het afleiden van deze 'evidente' stellingen uit de overige axioma's leek net zo'n onmogelijke opgave te zijn als het bewijzen van het parallellenaxioma.

Een andere, veelbelovende aanpak leek die van het bewijs uit het ongerijmde: ga ervan uit dat het parallellenaxioma niet geldt, en probeer daaruit (en uit de overige axioma's) een ongerijmdheid af te leiden. Dat leidde onder andere tot de volgende uitspraken: als het parallellenaxioma niet geldt, dan

- is de som van de hoeken in elke driehoek kleiner dan 180 graden,
- bestaan er geen gelijkvormige niet-congruente figuren,
- bestaan er geen vierkanten of rechthoeken,
- geldt de Stelling van Pythagoras niet,
- bestaat er een absolute lengtemaat.

Hoezeer deze uitspraken ook in tegenspraak lijken met de 'dagelijkse ervaring' of de 'meetkundige intuïtie', het afleiden ervan uit de overige axioma's lukte niet, en daarmee mislukte ook het bewijs uit het ongerijmde.

Pas in het begin van de negentiende eeuw kwamen, onafhankelijk van elkaar, C.F. Gauss (1777-1855), J. Bolyai (1802-1860) en N.I. Lobachevsky (1793-1856) tot de overtuiging dat die bewijspogingen wel spaak móesten lopen, omdat de ontkenning van het parallellenaxioma helemaal niet leidt tot een tegenspraak, maar tot een andere, *niet-euclidische* meetkunde, die vanuit een logisch standpunt bekeken net zo veel bestaansrecht heeft als de gewone meetkunde van Euclides. In de vakantiecursus van vorig jaar heeft prof.dr. F. van der Blij hieraan een voordracht gewijd.

De ontdekking van de niet-euclidische meetkunde heeft overigens veel bijgedragen aan de opheldering van filosofische vragen omtrent de 'ware' meetkunde van de ons omringende werkelijkheid. Voor de oude Grieken was de euclidische meetkunde de beschrijving van de geïdealiseerde werkelijkheid. Geïdealiseerd, want meetkundige punten hebben geen afmetingen en meetkundige lijnen en vlakken hebben geen dikte. Toch waren de meetkundige punten, lijnen en vlakken in hun visie noodzakelijkerwijze een getrouwe afspiegeling van realiteit, de wereld om ons heen. Met de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde werd het echter duidelijk dat de euclidische meetkunde slechts één van de oneindig veel andere mogelijke meetkundige modellen voor de werkelijkheid is. Later zou B. Riemann (1826-1866) het scala aan meetkundige modellen nog verder vergroten, waardoor het duidelijk werd dat ook de oude vertrouwde bolmeetkunde, naast de meetkunde van Gauss, Bolyai en Lobachevsky, als een niet-euclidische meetkundevorm kan worden gezien.

Voor dagelijks gebruik is de euclidische meetkunde natuurlijk nog steeds de eenvoudigste beschrijvingsvorm van de ons omringende ruimte – wat zouden we immers moeten beginnen zonder vierkante tegelvloeren? – maar op kosmologisch of subatomair niveau zijn andere modellen meer aangewezen. En de vraag welke meetkunde nu 'echt' de meetkunde van de werkelijkheid beschrijft, is inmiddels door veel wiskundigen en fysici als zinloos terzijde geschoven.

4. Passer-en-liniaalconstructies

In een *tour d'horizon* met als thema vermoedens uit de geschiedenis van de wiskunde mogen de klassieke Griekse problemen rond passer-en-liniaalconstructies niet ontbreken. Ook hier geldt weer dat ze hun belang niet ontlenen aan hun praktische toepasbaarheid, maar aan hun stimulerende invloed op de ontwikkeling van de wiskunde, met name die in de negentiende eeuw.

Zoals bekend, hanteerden de oude Grieken strikte regels omtrent het gebruik van passer en liniaal. Of liever gezegd, zij waren de eersten die zich afvroegen hoe ver je kunt komen als je jezelf zulke strikte regels oplegt. Ook voor de Grieken ging het daarbij niet om het oplossen van praktische vraagstukken, maar om een spel, dat volgens strikte regels gespeeld moest worden. Hun meetkundespel kent een geïdealiseerde liniaal en een geïdealiseerde passer, waarmee men uitgaande van een gegeven, uit punten, lijnen en cirkelbogen samengestelde vlakke meetkundige figuur, nieuwe punten, lijnen en cirkelbogen mag construeren. Daarbij gelden de volgende spelregels:

- Twee gegeven of geconstrueerde punten mogen door een lijn verbonden worden.
- Bij een gegeven of geconstrueerd punt M en twee gegeven of geconstrueerde punten P en Q mag men een cirkelboog tekenen met M als middelpunt en de afstand PQ als straal.
- Bij twee gegeven of geconstrueerde elkaar snijdende lijnen of cirkels mag men de snijpunten als geconstrueerd beschouwen.

