

Jan van de Craats

**Waarom Daan en Sanne
niet kunnen rekenen**

Zwartboek rekenonderwijs

Homepage van de auteur:
<https://staff.fnwi.uva.nl/j.vandecraats/>

L^AT_EX-opmaak: Jan van de Craats

Prof. dr. J. van de Craats is emeritus hoogleraar wiskunde en maatschappij aan de Universiteit van Amsterdam. Hij was lid van de *Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen* van het ministerie van OCW (2007-2008).

Versie: 20 maart 2008

Copyright © 2008 Jan van de Craats

All rights reserved.
Alle rechten voorbehouden.

Inhoudsopgave

Voorwoord	1
Basisboek Rekenen	2
De lezing op de Panama-conferentie	2
De Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen	3
Het PPON-rapport	3
Maar internationaal doen we het toch goed?	4
De rekenrecepten van opa	6
1 Waaron Daan en Sanne niet kunnen rekenen	7
Eerst begrijpen, dan pas oefenen	8
Rijtjes sommen	10
Verschillende oplossingsstrategieën	11
Rekenen van opa	11
Kolomsgewijs optellen en aftrekken	13
Kolomsgewijs vermenigvuldigen	13
Happen in plaats van delen	14
Rekenen met breuken	15
2 De periodieke peiling van het onderwijsniveau	17
Onderzoeksopzet van PPON 2004	17
Standaarden en deskundigenpanels	18
Domeinen, onderwerpen en resultaten	18
Te moeilijk voor Daan en Sanne	26
Kolomsgewijs versus traditioneel rekenen	30
Hoofdrekenen en 'handig rekenen'	31
Happen of staartdelen – wat werkt beter?	32
Waarom kent niemand de PPON-resultaten?	33
3 Hoofdrekenen als struikelblok	35
Hoofdrekenopgaven uit het PPON-onderzoek	35
Handig?	38
Liever op papier	38

4	Domeinbeschrijving rekenen	41
	Soorten getallen	41
	Rekenen met natuurlijke getallen	42
	Rekenen met kommagetallen	43
	Rekenen met breuken	44
	Rekenen met negatieve getallen	45
	Machten	45
	Ontbinden in factoren, priemgetallen	46
	Wortels	46
	Referentieniveaus en kwaliteiten	47
5	Opa's rekenrecepten	49
	Optellen	49
	Aftrekken	50
	Vermenigvuldigen	50
	Delen	51
6	Reacties	53
	Boeken, artikelen, rapporten en websites	71

Voorwoord

Daan en Sanne zijn gemiddelde leerlingen van groep 8, de hoogste klas van de basisschool. Ze kunnen niet rekenen. Hoe we dat weten? Uit de media bijvoorbeeld. Daar is de laatste tijd breed uitgemeten dat scholieren en studenten grote moeite met rekenen hebben. Maar het is ook objectief vastgesteld in een groot-schalig statistisch onderzoek dat al in 2004 op de Nederlandse basisscholen is gehouden. Het gaat hier om PPON 2004, de door het Cito in opdracht van het Ministerie van OCW uitgevoerde *Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau* voor rekenen en wiskunde. Daan en Sanne kunnen, zo blijkt uit dat onderzoek, zelfs de eenvoudigste rekensommen niet maken.

De verhalen in de media zijn helaas maar al te waar. Wie het niet gelooft, moet maar eens kijken op de bladzijden 26-30 van dit boek. Daar staan een stuk of vijftig voorbeeldopgaven. Allemaal komen ze uit het PPON-onderzoek en ze hebben gemeen dat de doorsneeleerling van groep 8 ze niet kan maken. Onvoorstelbaar, maar waar. Het gaat dan om sommen als:

- *Pieter is met de auto op vakantie geweest. Aan het begin stond de kilometerstand op 0038796,00, aan het eind op 0040372,00. Hoeveel kilometer heeft Pieter in de vakantie gereden?*
- $99 \times 99 = \dots$
- *Wilma en haar twee zussen verdelen € 8,85. Hoeveel krijgt ieder?*
- *Oma verdeelt $\frac{1}{2}$ liter vanillevla eerlijk over drie bakjes. Hoeveel vanillevla komt er in elk bakje?*
- *De Albo bank geeft $4\frac{1}{2}$ procent rente per jaar. Hoeveel rente levert een bedrag van € 100, – op in een jaar?*
- *Koen heeft autopech op de snelweg. Hij staat bij het bordje 36,4 km. Bij het bordje 37,0 km kan hij om hulp bellen. Hoeveel meter moet hij lopen tot het bordje 37,0 km?*

In dit boek laat ik zien hoe ernstig de situatie in feite is. Welke didactische blunders deze narigheid hebben veroorzaakt. Wat er mis is met het huidige lesmateriaal. Hoe het komt dat matige en zwakke leerlingen door de moderne methodes tot wanhoop worden gedreven. Waarom veel leerlingen al in groep 4 van de basisschool een geweldige hekel aan rekenen hebben. En hoe het komt dat zelfs de beste leerlingen op school niet meer leren hoe je vlot en foutloos getallen kunt optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Basisboek Rekenen

Maar laat ik eerst vertellen hoe ik, met een achtergrond in het hoger en voortgezet onderwijs, terecht ben gekomen in de wereld van het rekenonderwijs. Dat begon zo'n twee jaar geleden toen Pearson, de uitgever van het *Basisboek Wiskunde* (2005) dat ik samen met mijn ex-collega Rob Bosch geschreven heb, een probleem op het hbo signaleerde: studenten van exacte, technische en economische richtingen kunnen zelfs de eenvoudigste rekenopgaven niet meer maken. Wat vroeger vanzelfsprekende rekenvaardigheden waren, bleek nu een gapend vaardigheidsgat te zijn, met alle gevolgen van dien.

Op onze opmerking dat de eerste hoofdstukken van *Basisboek Wiskunde* alle vereiste rekenvaardigheden kort samenvat, en dat het dus voldoende was om de studenten daarnaar te verwijzen, kregen we te horen dat die hoofdstukken veel te beknopt waren: er was behoefte aan een boek dat volgens dezelfde didactische succesformule de volledige rekenstof behandelde. Rob Bosch, die in zijn reguliere KMA-onderwijs en in zijn bijlespraktijk ook ervaren had dat veel wiskunde-deficiënties uiteindelijk zijn terug te voeren tot een gebrek aan rekenvaardigheid, beschikte reeds over een uitgebreide opgavencollectie. Dat was de start van ons *Basisboek Rekenen* dat in januari 2007 van de persen rolde. Het is dus niet geschreven voor de basisschool, maar als bijspijkerboek voor het hbo. En – ik durf het haast niet te zeggen – ook voor de universiteit, en in het algemeen voor iedereen die weggezakte of ontbrekende rekenvaardigheden wil ophalen.

De lezing op de Panama-conferentie

Het toeval wilde dat ik eind 2006 gevraagd werd een lezing te houden tijdens de Panama-conferentie op 18 januari 2007. Dat is een conferentie voor pabodocenten en rekendidactici (Panama staat voor PAbO NAscholing Mathematische Activiteiten). Ik koos voor 'Mythen in de rekendidactiek', een lezing die veel stof deed opwaaien. De slides ervan kunnen nog op mijn homepage worden nagelezen. Die lezing heb ik kort daarna uitgewerkt tot een artikel *Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen* dat eerst alleen op mijn homepage stond, maar in juni

2007 ook gepubliceerd werd in het tijdschrift *Nieuw Archief voor Wiskunde*, en in november 2007 ook in het *Tijdschrift voor Remedial teaching*. In een licht gewijzigde vorm is het in dit boek opgenomen als hoofdstuk 1.

Pas bij de voorbereiding van mijn lezing ben ik me gaan verdiepen in de 'revolutie in het rekenonderwijs' (Treffers) die zich de afgelopen dertig jaar heeft voltrokken en die onder andere tot uiting komt in het huidige lesmateriaal voor rekenen op de basisschool en de pabo. In mijn *Daan-en-Sanne*-stuk heb ik mijn geschokte reactie daarop beschreven. 'Handig rekenen' 'kolomsgewijs rekenen', 'happen in plaats van staartdelen', het zijn allemaal concepten die ik niet anders kan kwalificeren dan als kolossale didactische blunders.

Dat ik in die opinie niet alleen sta, bewijzen de talrijke reacties op mijn stuk, onder andere van docenten primair onderwijs, interne begeleiders en remedial teachers; een bloemlezing daaruit heb in hoofdstuk 6 verzameld. Wat prominent uit de reacties op *Daan-en-Sanne* naar voren komt, is de klacht dat er in het primair onderwijs geen keuze meer is: alle leerboeken zijn opgezet volgens het *nieuwe rekenen*. Ook het rekenonderwijs op de pabo wordt er geheel door gedomineerd.

De Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen

Op 9 mei 2007 heeft de staatssecretaris van OCW, mevrouw Marja van Bijsterveldt, een *Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen* geïnstalleerd met als opdracht haar en haar collega-bewindslieden van OCW te adviseren over wat leerlingen op verschillende niveaus in hun schoolloopbaan moeten beheersen voor taal en rekenen. Als deskundige voor rekenen maakte ik deel uit van die Expertgroep. Op 23 januari 2008 presenteerde de Expertgroep haar eindrapport *Over de drempels met taal en rekenen*.

Ik was ook lid van de *Werkgroep rekenen en wiskunde* die de Expertgroep heeft samengesteld uit leden van de Expertgroep en externe deskundigen. Ten dienste van die werkgroep heb ik een aantal *discussiestukken* geschreven, onder andere een stuk *Rekenvaardigheden voor de basisschool* en een uitbreiding daarvan: de *Domeinbeschrijving rekenen*. Dat laatste stuk is in iets gewijzigde vorm als hoofdstuk 4 in dit boek opgenomen. Een ander discussiestuk, *Hoofdrekenen als struikelblok*, heeft als hoofdstuk 3 een plaats gekregen.

Het PPON-rapport

Op 22 mei 2007 was ik aanwezig bij de lezing *Prestaties gekelderd in realistisch rekenonderwijs* van dr. C.M. van Putten van de Leidse universiteit tijdens de NWO-manifestatie 'Bessensap'. Na afloop bleek dat we in veel opzichten op dezelfde

lijn zaten. Van Putten, die op mijn voorstel ook gevraagd werd lid te worden van de *Werkgroep rekenen en wiskunde* van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen, vroeg me eind augustus om mijn discussiestuk *Rekenvaardigheden op de basisschool* met het 'PPON 2004 rapport' te vergelijken.

Ik zag daar aanvankelijk nogal tegenop (het is een rapport van 240 bladzijden) maar toch heb ik er uiteindelijk een flink aantal dagen voor uitgetrokken. Dat bleek de moeite waard: de gedegen beschrijving van een voorbeeldig uitgevoerd statistisch onderzoek bood tal van nieuwe gezichtspunten. Maar bovenal bleek de collectie voorbeeldopgaven een goudmijn te zijn. Hieruit werd zonneklaar wat leerlingen nu werkelijk aan het eind van groep 8 van de basisschool presteren. Het bevestigde mijn somberste vermoedens: volstrekt vanzelfsprekende rekenopgaven bleken voor Daan en Sanne (gemiddelde leerlingen van groep 8) te moeilijk te zijn. Daan en Sanne kunnen inderdaad niet rekenen. Mijn bevindingen heb ik eerst weer gepresenteerd als een discussiestuk voor de Expertgroep. In een aangepaste en uitgebreide vorm is dat stuk opgenomen als hoofdstuk 2 in dit boek.

Ook bij de beraadslagingen in de *Werkgroep rekenen en wiskunde* van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen heeft het PPON-rapport een belangrijke rol gespeeld. Het rapport overtuigde uiteindelijk alle leden van de commissie van de ernst van de situatie. en veel van de resultaten van het PPON-rapport hebben hun weg gevonden naar het eindrapport van de Expertgroep. Het PPON-rapport zelf wordt besproken in een bijlage¹ van Egbert Harskamp bij dit eindrapport.

Maar internationaal doen we het toch goed?

In discussies over het peil van het Nederlandse rekenonderwijs komt altijd de vraag naar voren: 'Maar internationaal doen we het toch goed?' Daarbij wordt gedoeld op de periodieke onderzoeken TIMSS en PISA, waarbij Nederland steevast in de hoogste regionen eindigt. Natuurlijk is dat prachtig, maar wie zich hierdoor in slaap laat sussen, vergeet dat noch TIMSS, noch PISA ten doel hebben rekenvaardigheden te meten. TIMSS staat voor *Trends in International Mathematics and Science Studies*. Dit onderzoek meet vaardigheden in wiskunde en natuurwetenschappen van tweedeklassers in het voortgezet onderwijs. PISA staat voor *Programme for International Student Assessment* en richt zich op 15-jarigen. PISA meet naar eigen zeggen *mathematical literacy*, wiskundige geletterdheid, een nogal vaag begrip dat in de PISA-rapportages wordt omschreven als *'het vermogen van een individu om de rol die wiskunde speelt in de wereld, te kunnen identificeren en te begrijpen, het vermogen om gefundeerde beslissingen te nemen en om wiskunde*

¹E. Harskamp, *Reken-wiskunderesultaten van leerlingen aan het einde van de basisschool*, Advies ten behoeve van de werkgroep rekenen-wiskunde van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen, november 2007

te gebruiken op een wijze die tegemoet komt aan de behoeften van diens leven als een opbouwend, betrokken en beschouwend burger.’ Tsja, . . .

Wat vaak vergeten wordt bij een bespreking van TIMSS en PISA, is dat de opgaven die daarin als ‘rekenopgaven’ bestempeld worden, zeker geen representatieve afspiegeling vormen van het domein rekenen. Dit in tegenstelling tot het PPOON-onderzoek, dat wel degelijk het gehele terrein van rekenen op de basisschool in Nederland bestrijkt. Wat TIMSS en PISA precies meten, valt slechts indirect op te maken uit de opgaven die vrijgegeven zijn en die op het internet kunnen worden geraadpleegd. Als je dat doet, zie je dat het beslist onverantwoord is om uit goede prestaties bij TIMSS en PISA algemene conclusies te trekken over het peil van het Nederlandse wiskunde- of rekenonderwijs. Goed scoren op TIMSS en PISA betekent goed scoren op het soort opgaven dat in TIMSS en PISA getoetst wordt. Niets minder, maar ook niets meer. Wat verder opvalt bij de rekenopgaven van PISA, is dat ze nauw aansluiten bij de manier waarop in Nederland het rekenonderwijs is ingericht. Niet toevallig, omdat het Cito en het Freudenthal Instituut nauw betrokken zijn bij de constructie van de opgaven. Bij PISA speelt Nederland dus in zekere zin een thuiswedstrijd.

Een van de bijlagen van het eindrapport van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen bestaat uit een rapport over de TIMSS-resultaten door Pauline Vos². Voor een kritische bespreking van zowel TIMSS als PISA door Willem Smit verwijst ik naar <http://www.beteronderwijsnederland.nl/?q=node/1340>.

Liesbeth van der Plas geeft in hoofdstuk 4 van haar internet-boek *Minder bekende problemen van het Nederlandse wiskunde-onderwijs* een gedetailleerde analyse van alle vrijgegeven opgaven van PISA 2003 (haar boek kan worden gedownload op http://www.liesbethvanderplas.nl/_userdata/AAAonderwijs.pdf). Ook uit haar analyse blijkt zonneklaar dat de bewering dat 15-jarige Nederlandse kinderen (zeer) goed zouden zijn in wiskunde niet uit de PISA-resultaten volgt (zie de pagina’s 36 en 37 van haar boek).

Er valt overigens ook nog een andere kanttekening te maken bij de goede Nederlandse prestaties bij TIMSS en PISA. Uit een analyse van het Centraal Planbureau (zie <http://www.cpb.nl/nl/pub/cpbreeksen/bijzonder/69/>) blijkt dat die goede resultaten vooral worden veroorzaakt door het feit dat juist de zwakke Nederlandse leerlingen het bij die toetsen relatief goed doen. Voor getalenteerde leerlingen is het eerder andersom: in die groep hoort Nederland lang niet tot de top. Al in de jaren tot 2003 was dit het geval, maar het meest recente PISA-onderzoek (2006) toont een verdere verslechtering aan. Het algemene Nederlandse peil, zoals gemeten door PISA, is in de afgelopen jaren achteruit gegaan, en dat is vrijwel geheel te wijten aan een aanzienlijke daling van het peil van onze

²F.P. Vos, *Rekenen door Nederlandse tweedeklassers in internationaal perspectief (1982-2003): zijn de prestaties voor- of achteruit gegaan?* Rapport voor de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen, 2007

betere leerlingen. Een verontrustend signaal voor een land dat zich zo nadrukkelijk als kennisland wil profileren!