Tal van meetkundige constructies kan men uitvoeren via een eindig aantal van zulke stappen, bijvoorbeeld het verdelen van een gegeven lijnstuk in een willekeurig aantal gelijke delen, het oprichten of neerlaten van loodlijnen vanuit een punt op een lijn, het halveren van een gegeven hoek, het construeren van een gelijkzijdige driehoek, vierkant of regelmatige vijfhoek met een gegeven zijdelengte. Maar er waren ook constructieopgaven die niet lukten, zoals de trisectie (het in drie gelijke delen verdelen) van een willekeurige hoek, de 'kubusverdubbeling', dat wil zeggen de constructie van de ribbenlengte van een kubus met een inhoud die twee maal zo groot is als die van een gegeven kubus, of de 'kwadratuur van de cirkel', dat wil zeggen het bepalen van de zijdelengte van een vierkant dat dezelfde oppervlakte heeft als die van een cirkel met een gegeven straal. Ook de constructie van regelmatige n-hoeken voor $n > 5$ gaf problemen, bijvoorbeeld voor $n = 7$ of $n = 9$.

Nogmaals zij erop gewezen dat dit geen praktische problemen waren, maar opgaven binnen de context van een meetkundig spel met strikte regels. Door versoepeling van de regels verdwijnen de problemen als sneeuw voor de zon. Zo wisten de oude Grieken bijvoorbeeld al dat de trisectie van de hoek gemakkelijk is wanneer men de liniaal van slechts twee merktekens mag voorzien. Maar dat was vals spelen.

Wat zijn bij deze problemen nu eigenlijk de vermoedens geweest? Het vermoeden dat zo'n constructie wel degelijk mogelijk was? Misschien, maar waarschijnlijk hebben ook in de Griekse oudheid al velen het idee gehad dat deze constructieopgaven onuitvoerbaar zijn; zelfs in onze tijd is 'de kwadratuur van de cirkel' immers een metafoor voor een onmogelijke opgave. Toch blijken ook thans nog veel leken en amateurs niet te kunnen accepteren dat bepaalde constructies echt onmogelijk zijn. Meestal begint het er al mee dat zij de spelregels niet kennen, of zich zelfs helemaal niet realiseren dat het om een spel met strikte regels gaat. Vaak menen zij ook dat het om een brandende praktische kwestie gaat, en komen zij met benaderende oplossingen. En meestal reageren ze heel lakoniek op de mededeling dat in de negentiende eeuw reeds bewezen is dat die problemen onoplosbaar zijn. Zij hebben immers wel degelijk een oplossing gevonden, en dus moeten al die kamergeleerden er wel naast zitten!

Er kwam pas klaarheid in de passer-en-liniaalproblematiek toen men zich begon te realiseren dat zulke constructieopgaven corresponderen met algebraïsche vraagstukken. Gauss ontdekte al op 18-jarige leeftijd met algebraïsche middelen dat er een passer-en-liniaalconstructie bestaat voor elke regelmatige p-hoek waarvoor p een *Fermat-priemgetal* is, dat wil zeggen een priemgetal van de vorm $p = 2^m + 1$, waarbij $m = 2^k$ een macht is van 2. In het bijzonder zijn er dus constructies voor de regelmatige driehoek ($k = 0$) en de regelmatige vijfhoek ($k = 1$), zoals ook de oude Grieken al wisten. Maar dat het ook kan voor de regelmatige 17-hoek ($k = 2$), de regelmatige 257-hoek ($k = 3$), en de regelmatige 65537-hoek ($k = 4$) kwam als een volslagen verrassing. Bij Gauss heeft het vinden van dit resultaat in belangrijke mate bijgedragen aan zijn beslissing om zijn leven verder aan de wiskunde te wijden. Naast de genoemde Fermat-priemgetallen 3, 5, 17, 257 en 65537 zijn er geen andere Fermat-priemgetallen bekend. Het kleinste getal k waarvoor niet bekend is of $F_k = 2^{2^k} + 1$ priem is, is $k = 22$. Het door Fermat uitgesproken vermoeden dat alle Fermatgetallen priemgetallen zijn, werd reeds gelogenstraft door Euler, die ontdekte dat $F_5 = 641 \times 6700417$. Dit is overigens een van de heel zeldzame keren geweest dat Fermat een vermoeden uitsprak dat achteraf onjuist is gebleken!