De rekenrecepten van opa

In hun lesmateriaal betitelen de moderne rekendidactici de traditionele rekenrecepten die iedereen vroeger op school leerde wel als het 'rekenen van opa'. Ze bedoelen dat niet als een compliment, maar ik ben het, als grootvader van vijf kleinkinderen, inmiddels als een geuzennaam gaan hanteren. Als reactie op mijn stukken in het Nieuw Archief voor Wiskunde en het Tijdschrift voor Remedial Teaching kreeg ik van verschillende kanten de vraag: 'U zegt dat er voor alle rekenbewerkingen eenvoudige, altijd werken rekenrecepten bestaan. Kunt u me zeggen waar ik die vinden kan?' Blijkbaar is het niet meer algemeen bekend dat er überhaupt van die recepten zijn. Blijkbaar denken tegenwoordig veel mensen dat je, om te kunnen rekenen, over een enorm repertoire aan kunstjes en oefjes moet beschikken (en dat die oefjes steeds ingewikkelder worden naarmate de getallen groter worden). In werkelijkheid zijn de rekenrecepten van opa net zo goed toepasbaar op grote als op kleine getallen. Het gaat op precies dezelfde manier. Rekenen met getallen van twintig cijfers (wat de zakrekenmachine niet kan), levert met pen en papier geen enkel probleem op als je maar netjes en nauwkeurig werkt.

Als service aan de lezer heb ik de rekenrecepten van opa hier opgenomen als hoofdstuk 5. Het zijn er twaalf, en bij elkaar beslaan ze nog geen vier bladzijden. Ze zijn overgenomen uit het slot van ons *Basisboek Rekenen*. Daarin worden die recepten natuurlijk in de eerdere hoofdstukken uitgebreid behandeld, mede aan de hand van een grote collectie oefenopgaven. Het is met enige schroom dat ik ze hier geef. Tot een paar jaar geleden dacht ik dat vrijwel iedereen die van de basisschool komt, ze beheerst (zoals dat vroeger ook het geval was). Ik hoop dat dit boek ertoe zal bijdragen dat die situatie weer snel terugkomt, en dat Daan en Sanne, en hun meesters en juffen, weer goede rekenaars worden.

Oosterhout NB, maart 2008

1. Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen

Wie als kritische buitenstaander de moeite neemt het lesmateriaal voor rekenen op de de basisschool en de pabo door te kijken, moet al snel vaststellen dat het geen wonder is dat Daan en Sanne (en hun meesters en juffen) niet kunnen rekenen. Naast prachtige plaatjes, leuke rekencontexten, mooie voorbeelden en uitdagende puzzeltjes, vertonen die boeken en werkschriften namelijk ook ernstige didactische gebreken. Vooral bij middelmatige en zwakke leerlingen moeten die wel tot grote problemen leiden.

Kort samengevat luiden die manco's als volgt: de leerlingen krijgen omslachtige rekenmethodes voorgezet, de presentatie is chaotisch, er is veel te weinig aandacht voor systematisch oefenen en de kinderen worden in verwarring gebracht doordat er bij elk type rekenbewerking allerlei methodes door en naast elkaar worden gepresenteerd. Soms zijn dat alleen maar foefjes waarmee je af en toe bepaalde berekeningen kunt verkorten, maar die geen algemene geldigheid hebben. Ze worden in het moderne jargon 'handig rekenen' genoemd. Voorbeeld: 24×125 reken je uit door 12×250 te nemen of 6×500 , en dat kun je uit je hoofd. Leuk en slim, maar bij 26×127 of 29×123 werkt het niet meer.

Het is niet moeilijk te bedenken dat zwakke leerlingen door die overvloed aan handigheidjes al snel de kluts kwijtraken: iedere som wordt op die manier immers een totaal nieuw probleem waarvoor in gedachten een heel repertoire aan trucjes afgelopen moet worden. En natuurlijk kiezen leerlingen dan vaak niet de handigste methode. Of ze bedenken zelf iets, dat dan niet zelden ook nog fout is. Zie voor meer voorbeelden van 'handig rekenen' figuur 1.1, ontleend aan een didactiekhandleiding voor de pabo. Je kunt je overigens ook nog afvragen welke naarling beginnende leerlingen van groep 4 en groep 5 zulke sommen uit het hoofd laat uitrekenen, en welk doel daarmee wordt gediend. In hoofdstuk 3 kom ik hierop terug.

Andere rekenmethodes in de moderne boekjes werken wél altijd, maar ze zijn zo onhandig en omslachtig, dat rekenfouten haast onvermijdelijk zijn. Dat geldt met name voor het zogenaamde 'kolomsgewijs rekenen' – ik zal later uitleggen wat daarmee wordt bedoeld, en voor de 'hapmethodes' die de staartdeling hebben verdrongen. Nu al zeg ik dat ik het een schandaal vind dat dit soort rekenen in het lesmateriaal terecht is gekomen. Naar mijn mening behoren 'kolomsgewijs

1 Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen

Getalgevoel: flexibel structureren

Weet je nog?

► **verdubbelen** $\begin{matrix} 2 \times 13 \\ 4 \times 13 \\ 8 \times 13 \\ 16 \times 13 = 208 \end{matrix}$

ombouwen $\begin{matrix} 9 \times 70 \\ 18 \times 35 = 630 \end{matrix}$

met een rond getal $\begin{matrix} 20 \times 17 \\ 19 \times 17 = 323 \end{matrix}$

splitzen $\begin{matrix} 10 \times 24 \\ 2 \times 24 \\ 12 \times 24 = 288 \end{matrix}$

Reken uit op jouw manier.

$16 \times 13 =$	$18 \times 35 =$	$19 \times 17 =$	$12 \times 24 =$
$14 \times 25 =$	$12 \times 13 =$	$16 \times 31 =$	$11 \times 16 =$
$8 \times 22 =$	$16 \times 21 =$	$12 \times 45 =$	$15 \times 19 =$

Uit: *Rekenrijk*, deel 5b, blz. 104

Hier worden vier verschillende aanpakken van vermenigvuldigopgaven getoond in de denkwolkjes. Elk van de opgaven vraagt in feite om een eigen aanpak. Maak alle opgaven en kies bewust voor een aanpak. Weet je zeker dat je de handigste manier hebt gekozen?

Hier zie je vier verschillende rekenaanpakken die je bij het hoofdrekenen goede diensten kunnen bewijzen. Maar je moet ook handig kiezen voor de meest geschikte aanpak in een gegeven situatie.

16×13 . Vier keer verdubbelen: (13), (2x) 26, (4x) 52, (8x) 104, (16 x) 208.

14×25 (ombouwen) = $7 \times 50 = 350$

8×22 (splitzen) = $160 + 16 = 176$ (of drie keer verdubbelen)

$18 \times 35 = 9 \times 70 = 630$

$12 \times 13 = 130 + 26 = 156$

$19 \times 17 = 20 \times 17 - 17 = 323$

$16 \times 31 = (62, 124, 248), 496$ (of $30 \times 16 + 1 \times 16$)

$12 \times 45 = 6 \times 90 = 540$

$12 \times 24 = 2 \times (12 \times 12) = 288$ (of $240 + 48$)

$11 \times 16 = 160 + 16 = 176$

$15 \times 19 = 300 - 15 = 285$.

Figuur 1.1: Handig rekenen ([3], blz. 73 en blz. 197). Boven de opgaven, onder de uitwerkingen.

rekenen' en 'happen in plaats van staartdelen', naast de drie didactische mythen die ik eerst zal behandelen, tot de hoofdoorzaken van het gebrek aan rekenvaardigheid bij huidige schooljeugd.

Eerst begrijpen, dan pas oefenen

Veel van de narigheid is terug te voeren op drie hardnekkige mythen in de rekendidactiek. Je vindt ze in allerlei vormen terug in het rekenmateriaal en in de moderne rekendidactische vakliteratuur. Ik behandel ze stuk voor stuk.

MYTHE 1: Eerst begrijpen, dan pas oefenen.

Deze mythe kent ook allerlei andere formuleringen. Bijvoorbeeld: *het inoefenen van een vaardigheid kan pas met vrucht gebeuren nadat inzicht in die vaardigheid is verkregen*. Of: *let op: leer geen onbegrepen regels uit je hoofd!*. Of: *oefenen zonder inzicht geeft kennis zonder uitzicht*.

Het klinkt allemaal heel aannemelijk, vooral als het op rijm gesteld is, maar het is kletskoek. Leren rekenen gaat namelijk heel anders. Het is eerder het omgekeerde: juist tijdens het oefenen ontstaat geleidelijk steeds meer begrip. Eigenlijk is het de oude wijsheid *oefening baart kunst*, waarbij kunst hier niet alleen rekenvaardigheid, maar ook begrip omvat. Zeker wanneer het oefenen systematisch opgezet is en wordt ingebed in verdiepingsronden zoals hieronder wordt beschreven.

Hoe verlopen succesvolle leerprocessen?

Succesvolle leerprocessen in het rekenonderwijs doorlopen de volgende fasen:

1. Oriëntering (context, voorbeelden)
2. Oefenen, eerst makkelijk, dan iets moeilijker. Geen contexten!
3. Verdieping met contexten en voorbeelden
4. Meer oefeningen, zonder contexten
5. Verdere verdieping, voorbeelden, contexten, ...

waarbij de stappen 4 en 5 naar behoefte herhaald kunnen worden. In stap 1 wordt aangehaakt bij datgene wat de leerling al weet en kent. Daarbij hoort een uitleg van de nieuwe methode in de allereenvoudigste gevallen, net genoeg om aan de eerste serie gemakkelijke oefenopgaven te kunnen beginnen. Voor bijles of bijspijkeronderwijs kan fase 1 kort gehouden worden of zelfs achterwege blijven; op school moet aan die fase daarentegen juist veel aandacht worden besteed met allerlei voorbeelden uit de dagelijkse rekenpraktijk. En het moet gezegd worden: juist op dit gebied bevatten de moderne methodes een schat aan aantrekkelijk en effectief materiaal.

Het oefenen in fase 2 zal daarna echter meestal met 'uitgeklede' rekenopgaven gebeuren omdat contexten in dat stadium de aandacht alleen maar afleiden van de essentie. Belangrijk is wel dat die oefenopgaven zeer eenvoudig beginnen en heel geleidelijk moeilijker worden. Zo blijven ook de zwakste leerlingen bij de les, en zo bouwen ook die leerlingen zelfvertrouwen en rekenvaardigheden op.

In fase 3, de eerste verdiepingsfase, kunnen de praktijkvoorbeelden en de contexten weer terugkeren. Je kijkt daarbij terug op wat je geleerd hebt en de docent legt opnieuw uit hoe en waarom de methode werkt. Dat valt dan in vruchtbare aarde, en zo neemt bij de leerlingen geleidelijk het begrip toe. Met de fasen 4 en 5 wordt de methode telkens verder uitgediept.

1 Waaron Daan en Sanne niet kunnen rekenen

Als docent moet je niet verbaasd zijn als er tijdens de oefeningen in de fasen 2 en 4 telkens andere leerlingen steeds weer dezelfde vraag stellen, vaak over iets dat je nog geen twee minuten eerder aan de hele klas hebt uitgelegd. Maar toen ging het blijkbaar over de hoofden heen; pas doordat leerlingen zelf sommen hebben geprobeerd, valt het kwartje. Elke goede docent kent zulke ervaringen.

Rijtes sommen

De tweede mythe gaat over de bekende, en in sommige kringen beruchte rijtes oefenopgaven.

MYTHE 2: Leerlingen vinden rijtes sommen vreselijk.

Ook deze mythe is wijdverbreid. De werkelijkheid is echter dat leerlingen graag rijtes sommen maken, mits die goed en systematisch zijn opgebouwd zodat ze het idee krijgen dat ze echt iets leren. Helaas wordt die mythe ook gevoed door veel van het moderne lesmateriaal. Daarin staan namelijk ook wel rijtes sommen, maar dan rijtes waarbij elke opgave weer een nieuwe moeilijkheid of truc bevat. Rijtes *gelijksortige* sommen waarbij je een vaardigheid door systematisch oefenen onder de knie krijgt, zijn helaas zeldzaam. Geen wonder dat leerlingen dan een hekel krijgen aan rekenen als ze de kans niet krijgen door oefenen zelfvertrouwen op te bouwen. Laat ze rustig tien sommen maken van hetzelfde type. Het zal steeds vlotter gaan, en als ze na afloop aan de hand van de antwoordenlijst constateren dat ze ze goed hebben, zijn ze buitengewoon tevreden – en terecht. Ze hebben weer wat geleerd!

Mythe 1 en mythe 2 hebben ertoe geleid dat systematisch oefenen de laatste tijd in het verdomhoekje terecht is gekomen. Er is wordt in de moderne rekendidactiek ook een aparte vakterm voor gebruikt: *cijferen*. Bij cijferen gaat het volgens de didactici alleen maar om het mechanisch ('mechanistisch' zeggen ze, en dat klinkt nog veel vreselijker!) uitvoeren van rekenrecepten. Daarbij werk je volgens hen niet met getallen, maar alleen maar begripsloos met losse cijfers, als een soort rekenmachine van vlees en bloed. De achterliggende gedachte is dat dit een minderwaardige activiteit is ('zo traint men aapjes'), en in elk geval niet nodig wanneer je maar goed begrijpt wat getallen en getallenrelaties 'eigenlijk' zijn. Dat leerlingen op die manier aantoonbaar niet leren rekenen, wordt achteloos terzijde geschoven. Ook is het betreurenswaardig dat leerlingen door de aparte term 'cijferen' ten onrechte de indruk krijgen dat er een tegenstelling zou bestaan tussen rekenen en cijferen. Als ik het voor het zeggen had, zou de term cijferen onmiddellijk uit het rekenonderwijs verdwijnen. Ook het vreselijke woord 'gecijferdheid' wordt alleen maar door rekendidactici gebruikt. Waarom niet gewoon spreken over rekenvaardigheid, want daar gaat het toch om?

Verschillende oplossingsstrategieën

De derde mythe is zonder twijfel de meest schadelijke. Ze luidt:

MYTHE 3: Het is goed als leerlingen meerdere oplossingsstrategieën leren hanteren en zelf kunnen kiezen welke methode ze bij een concrete opgave willen gebruiken.

Tientallen bladzijden in het moderne rekenlesmateriaal worden gevuld met handigheidjes, foefjes, trucs en hap-snapmethodes die alleen in heel speciale gevallen vlot werken. Voor de beginner en voor de gevorderde matige of zwakke leerling is dit 'handige rekenen' rampzalig.

In feite is er voor elk type rekenbewerking één beproefd, eenvoudig en altijd werkend rekenrecept. Alle aandacht moet gericht zijn op het stap-voor-stap aanleren van die standaardrecepten. Het zijn er precies twaalf, namelijk voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van achtereenvolgens natuurlijke getallen, kommagetallen (zo heten decimale breuken op school) en breuken. De recepten voor kommagetallen zijn daarbij in wezen gelijk aan de recepten voor natuurlijke getallen, dus eigenlijk gaat het maar om acht verschillende recepten. Al het verdere rekenonderwijs kan aan deze kapstok worden opgehangen. In hoofdstuk 5 worden die twaalf recepten overzichtelijk gepresenteerd.

Het is treurig dat leerlingen van de basisschool komen zonder dat zij deze twaalf (of eigenlijk dus maar acht) recepten door en door beheersen. Overigens, ook het voortgezet onderwijs treft blaam, want daar worden deze vaardigheden vaak niet bijgehouden of bijgespijkerd. Liever wordt ongestraft toegelaten dat leerlingen naar de rekenmachine grijpen om bijvoorbeeld 7×8 uit te rekenen (zie ook figuur 1.2).

Ik haast me er bij te zeggen dat er gelukkig ook steeds meer scholen in het voortgezet onderwijs zijn waarbij de wiskundesectie wél aandacht aan rekenen is gaan besteden. Daar wordt met kale rijtjes oefensommen gerepareerd wat er op de basisschool verwaarloosd is, net zoals op hbo en universiteit via extra wiskundecursussen ontbrekende havo- en vwo-stof bijgespijkerd wordt. Betreurenswaardig, maar helaas nog steeds noodzakelijk.

Rekenen van opa

Ik heb het hierboven al gehad over 'kolomsgewijs rekenen', een moderne didactiekterm waarmee een aantal 'nieuwe' methodes voor optellen, aftrekken en vermenigvuldigen wordt aangeduid. Dat de onhandigheden van die methodes in de rekenboekjes niet eens zo evident worden, komt doordat kolomsgewijs rekenen daar alleen maar uitgelegd wordt voor getallen van twee of hoogstens drie cijfers.

IK@NRC.NL

Optellen

Ik ontwikkel lesmateriaal voor de hoogste klassen van het voortgezet onderwijs, over de werking en de opbouw van computers.
Een commissie, bestaande uit vwo-docenten, heeft dit werk beoordeeld. In het beoordelingsrapport staat dat het lesboek op sommige plaatsen verduidelijking behoeft: 'Een voorbeeld is de uitleg van de werking van de optelschakeling. De auteur veronderstelt dat leerlingen in staat zijn om handmatig twee decimale getallen bij elkaar op te tellen. Dergelijke handvaardigheid kan heden ten dage niet meer van Tweede Fase-leerlingen worden verwacht.'