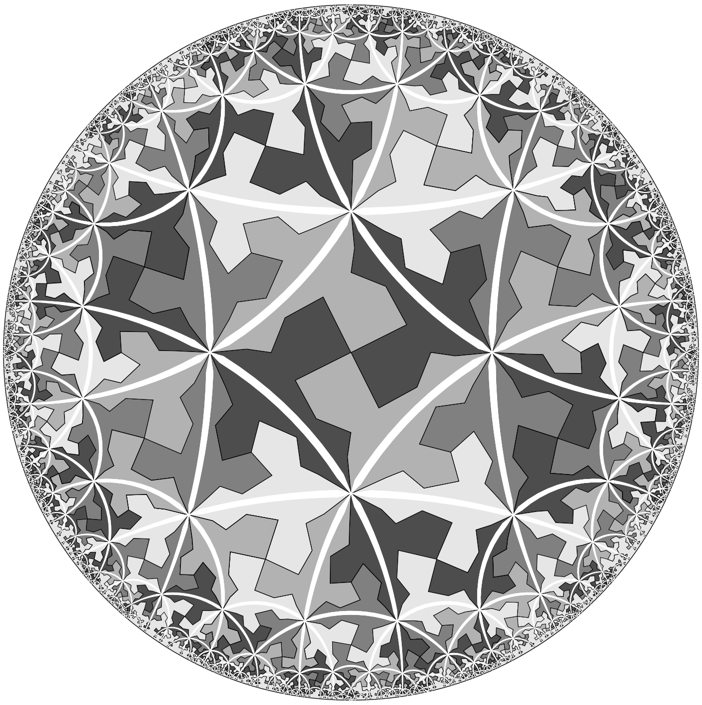
Ook het trisectieprobleem en het probleem van de kubusverdubbeling werden in het begin van de negentiende eeuw met algebraïsche middelen opgelost: het bleken inderdaad onmogelijke constructieopgaven te zijn. De kwadratuur van de cirkel bood meer weerstand: de onmogelijkheid daarvan was pas bewezen toen F. Lindemann in 1882 aantoonde dat het getal π transcendent is.

Als we de geschiedenis van de passer-en-liniaalconstructies bekijken, zien we dat het belang ervan voor de wiskunde eigenlijk helemaal niet heeft gelegen in het oplossen van de oorspronkelijke constructieopgaven, maar veeleer in de verbindingen die er bleken te liggen met nieuwe algebraïsche vraagstukken. Dat ze nog zo lang in het elementaire meetkundeonderwijs zijn blijven voortleven, is niet meer dan een teken van de hardnekkigheid waarmee tradities zich in het onderwijs weten te handhaven, ook als ze vanuit een hoger standpunt bekeken hun bestaansrecht allang verloren hebben.

5. Vermoedens in de klas

Ontegenzeggelijk is de betekenis van de experimentele wiskunde de laatste jaren enorm toegenomen. De mogelijkheden om met behulp van computers structuren te onderzoeken en vermoedens te toetsen zijn thans ongekend. Het zal niet lang meer duren voordat de computer ook in de wiskundeles een onmisbaar instrument is geworden. Ongetwijfeld zal het karakter van het wiskundeonderwijs daardoor radicaal veranderen. Ik ben er echter van overtuigd dat de nieuwe mogelijkheden om leerlingen met de computer actief bij de wiskunde te betrekken een overwegend positieve invloed op het onderwijs zullen uitoefenen. Leerlingen zullen zelf *what if* vragen gaan stellen zodra we ze over de drempel van programma's als DERIVE en CABRI hebben geholpen. Daarbij zullen sommige leerlingen vanzelf allerlei wiskundige patronen gaan ontdekken – de jonge wiskundige onderzoeker is geboren. Met name het meetkundeprogramma CABRI biedt daarvoor prachtige mogelijkheden; er zijn op dat gebied al experimenten geweest met heel positieve ervaringen.

Waar het om gaat, is dat de leraar de leerling steeds op een positieve wijze stuurt en stimuleert. Door uitdagende onderzoeksvragen te stellen en interressante opdrachten te formuleren. Door op de juiste momenten de noodzaak van het zoeken naar een bewijs te signaleren en de leerlingen dan bij hun moeizame eerste stappen op die weg te begeleiden. Zijn er geen gevaren op dat pad? Natuurlijk wel! Dat leerlingen de subtiele redeneringen die nodig zijn voor een wiskundig bewijs niet zelf kunnen vinden, en zich verstrikken in drogredenen en cirkelredeneringen, is nog het minste gevaar. Ook in de huidige onderwijssituatie is dat immers het geval; met de computer erbij hebben we echter veel meer mogelijkheden om absurde consequenties van redeneerfouten te signaleren. Een reëler gevaar lijkt me kans dat leerlingen met veel te moeilijke problemen worden geconfronteerd. Met vermoedens waarvan de oplossing volledig buiten hun bereik ligt. Het kan voor de beginner heel frustrerend zijn om veel te tijd steken in een onderzoek dat niet op een bevredigende manier