BEN BRUIDGOM

Figuur 1.2: Hoe diep kun je zinken? (NRC Handelsblad, 17 januari 2007)

Wanneer je laat zien hoe omslachtig zulke methodes worden bij grotere getallen, zeggen de verdedigers ervan dat de leerlingen dan maar op het 'traditionele' rekenen moeten overstappen. Of een rekenmachine moeten nemen. Maar dat staat lang niet altijd in de boekjes: daar wordt kolomsgewijs rekenen vaak als een volwaardige methode gepresenteerd. Vaak zelfs als beter ('inzichtelijker') dan de traditionele methode, die dan als het 'rekenen van opa' wordt afgedaan. Maar ook als het wél gepresenteerd wordt als opstapje naar 'cijferend rekenen', krijgt kolomsgewijs rekenen het volle licht van de schijnwerpers terwijl de traditionele methodes haast nergens meer fatsoenlijk worden uitgelegd. We lezen bijvoorbeeld in [1]: 'Omdat het cijferend rekenen binnen het basisschoolprogramma een minder grote aandacht zal krijgen en meer het *kolomsgewijs rekenen* centraal gaat staan, zal eerst dit onderdeel geoefend worden' (blz. 23). Vervolgens wordt het 'rekenen van opa' gemakshalve maar helemaal niet meer behandeld.

Bij het **kolomsgewijs optellen en aftrekken** werk je van *links naar rechts* en kijk je steeds naar de betekenis van de cijfers in de kolommen. Je laat de getallen in hun waarde.
Voor het aftrekken werk je met **tekorten** in de kolommen, als dat nodig is.

Voorbeeld 1

Kolomsgewijs optellen

$$\begin{array}{r} 386 \\ 673 \\ \hline 900 \\ 150 \\ \hline 9 \\ \hline 1059 \end{array} \quad \begin{array}{l} (= 300 + 600) \\ (= 80 + 70) \\ (= 6 + 3) \end{array}$$

Kolomsgewijs aftrekken

$$\begin{array}{r} 803 \\ 261 \\ \hline 600 \\ -60 \\ \hline 2 \\ \hline 542 \end{array} \quad \begin{array}{l} (= 800 - 200) \\ (0 - 60 = 60 \text{ tekort}) \\ (= 3 - 1) \end{array}$$

Figuur 1.3: Kolomsgewijs optellen en aftrekken ([4], blz. 72).

Kolomsgewijs optellen en aftrekken

Bij het kolomsgewijs optellen en aftrekken werk je van links naar rechts. Zie figuur 1.3, ontleend aan [4], een recent boek dat toekomstige pabo-studenten moet voorbereiden op de rekentoets. Bij het optellen van getallen van drie cijfers tel je dus eerst de hondertallen, dan de tientallen en dan de eenheden op. Natuurlijk is dat niet fout, maar het is wel ontzettend onhandig bij grotere aantallen en grotere getallen (zie figuur 1.5 op bladzijde 14, linkerkolom).

Werkelijk van de zotte is kolomsgewijs aftrekken (figuur 1.3, rechts), want daar moet je dan eigenlijk al met negatieve getallen gaan rekenen ('tekort'). Let wel, dit wordt thans op de basisscholen gedaan met kinderen die nog helemaal nooit eerder met aftreksommen te maken hebben gehad! Ook daar toont een simpel voorbeeld met iets grotere getallen de absurditeit van de 'methode' afdoende aan (figuur 1.5, midden).

Kolomsgewijs vermenigvuldigen

Maar het kan nog erger: kolomsgewijs vermenigvuldigen (zie figuur 1.4). In het gegeven voorbeeld wordt de optelling gemakshalve maar even 'op de manier van opa' gedaan. Hoe het gaat als je het wél kolomsgewijs doet, laat figuur 1.5 (rechts) zien; ik moet eerlijk bekennen dat ook ik daarbij de beker niet tot de bodem geleegd heb. Eigenlijk hadden er aan het eind nog een paar 'kolomsgewijze tussenstappen' gezet moeten worden.

Voor het **kolomsgewijze vermenigvuldigen** ga je uit van de vier deelproducten van $(30 + 7) \times (30 + 8)$, beginnend met de grootste waarde (van links af). Daarna tel je weer op. Dit kan ook van rechts naar links.

Van links naar rechts	Van rechts naar links
$\begin{array}{r} 38 \\ \underline{37} \times \\ 900 \quad (30 \times 30) \\ 240 \quad (30 \times 8) \\ 210 \quad (7 \times 30) \\ \underline{56} + \quad (7 \times 8) \\ 1406 \end{array}$	$\begin{array}{r} 38 \\ \underline{37} \times \\ 56 \quad (7 \times 8) \\ 210 \quad (7 \times 30) \\ 240 \quad (30 \times 8) \\ \underline{900} \times \quad (30 \times 30) \\ 1406 \end{array}$

Figuur 1.4: Kolomsgewijs vermenigvuldigen ([4], blz. 74).

1 Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen

78,12	413,92		345
13,34	376,75	–	729
142,57	100,00		210000
92,63	60,00	tekort	28000
104,89	3,00	tekort	3500
+ 200,00	0,20		6000
210,00	0,03	tekort	800
19,00	40,00		100
2,30	3,00	tekort	2700
0,25	0,20		360
+ 400,00	0,03	tekort	45
20,00			200000
11,00	37,00		30000
0,50	0,20		19000
0,05	0,03	tekort	2400
+ 431,55	37,20		100
	0,03	tekort	5
	37,17		251505

Figuur 1.5: Kolomsgewijs optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met iets grotere getallen. Bij het optellen en aftrekken kun je bijvoorbeeld aan geldbedragen denken als je een zinvolle context zoekt.

Happen in plaats van delen

Het is al vaak in de media gezegd: de kinderen weten niet meer wat een staartdeling is. Inderdaad krijgt die op school tegenwoordig maar weinig, of zelfs helemaal geen aandacht. In plaats daarvan wordt de ‘hapmethode’ gepropageerd. Die komt er eigenlijk op neer dat de leerling maar wat doet: telkens happen nemen van het deeltal totdat er een rest overblijft die kleiner is dan de deler. Figuur 1.6 en figuur 1.7 (bladzijde 16) laten er voorbeelden van zien. Gelukkig worden daar de tussenresultaten niet met ‘kolomsgewijs aftrekken’ berekend. Je moet er niet aan denken dat dit wel zou gebeuren.

Ook bij de hapmethode is het argument weer dat leerlingen dan zouden begrijpen wat ze doen, terwijl dat bij de staartdeling niet het geval zou zijn. Of dat werkelijk waar is, is echter nooit onderzocht. Erger is natuurlijk dat de hapmethode weer uitnodigt tot onhandig en omslachtig rekenen, juist omdat het geen systematische methode is. Natuurlijk leidt dat dan ook tot meer fouten. Onderzoek van dr. C.M. van Putten en drs. M. Hickendorff van de Leidse universiteit heeft inderdaad aangetoond dat leerlingen van groep 8 die een hapmethode gebruiken, significant meer fouten maken dan leerlingen die werken met de traditionele staartdeling. Zelfs als ze alleen maar delingen met kleine getallen uitvoeren (deeltal hoogstens vier cijfers, deler hoogstens twee cijfers).

Delen door herhaald aftrekken

$ \begin{array}{r} 431 : 12 \\ \underline{120} \\ 311 \\ \underline{120} \\ 191 \\ \underline{120} \\ 71 \\ \underline{60} \\ 11 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 431 : 12 \\ \underline{360} \\ 71 \\ \underline{60} \\ 11 \end{array} $
10×12 10×12 10×12 5×12 $35 \times 12, \text{ rest } 11$	30×12 5×12 $35 \times 12, \text{ rest } 11$

Figuur 1.6: De ‘hapmethode’ voor delen ([4], blz. 76).

Wat is er eigenlijk mis met de staartdeling? Het is een overzichtelijke, efficiënte rekenmethode die haar waarde in vele generaties rekenonderwijs bewezen heeft. In *Basisboek Rekenen* kun je op de bladzijden 42 en 43 aan de hand van een erfenisverdeling zien waarom de staartdeling werkt, en hoe die werkt. Er is niets raadselachtigs of onnatuurlijks aan. Maar ook hier geldt weer: je leert en begrijpt het recept pas volledig nadat je er veel mee hebt geoefend. Juist omdat staartdelen ongetwijfeld het lastigste rekenrecept is, moet er heel veel mee geoefend worden, wil je het onder de knie krijgen. Leerlingen zijn dus gebaat bij een voorzichtige, didactisch verantwoorde, stapsgewijze opbouw. Niet bij een alternatieve methode waarbij ze aangemoedigd worden maar wat aan te rommelen (‘Maak je eigen voorkeur bij het noteren van de happen.’)

Rekenen met breuken

Ook over de manier waarop in de tegenwoordige rekenboekjes in het basisonderwijs en op de pabo het rekenen met breuken wordt behandeld, is nog veel te zeggen. Ook daar weer veel verwarring en een overvloed aan onhandigheden, vooral bij het vermenigvuldigen en delen van breuken. De lezer kan er zelf bijvoorbeeld [4] op naslaan (blz. 52-62) of [1] (blz. 89-155) of [3] (blz. 124). Wel veel verhalen over chocoladerepen, schaaltes en maatbekers, maar opa’s rekenregel *delen door een breuk is vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk* zul je er tevergeefs zoeken.

Als je de didactici vraagt waarom die regel niet meer behandeld wordt, antwoorden ze dat ze natuurlijk de kinderen best ‘het trucje’ zouden kunnen leren, maar dat de kinderen dan niet *begrijpen* wat ze doen. Wat ze daarmee eigenlijk bedoelen, is dat ze bij sommetjes als $\frac{3}{4} : \frac{7}{9}$ geen alledaags verhaaltje kunnen verzinnen. En ze denken echt dat breukrekenen te moeilijk is voor de basisschool. Een invloedrijke rekendidacticus wordt in NRC Handelsblad van 22 december 2007 als

1 Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen

c (Bij dit voorbeeld wordt doorgedaan met delen tot op 2 decimalen achter de komma. De letters t, h, d en td die eventueel gebruikt kunnen worden, staan voor tiende, honderdste, duizendste en tienduizendste.)
 Een studentenverzekering kost per jaar € 765,-. Hoeveel kost deze verzekering per maand?
 Een jaar heeft 12 maanden, dus hierbij hoort de rekenzin $765 : 12$.
 (Schatting vooraf $600 : 12 = 50$)

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 765} \\ \underline{480} \\ 285 \\ \underline{240} \\ 45 \\ \underline{36} \\ 9 \end{array}$$

12	x
40	1 x
20	2 x
3	10 x
480	40 x

Een andere mogelijke schrijfwijze is:
 9,0 in plaats van t → 90
 4,8 in plaats van t → 48
 0,60 in plaats van h → 60

Maak je eigen voorkeur bij het noteren van de 'happen'.

Figuur 1.7: Nog een voorbeeld van de 'hapmethode' voor delen ([1], blz. 29).

volgt geciteerd: 'Een opgave als $3\frac{1}{2} : \frac{7}{9}$ hoort niet meer tot de basisschoolstof. Zulke opgaven vormen het eindpunt van een langlopend leerproces, en moeten inderdaad op formeel niveau gemaakt worden.'

Zoals je hieruit kunt opmaken, is *de facto* het breukrekenen op gezag van de moderne didactici (en met goedvinden van het ministerie) van de basisschool verdwenen. Hier heeft *Mythe 1* (eerst begrijpen, dan oefenen) op een fatale manier toegeslagen omdat de didactici 'begrijpen' verstaan als 'het kunnen vertalen in een alledaagse context'. Hun fantasie en vakbekwaamheid schieten hier kennelijk tekort. En dat terwijl het helemaal niet moeilijk is om ook vermenigvuldigen en delen voor breuken op een voor beginners begrijpelijke manier uit te leggen. Zie ons *Basisboek Rekenen*, hoofdstuk 9.

Een beschouwing over het belang van breukrekenen op de basisschool met scherpe kritiek op de geringe aandacht ervoor in de Cito-toetsen geeft Liesbeth van der Plas in haar tekst *Minder bekende problemen van het Nederlandse wiskunde-onderwijs* (zie http://www.liesbethvanderplas.nl/_userdata/AAAonderwijs.pdf).

2. De periodieke peiling van het onderwijsniveau

Sinds 1986 voert het Cito in opdracht van het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen Periodieke Peilingen uit van het OnderwijsNiveau (PPON). Onderdeel daarvan zijn grootschalige onderzoeken in jaargroep 8 van de basisschool voor rekenen-wiskunde. In mei-juni 2004 is hiervoor de vierde peiling uitgevoerd; eerdere peilingen vonden plaats in 1987, 1992 en 1997. De opzet van de vierde rekenpeiling is in belangrijke mate vergelijkbaar met die van eerdere rekenpeilingen. In 2005 heeft het Cito de resultaten van deze peiling gepubliceerd onder de titel *Balans [32] van het reken-wiskundeonderwijs aan het eind van de basisschool 4 – Uitkomsten van de vierde peiling in 2004* door Jan Jansen, Frank van der Schoot en Bas Hemker, met een bijdrage van Cornelis M. van Putten, Universiteit Leiden. Dit rapport kan worden ingezien en gedownload op de website van het Cito: http://www.citogroep.nl/share/PPON/Cito_pponbalans_32.pdf. In het vervolg zal ik ernaar verwijzen als ‘het PPON-rapport’ of als [PPON2004]. Het rapport telt 240 bladzijden en bevat een volledige beschrijving van de onderzoekopzet, de uitvoering, de beoordelingswijze, een rapportage en een statistische analyse van de toetsresultaten en een uitgebreide collectie voorbeeldopgaven.

Onderzoekopzet van PPON 2004

Aan het onderzoek in 2004 hebben in totaal 122 basisscholen meegedaan met in totaal 3078 leerlingen. Er waren in totaal 542 toetsopgaven die verdeeld zijn over 18 sets met drie toetsboekjes, met per toetsboekje gemiddeld ongeveer 30 vragen. Daarnaast maakten de leerlingen, meestal aan het eind van de ochtend, nog een rekendictee. De eerste toets in iedere set was een *hoofdreken*toets soms in combinatie met een toets ‘rekenen met de zakrekenmachine’. Hoofdrekenen betrof het ‘zonder uitrekenpapier’ kunnen uitrekenen van relatief eenvoudige opgaven. Deze opgaven waren afgedrukt op lichtgeel papier. De opgaven voor het *rekenen met de zakrekenmachine* waren op blauw papier afgedrukt zodat de toetsleider kon controleren welke leerlingen op welk moment een zakrekenmachine nodig hadden. De opgaven van de overige onderwerpen zijn op wit papier afgedrukt. Iedere set bevatte twee witte toetsboekjes. De toetsleiders hadden de opdracht de leerlingen er expliciet op te wijzen dat zij de beschikbare open ruimte

2 De periodieke peiling van het onderwijsniveau

in deze witte boekjes als uitrekenpapier mochten gebruiken (apart uitrekenpapier werd niet verstrekt). De opgaven in de toetsboekjes waren willekeurig gerangschikt, dus niet naar opklimmende moeilijkheidsgraad (de voorbeeldopgaven in het PPON-rapport zijn dat wel).

Standaarden en deskundigenpanels

Na afloop van het onderzoek zijn in mei 2005 door deskundigen drie standaarden gedefinieerd: de standaard *Minimum*, de standaard *Voldoende* en de standaard *Gevorderd*. De standaard *Voldoende* geeft het niveau aan waarop – volgens de beoordelaars – de kerndoelen van het basisonderwijs voldoende beheerst worden. Daarmee wordt beoogd een niveau vast te stellen dat door 70% tot 75% van de leerlingen aan het einde van de basisschool bereikt zou moeten worden. Voor zover de leerlingen de standaard *Voldoende* niet bereiken, dient het onderwijs te streven naar een minimaal vaardigheidsniveau. Dit niveau wordt geformuleerd met de standaard *Minimum*, dat door vrijwel alle leerlingen (90% tot 95%) bereikt zou moeten worden.

Voor het vaststellen van de standaarden is een zorgvuldige procedure opgezet waarmee de oordelen van geïnformeerde deskundigen worden verzameld. Er zijn daartoe twee panels geformeerd, samengesteld uit leraren basisonderwijs met minstens drie jaar ervaring in groep 8, schoolbegeleiders en pabo-docenten met specifieke deskundigheid op het gebied van rekenen en rekendidactiek.

Panel 1 bestond uit 24 beoordelaars, waarvan 16 leraren uit groep 8, 6 pabo-docenten, 1 schoolbegeleider en 1 onderzoeker en Panel 2 bestond uit 25 beoordelaars: 19 leraren, 4 pabo-docenten, 2 schoolbegeleiders.

In drie fasen hebben zij aan de hand van de toetsopgaven de standaards vastgesteld. Een beschrijving van dat proces is te vinden in [PPON2004], p. 30-37. Een kortere beschrijving geeft *Onderwijs op peil? Een samenvattend overzicht van twintig jaar PPON* van Frank van der Schoot, projectleider PPON, die in februari 2008 is verschenen, zie http://www.cito.nl/po/ppon/alg/Cito_PPON_20_jaar.pdf, in het bijzonder p. 10-13.

Domeinen, onderwerpen en resultaten

Het PPON-onderzoek in 2004 betrof 22 onderwerpen verdeeld over drie domeinen: *I. Getallen en bewerkingen*, *II. Verhoudingen, breuken en procenten* en *III. Meten, meetkunde, tijd en geld*. Deze verdeling sluit nauw aan bij de bestaande onderwijspraktijk en de inhoud van het thans op de basisschool gebruikte onderwijsmateriaal. Ook de aard van de opgaven sluit hier nauw bij aan.