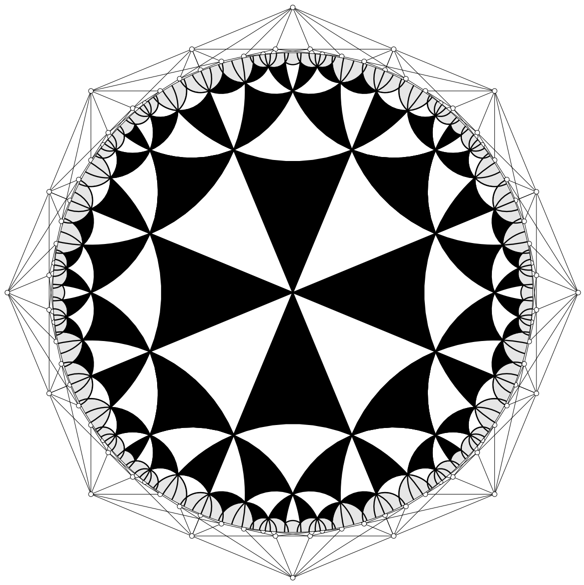


Figuur 1: Een gestileerde versie van *Cirkellimiet* III

kan worden afgesloten. Daarom is het nodig dat je als leraar al in grote lijnen weet waar je je leerlingen aan laat beginnen. Belangrijk lijkt me dat elk onderzoeksproject wordt bekroond met een werkstuk waar je mee voor de dag kunt komen.

6. Eschers prent *Cirkellimiet* III – een vermoeden

Tegen het einde van mijn verhaal komend, kan ik de verleiding toch niet weerstaan om nog een keer terug te keren naar de wondere wereld van de niet-euclidische meetkunde van Gauss, Bolyai en Lobachevsky, en wel aan de hand van twee van Eschers beroemde cirkellimietprenten. In Figuur 1 ziet u een gestileerde computerversie van *Cirkellimiet* III. De vier kleuren geel, groen, bruin en blauw zijn door grijstinten vervangen en van de vissen zijn alleen de contouren getekend. Maar u heeft natuurlijk allemaal wel een of meer Escherboeken in de kast staan waarin de echte prent in kleur is afgedrukt. Als excuus voor mijn uitwijding over deze prent zal ik er een vermoeden aan vast knopen, namelijk een vermoeden omtrent de manier waarop ik denk dat Escher de prent *Cirkellimiet* III geconstrueerd heeft. Een bewijs van dat vermoeden geef ik niet: de titel van de vacantiecursus luidt immers 'Onbewezen vermoedens'.



Figuur 2: Een variant op de betegeling uit Coxeters artikel

Bekend is dat de cirkellimietprenten van Escher (hij maakte er vier) hun ontstaan te danken hebben aan de Canadese wiskundige H.S.M. Coxeter, die Escher in 1958 een artikel van zijn hand stuurde met daarin een afbeelding van een betegeling met driehoeken van het cirkelmodel van Poincaré van het niet-euclidische vlak. Dat is dus een vlak waarin de bovenvermelde vreemde meetkundige wetten heersen: het parallellenaxioma is er niet geldig, de som van de hoeken van een driehoek is altijd minder dan 180 graden, er zijn geen vierkanten of rechthoeken en er zijn geen gelijkvormige niet-congruente figuren. In het model van Poincaré is het gehele niet-euclidische vlak afgebeeld binnen een cirkelschijf Ω (de rand van Ω doet niet mee). De lijnen zijn de cirkelbogen binnen Ω die loodrecht op Ω staan, inclusief de middellijnen van Ω. In dit model worden niet-euclidische hoeken 'op ware grootte' afgebeeld, maar de niet-euclidische afstanden worden naar de rand toe steeds meer verkleind. Vergelijk het maar met de bekende Mercatorprojectie uit de aardrijkskunde, waar gebieden rond de evenaar vrijwel onvervormd worden afgebeeld, maar waarbij de vervormingen naar de polen toe steeds groter wordt.

Coxeters tekening was zoiets als Figuur 2: het Poincaré-model met daarin een patroon van cirkelbogen (dat wil dus zeggen niet-euclidische lijnen) die tezamen een betegeling van het vlak vormen met niet-euclidische driehoeken. Het steigerwerk eromheen wordt gebruikt bij de constructie van de cirkelbogen: de punten zijn de middelpunten van de cirkelbogen, en twee punten zijn met elkaar door een lijn in het steigerwerk met elkaar verbonden als de betreffende cirkelbogen elkaar snijden. Na voltooiing van de constructie kun je het steigerwerk weer verwijderen, maar voor Escher was het prettig dat dit niet was gebeurd: zo kon hij de constructie ervan goed bestuderen.

Omdat hoeken tussen lijnen op ware grootte worden afgebeeld, kunnen we de hoeken van de driehoeken uit de betegeling direct uit de figuur aflezen: allemaal zijn ze 45 graden. De som van de hoeken van zo'n driehoek is dus in dit geval inderdaad minder dan 180 graden, namelijk 135 graden. U ziet ook onmiddellijk dat het parallellenaxioma niet geldt: er zijn situaties waarin twee lijnen een derde lijn snijden en waarbij de som van de hoeken aan een kant van de snijlijn minder is dan 180 graden, maar waarbij die twee lijnen elkaar toch niet snijden. Ook alle andere merkwaardige eigenschappen van de niet-euclidische meetkunde laten zich aan de hand van Figuur 2 direct illustreren.