Na afloop van de toetsen zijn per onderwerp de werkelijke percentages voor de drie standaarden berekend en gerapporteerd. Ik geef hieronder telkens alleen

de gerealiseerde percentages voor de standaard *Voldoende* (die dus volgens de panels telkens ongeveer 70% tot 75% zouden moeten zijn). Voor een volledig beeld verwijs ik naar het PPON-rapport.

In het PPON-rapport staan ook bij elk onderwerp voorbeelden van opgaven (maximaal 30 per onderwerp) die getoetst zijn, gerangschikt naar opklimmende moeilijkheidsgraad. (Die ordening is na de evaluatie van de toets aangebracht aan de hand van de resultaten. Tijdens het afnemen van de toets zijn de opgaven op willekeurige wijze gerangschikt aangeboden.) Hieronder staat per onderwerp vermeld welke voorbeeldopgaven de gemiddelde leerling goed of nagenoeg goed beheerst, welke opgaven matig beheerst worden en welke opgaven onvoldoende worden beheerst. Ook deze gegevens heb ik ontleend aan het PPON-rapport.

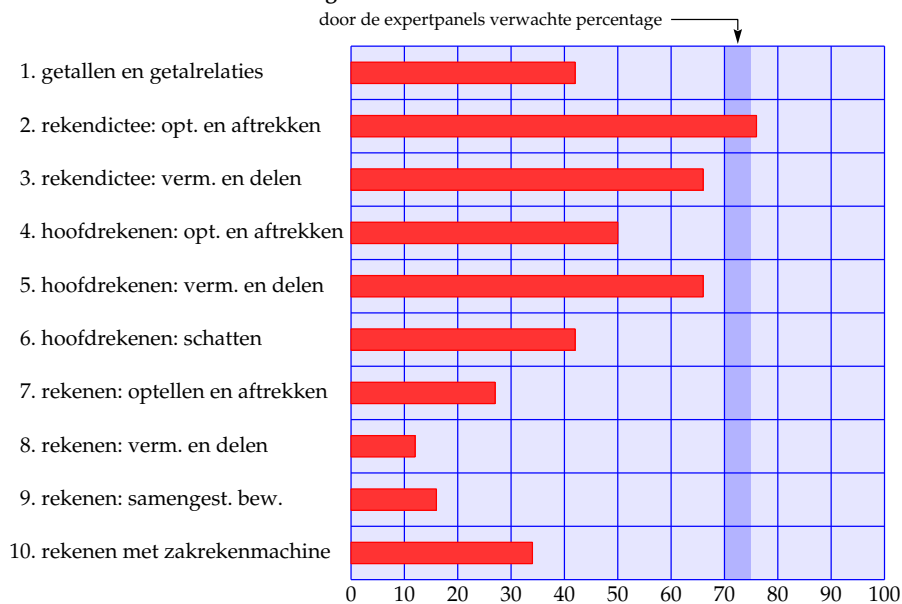
Voor de overzichtelijkheid heb ik voor elk van de drie domeinen twee grafieken toegevoegd. In de eerste grafiek wordt per onderwerp in beeld gebracht hoe het werkelijke percentage leerlingen dat de standaard *Voldoende* bereikt zich verhoudt tot het door de deskundigenpanels gewenste percentage (70% tot 75%). In de tweede grafiek is per onderwerp aangegeven welke voorbeeldopgaven goed, matig of onvoldoende beheerst worden. Op deze manier kan iedereen in één oogopslag zien hoe het met de rekenvaardigheid van Daan en Sanne gesteld is. Dit wordt nog verder uitgediept op bladzijde 26 en verder, waar een uitgebreide selectie gegeven wordt van voorbeeldopgaven die voor Daan en Sanne te moeilijk zijn.

Domein I: Getallen en bewerkingen

1. **Getallen en getalrelaties** ([PPON2004], pp. 49-56). De standaard *Voldoende* wordt door **42** procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-19 goed of nagenoeg goed, de opgaven 20-27 matig en de opgaven 28-30 onvoldoende.
2. **Basisoperaties: optellen en aftrekken** ([PPON2004], pp. 57-62). De standaard *Voldoende* wordt door **76** procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-29 goed of nagenoeg goed, en opgave 30 matig. Het betreft hier opgaven die de leerlingen uit het hoofd in beperkte tijd moeten oplossen (rekendictee).
3. **Basisoperaties: vermenigvuldigen en delen** ([PPON2004], pp. 63-68). De standaard *Voldoende* wordt door **66** procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-28 goed of nagenoeg goed maar de opgaven 29-30 onvoldoende. Het betreft hier opgaven die de leerlingen uit het hoofd in beperkte tijd moeten oplossen (rekendictee).
4. **Hoofdrekenen: optellen en aftrekken** ([PPON2004], pp. 69-76). De standaard *Voldoende* wordt door **50** procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-13 goed of nagenoeg goed, de

2 De periodieke peiling van het onderwijsniveau

Domein I: Getallen en bewerkingen



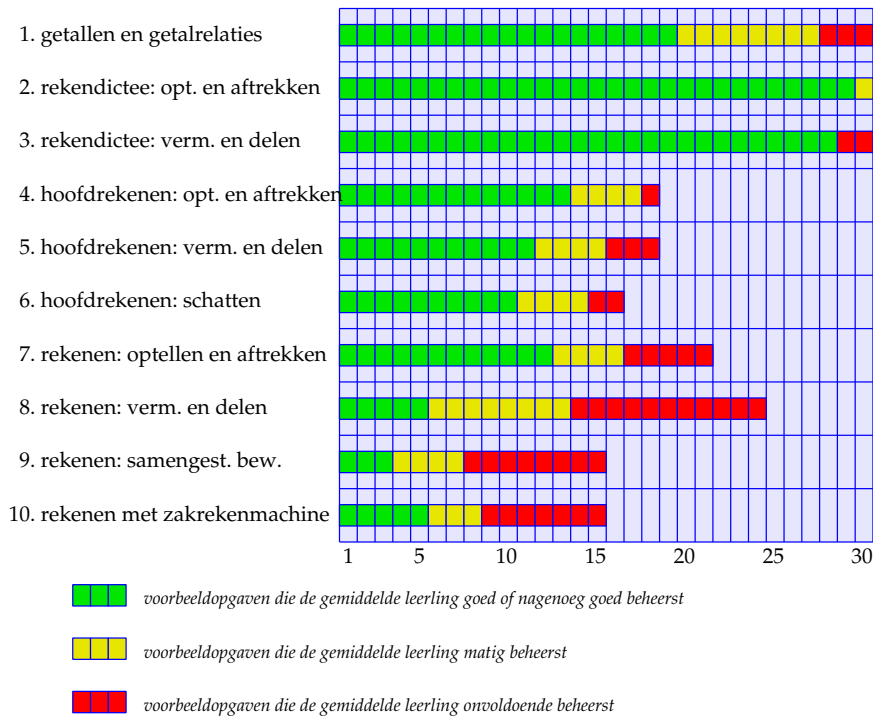
Percentage leerlingen dat de standaard *Voldoende* haalt, per onderwerp

opgaven 14-17 matig en opgave 18 onvoldoende (er waren 18 opgaven). Het betreft hier opgaven die de leerlingen uit het hoofd in onbepaalde tijd moeten oplossen zonder gebruik van pen en papier.

5. **Hoofdrekenen: vermenigvuldigen en delen** ([PPON2004], pp. 77-85). De standaard *Voldoende* wordt door 66 procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-11 goed of nagenoeg goed, de opgaven 12-15 matig en de opgaven 16-18 onvoldoende (er waren 18 opgaven). Het betreft hier opgaven die de leerlingen uit het hoofd in onbepaalde tijd moeten oplossen zonder gebruik van pen en papier.
6. **Schattend rekenen** ([PPON2004], pp. 85-93). De standaard *Voldoende* wordt door 42 procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-10 goed of nagenoeg goed, de opgaven 11-14 matig en de opgaven 15 en 16 onvoldoende (er waren 16 opgaven). Het betreft hier opgaven die de leerlingen uit het hoofd in onbepaalde tijd moeten oplossen zonder gebruik van pen en papier.
7. **Bewerkingen: optellen en aftrekken** ([PPON2004], pp. 93-100). De stan-

Wat kan de gemiddelde leerling in groep acht?

Domein I: Getallen en bewerkingen



daard *Voldoende* wordt door 27 (!) procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-12 goed of nagenoeg goed, de opgaven 13-16 matig en opgaven 17-21 onvoldoende (er waren 21 opgaven). Het betreft hier opgaven die de leerlingen met pen en papier mogen oplossen (en dat is in de instructies ook expliciet aangegeven).

8. **Bewerkingen: vermenigvuldigen en delen** ([PPON2004], pp. 101-110). De standaard *Voldoende* wordt door 12 (!) procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-5 goed of nagenoeg goed, de opgaven 6-13 matig en opgaven 14-24 onvoldoende (er waren 24 opgaven). Het betreft hier opgaven die de leerlingen met pen en papier mogen oplossen (en dat is in de instructies ook expliciet aangegeven).