Coxeter gebruikte de Poincaré-illustratie in zijn artikel om er allerlei stellingen over symmetrieën en betegelingen in het niet-euclidische vlak mee te illustreren. Escher zag in Coxeters tekening echter geen niet-euclidisch vlak – hij wist helemaal niet wat dat was, en hij kon Coxeters explicaties erover ook niet volgen – maar een geheel nieuwe oplossing van een probleem waar hij al jaren mee worstelde. Dat probleem was: hoe kun je een vlakvulling maken waarin gelijkvormige figuurtjes steeds maar kleiner worden, terwijl alles toch binnen een begrensde figuur besloten blijft. In een filosofisch jasje gegoten: hoe breng je het oneindige op een harmonieuze wijze binnen handbereik?

In Coxeters prent zag Escher een fraaie oplossing in beeld gebracht: een cirkelschijf met daarbinnen 'gelijkvormige driehoeken' die naar buiten toe steeds kleiner worden, waarbij de randcirkel als een soort limietfiguur optreedt. Onmiddellijk toog hij aan de slag om Coxeters driehoeken te vervormen tot herkenbare dierenfiguren zoals hij dat ook al zo vaak met gewone regelmatige vlakvullingen had gedaan. Met wat extra hulp van Coxeter kreeg hij de constructiegeheimen van zulke betegelingen al snel volledig onder de knie.

Eschers eerste poging was *Cirkellimiet* I, een houtsnede met primitief getekende zwarte en witte vissen waarin Coxeters oorspronkelijke tekening nog duidelijk herkenbaar is. In *Cirkellimiet* II (zie Figuur 3) heeft Escher de motieven tot kruisen vervormd, en is het aantal kleuren drie geworden: zwart, wit en rood (hier als grijs afgebeeld). Eschers meesterwerk is echter *Cirkellimiet* III. In Eschers eigen woorden: '[Hierin] zijn de gebreken [van *Cirkellimiet* I] grotendeels verholpen. Er zijn nu alleen nog maar series "met doorgaand verkeer": alle vissen van dezelfde serie hebben ook dezelfde kleur en zwemmen elkaar, kop aan staart, achterna langs een cirkelvormige baan van rand tot rand. Hoe dichter zij het centrum naderen, hoe groter zij worden. Vier kleuren zijn nodig opdat elke rij in haar geheel met de omgeving contrasteert. Geen enkele component van al deze reeksen die van oneindig ver als vuurpijlen loodrecht uit de limiet opstijgen en er weer in teloorgaan, bereikt de grenslijn ooit.'

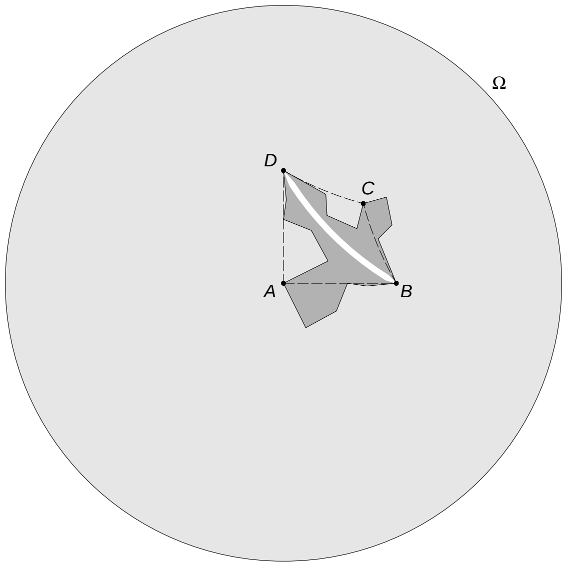
De rijen vissen waar Escher het over heeft, worden extra benadrukt door de witte streep die over hun rug loopt. Samen vormen die witte strepen een pa-

Figuur 3: Een gestileerde versie van *Cirkellimiet* II

troon van cirkels die het vlak verdelen in driehoeken en vierhoeken. Binnen elke driehoek komen drie linkervinnen bij elkaar, en binnen elke vierhoek vier rechtervinnen. De vissen zijn dus niet symmetrisch! Toch is er met die vlakvulling iets vreemds aan de hand. De witte strepen snijden elkaar onder hoeken van 60 graden, en de driehoeken hebben dus blijkbaar drie hoeken van 60 graden. Hun hoekensom is dan 180 graden. Maar in de niet-euclidische meetkunde is dat onmogelijk! Daar moet de hoekensom minder dan 180 graden zijn.

De eerste die dat opmerkte, was Coxeter (zie [Coxeter 1979]). Hij kwam ook met een verklaring: de witte cirkelbogen zijn *geen* rechte lijnen in de zin van de niet-euclidische meetkunde, maar zogenaamde equidistantielijnen, die vergelijkbaar zijn met de breedtecirkels op het boloppervlak. Dat zijn immers ook geen 'rechte lijnen', dat wil zeggen grote cirkels, in de bolmeetkunde, maar lijnen die punten verbinden met een vaste afstand tot een 'rechte lijn', in dit geval de equator. Coxeter kon uit de aard van de betegeling ook afleiden dat de witte cirkelbogen de randcirkel allemaal onder dezelfde hoek ω moeten snijden, en dat ω geen 90 graden is, maar iets minder dan 80 graden. Om precies te zijn: $\cos\omega = \frac{1}{2}(\sqrt[4]{2} - 1/\sqrt[4]{2})$ ([Coxeter 1979] en [Coxeter 1996-97]).

Maar dat maakte de raadsels er niet minder op. Hoe kon Escher, die niets van niet-euclidische meetkunde wist en wilde weten, zo'n subtiele vlakvulling met equidistantielijnen ontwerpen? Ook dat raadsel bracht Coxeter dicht bij een oplossing door het onderliggende patroon van cirkelbogen die de randcirkel wel degelijk onder hoeken van 90 graden snijden, aan de oppervlakte te brengen.

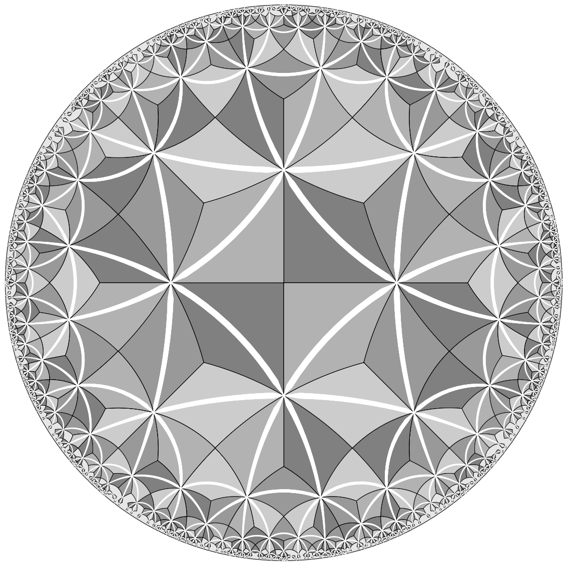


Figuur 4: Een tot vis vervormde vlieger

Escher had dat patroon op listige wijze onzichtbaar gemaakt. Wat Coxeter nergens expliciet opmerkt, is het geheim van de precieze vissenvorm, en de subtiele, typisch Escheriaanse wijze waarop die vorm uit een simpel vlakvullingmotief kan zijn afgeleid. Ik wil daar hier een bescheiden, plausibel vermoeden over uitspreken.

In Figuur 4 ziet u zo'n vissencontour, met daaronder in stippellijnen een vlieger $ABCD$ met hoeken van 90, 60, 120 en 60 graden. Die vlieger is samengesteld uit niet-euclidische rechte lijnen: twee delen van onderling loodrechte middellijnen van de randcirkel Ω en twee delen van cirkelbogen die Ω loodrecht snijden en die elkaar snijden onder een hoek van 120 graden. De congruente lijnstukken AB en AD heeft Escher vervormd tot congruente contourdelen van de rechterhelft van de vis, en de congruente cirkelbogen CB en CD zijn congruente contourdelen van de linkerhelft van de vis geworden. De rest (de ogen en de strepen op de vinnen en de staart) is slechts opvulling en verfraaiing.

Figuur 5 laat zien hoe *Cirkellimiet* III eruit zou zien met vliegers in plaats van vissen. Saaier, maar heel helder van structuur. De witte cirkelbogen heb ik laten staan, maar nu hebben ze geen andere functie meer dan het benadrukken van monochromatische kleurenrijen. Je ziet dat er nu ook weer spiegelsymmetrieën zijn; door Eschers vervormingstruc waren die verdwenen. Je kunt de vliegers in groepjes van vier samennemen tot regelmatige achthoeken met hoeken van 120 graden, zoals in de linkerhelft van Figuur 6. Dat is weer een andere betegeling van het niet-euclidische vlak. In elk hoekpunt komen drie

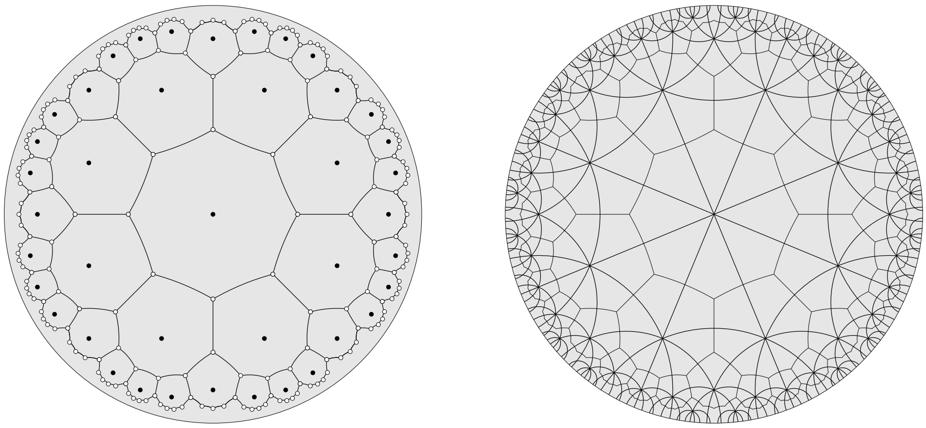


Figuur 5: Een versie met vliegers van *Cirkellimiet* III

achthoeken samen. De *duale* betegeling ontstaat door de middelpunten van de achthoeken te nemen, en die door een lijn te verbinden wanneer de bijbehorende achthoeken een zijde gemeen hebben. In de rechterhelft van Figuur 6 is te zien hoe dat gaat. De resulterende betegeling is er een met regelmatige driehoeken, acht rond elk hoekpunt. En u raadt het al, dat is niets anders dan de betegeling van Figuur 2.

Het is heel waarschijnlijk dat Escher inderdaad begonnen is met de betegeling van Figuur 2 en daar de duale betegeling van achthoeken bij heeft geconstrueerd. Diezelfde betegelingen liggen namelijk ten grondslag aan de houtsnede *Cirkellimiet* II, zoals ook Coxeter heeft opgemerkt [Coxeter 1981, p. 207]. U zult weinig moeite hebben om aan de hand van de Figuren 3 en 6 de structurele overeenkomst tussen de achthoekenbetegeling en *Cirkellimiet* II te achterhalen. Escher heeft eenvoudig de achthoeken tot brede kruisen vervormd, en de gehele tekening over $22\frac{1}{2}$ graad gedraaid. De binnenste, smalle kruisen laten met elkaar nog een rudiment van de duale betegeling van driehoeken met hoeken van 45 graden zien.

De volgende stap in de constructie van *Cirkellimiet* III was waarschijnlijk dat Escher de achthoekenbetegeling in vliegers onderverdeeld heeft, vier vliegers per achthoek, en gezocht heeft naar een kleuringswijze met zoveel mogelijk symmetrie. Vier kleuren bleken nodig te zijn om elke vlieger met zijn buren te laten contrasteren. Escher ontdekte dat er bij zo'n kleuring vanzelf 'stromen' ontstonden van gelijkgekleurde vliegers. Het vervormen van een vlieger tot



Figuur 6: Betegeling met regelmatige achthoeken (links) en dezelfde betegeling (rechts) met daarop gesuperponeerd de duale betegeling

een vissenfiguur was voor Escher daarna een kolfje naar zijn hand. Dat zo'n vis asymmetrisch moest worden, zal hij met plezier hebben geconstateerd; dat maakte de prent alleen maar intrigerender. Maar de aardigste vondst moet toch de ontdekking zijn geweest dat de vissen van een ruggengraat konden worden voorzien die uit doorlopende cirkelbogen bestaat. Juist daarmee kon hij zijn oorspronkelijke schema volledig aan het oog onttrekken, en alle oppervlakkige beschouwers zand in de ogen strooien. Zelfs Bruno Ernst, die in zijn boek *De Toverspiegel van M.C. Escher* op bladzijde 109 over *Cirkellimiet* III opmerkt: 'Het netwerk daarvan is een vrije variatie op het oorspronkelijke netwerk. Behalve cirkelbogen die loodrecht op de omtrek staan (zoals het behoort) zijn er ook cirkelbogen die dat niet doen.' Van 'vrije variatie' is in *Cirkellimiet* III echter geen sprake: de gehele prent is met een volmaakte mathematische precisie geconstrueerd; je kunt hem met een computertekenprogramma waarin je de bijbehorende niet-euclidische rotaties inbouwt, volledig reproduceren. Er is in *Cirkellimiet* III ook geen enkele cirkelboog meer te zien die loodrecht op de omtrek staat. Alle zichtbare bogen snijden de omtrek onder dezelfde hoek $\omega \approx 80^\circ$.

Eschers cirkellimietprenten zijn daarom zo interessant, omdat je er op twee manieren naar kunt kijken. Je kunt ze, net als Escher deed, zien als euclidische cirkelprenten waarin 'gelijkvormige' figuren naar de randcirkel Ω toe steeds kleiner worden. Maar die gelijkvormigheid is eigenlijk geen gelijkvormigheid in de strikte, euclidische betekenis van het woord: rechte lijnen worden tot cirkelbogen vervormd met een steeds veranderende kromtestraal. Toch blijven we die figuren wel als 'gelijkvormig' herkennen. De meetkundige transformaties die erachter zitten, zijn eigenlijk inversies in cirkels en samenstellingen daarvan.

Veel duidelijker wordt de zaak als we er anders tegenaan kijken. Als we, met

Poincaré, de loodcirkels en middellijnen van Ω opvatten als 'rechte lijnen' in een nieuw soort meetkunde, en de inversies in die 'rechte lijnen' opvatten als spiegelingen. In Figuur 2 zie je dat zulke spiegelingen de witte en zwarte driehoeken verwisselen, en in Figuur 5 kun je zien hoe zulke spiegelingen telkens twee kleuren verwisselen en de andere twee onveranderd laten. Via opeenvolgingen van spiegelingen kun je elke vlieger in elke andere vlieger transformeren, en het is dus geen gek idee om je in te denken dat al die vliegers in deze nieuwe meetkunde onderling *congruent* (en dus niet gelijkvormig!) moeten zijn.

De opeenvolging van twee spiegelingen in assen die elkaar onder een hoek α snijden, geeft een rotatie over een hoek $2 \times \alpha$, net zoals in de gewone, euclidische meetkunde. In de betegelingen die we hebben afgebeeld, is dit ook duidelijk te zien. Door de asymmetrische vissenvorm heeft Escher in *Cirkellimiet* III alle spiegelingen verwijderd, en alleen de rotaties in stand gehouden. De rotatiecentra bevinden zich in de tips van de rechtervinnen (90 graden) en de linkervinnen (120 graden), en in de punten waar drie koppen en drie staarten samenkomen (eveneens 120 graden). Diezelfde rotaties zijn ook in *Cirkellimiet* II terug te vinden, maar daar zorgt de symmetrie van de kruisvorm dat sommige spiegelingen nog wel aanwezig zijn.

In de euclidische meetkunde is de opeenvolging van twee spiegelingen in assen die elkaar niet snijden een translatie, en in de niet-euclische meetkunde is het al niet anders. In Figuur 1 zwemmen de vissen in 'translatiestromen' achter elkaar aan, en aan de hand van Figuur 5 kunt u gemakkelijk uitvinden hoe zo'n translatie tot stand komt door spiegelingen in twee assen die elkaar niet snijden, achter elkaar te schakelen.

Zo zouden we nog lang door kunnen gaan. Eigenlijk ken ik geen betere introductie tot de niet-euclidische meetkunde dan via Eschers cirkellimietprenten. Ze vormen een rijke bron van voorbeelden en illustratiemateriaal, die ook voor niet-wiskundigen goed toegankelijk is. Het is alleen jammer dat de wiskundewereld er destijds niet voldoende in geslaagd is Escher ervan te overtuigen hoezeer hij daarmee deel is gaan uitmaken van onze gemeenschap, en hoe goed we zijn prenten kunnen gebruiken om ook aan leken uit te leggen waar het in ons vak nu eigenlijk om draait.

7. Vermoedens als uitdagingen

We keren terug naar ons algemene thema: de rol van vermoedens in de wiskunde. Zoals gezegd, men zou de geschiedenis van de wiskunde kunnen beschrijven als een geschiedenis van bewezen en onbewezen vermoedens. Elke stelling zonder bewijs is een vermoeden; zodra er een bewijs is, wordt het vermoeden een stelling. Toch is die visie op de wiskunde natuurlijk nog wat te beperkt. Stellingen en vermoedens zijn slechts kristallisatiepunten in het wiskundig onderzoek. Vermoedens zijn bakens waarop het onderzoek zich richten kan. Terreinen die volledig in kaart gebracht zijn, tellen geen onbewezen vermoedens meer. Maar zulke terreinen zijn er in de wiskunde slechts weinig. Vrijwel in elk gebied zijn er nog witte plekken op de kaart te vinden. Dat kunnen plekken zijn waar niemand komt omdat niemand ze op dit moment nog interessant vindt, of ondoordringbare gebieden waar juist al heel veel bezoekers tevergeefs naar toegangspoorten hebben gezocht. Die laatste zijn dan meestal ook de plaatsen waar beroemde onbewezen vermoedens het landschap markeren. De onbewezen vermoedens die in deze vacantiecursus ter sprake zullen worden gebracht, behoren vrijwel allemaal tot die laatste categorie. Het zijn vermoedens met een rijke historie, vermoedens die met verschillende takken van de wiskunde verbonden zijn en die weerstand hebben geboden aan de meest uiteenlopende aanvallen van bekwame wiskundigen. Die vermoedens behoren tot de grote uitdagingen voor de wiskunde van de volgende eeuw. En stuk voor stuk zullen ze degenen die ze weet te bedwingen wereldroem bezorgen – in elk geval binnen de wereld van de wiskunde.

LITERATUUR:

Over het $3n+1$ vermoeden:

FRITS BEUKERS, *Getaltheorie voor Beginners*, Utrecht, Epsilon Uitgaven, 1999.
STAN WAGON, The Collatz Problem, *The Mathematical Intelligencer* **7**-1, 1985, 72-76.

Over de Laatste Stelling van Fermat:

SIMON SINGH, *Het laatste raadsel van Fermat*, Amsterdam, De Arbeiderspers, 1997.

Over Eschers Cirkellimiet-*prenten*

H.S.M. COXETER, The non-Euclidean symmetry of Escher's picture 'Circle Limit III', *Leonardo* **12**, 1976, 19-26.
H.S.M. COXETER, Angels and Devils, in: DAVID A. KLARNER (ED.), *The Mathematical Gardner*, Belmont, California, Wadsworth International, 1981, 197-209.
H.S.M. COXETER, The Trigonometry of Escher's Woodcut 'Circle Limit III', *The Mathematical Intelligencer* **18**-4, 1996, 42-46, correctie in **19**-1, 1997.