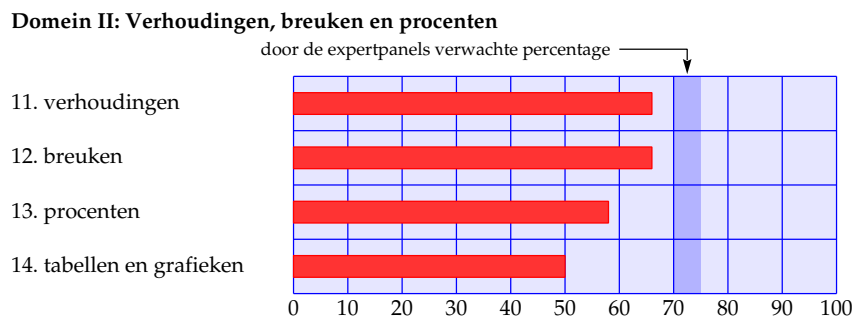
9. **Samengestelde bewerkingen** ([PPON2004], pp. 110-116). De standaard *Voldoende* wordt door 16 (!) procent van de leerlingen bereikt. De gemid-

2 De periodieke peiling van het onderwijsniveau

delde leerling beheerst de opgaven 1-3 goed of nagenoeg goed, de opgaven 4-7 matig en de opgaven 8-15 onvoldoende (er waren 15 opgaven). Het betreft hier opgaven die de leerlingen met pen en papier mogen oplossen. Het zijn allemaal contextopgaven. De gegevens zijn in een tekst, een tabel of schema aangeboden. De voorgelegde problemen doen een beroep op het gecombineerd gebruik van optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

10. **Rekenen met een zakrekenmachine** ([PPON2004], pp. 116-124). De standaard *Voldoende* wordt door **34** procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-5 goed of nagenoeg goed, de opgaven 6-8 matig en de opgaven 9-15 onvoldoende (er waren 15 opgaven).

Domein II: Verhoudingen, breuken en procenten



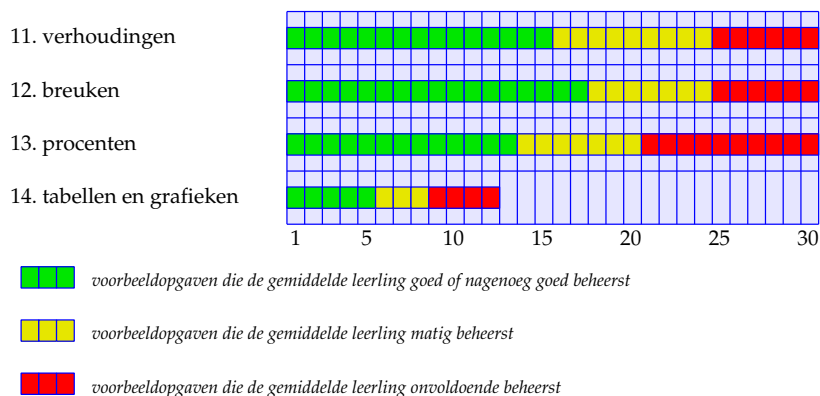
Percentage leerlingen dat de standaard *Voldoende* haalt, per onderwerp

11. **Verhoudingen** ([PPON2004], pp. 135-144). De standaard *Voldoende* wordt door **66** procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-15 goed of nagenoeg goed, de opgaven 16-24 matig en de opgaven 25-30 onvoldoende.
12. **Breuken** ([PPON2004], pp. 145-154). De standaard *Voldoende* wordt door **66** procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-17 goed of nagenoeg goed, de opgaven 18-24 matig en de opgaven 25-30 onvoldoende.
13. **Procenten** ([PPON2004], pp. 154-163). De standaard *Voldoende* wordt door **58** procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-13 goed of nagenoeg goed, de opgaven 14-20 matig en de opgaven 21-30 onvoldoende.

14. **Tabellen en grafieken** ([PPON2004], pp. 163-168). De standaard *Voldoende* wordt door 50 procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-5 goed of nagenoeg goed, de opgaven 6-8 matig en de opgaven 9-12 onvoldoende (er waren 12 opgaven).

Wat kan de gemiddelde leerling in groep acht?

Domein II: Verhoudingen, breuken en procenten

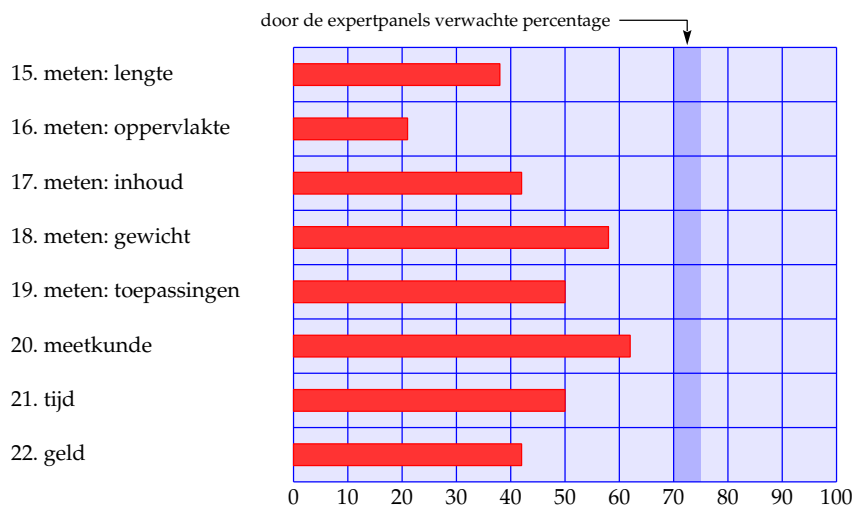


Domein III: Meten en meetkunde

15. **Metten: lengte** ([PPON2004], pp. 171-178). De standaard *Voldoende* wordt door 38 procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-6 goed of nagenoeg goed, de opgaven 7-10 matig en de opgaven 11-18 onvoldoende (er waren 18 opgaven).
16. **Metten: oppervlakte** ([PPON2004], pp. 178-185). De standaard *Voldoende* wordt door 21 (!) procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-4 goed of nagenoeg goed, de opgaven 5-9 matig en de opgaven 10-18 onvoldoende (er waren 18 opgaven).
17. **Metten: inhoud** ([PPON2004], pp. 185-191). De standaard *Voldoende* wordt door 42 procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-4 goed of nagenoeg goed, de opgaven 5-12 matig en de opgaven 13-18 onvoldoende (er waren 18 opgaven).
18. **Metten: gewicht** ([PPON2004], pp. 191-198). De standaard *Voldoende* wordt door 58 procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-7, 11 en 12 goed of nagenoeg goed, de opgaven 8, 10 en 13 matig en de opgaven 14-18 onvoldoende (er waren 18 opgaven).

2 De periodieke peiling van het onderwijsniveau

Domein III: Meten en meetkunde



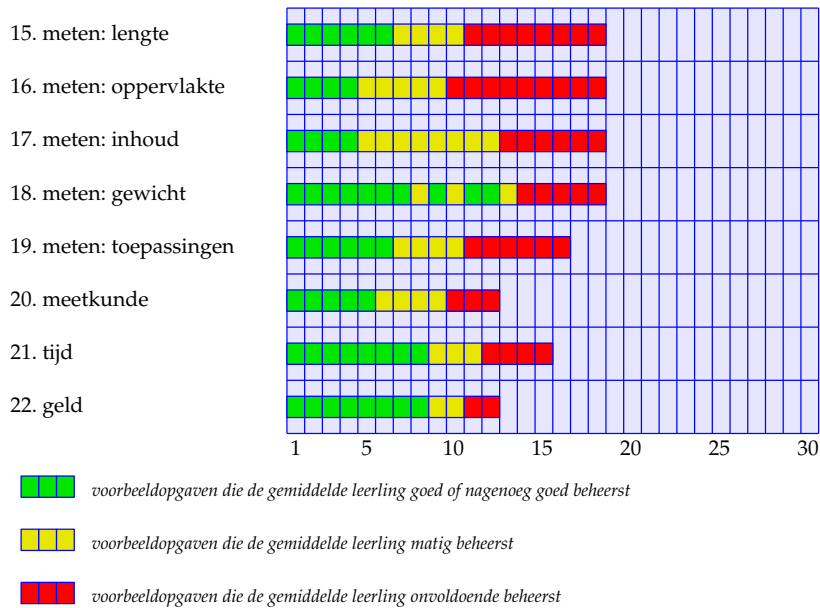
Percentage leerlingen dat de standaard *Voldoende* haalt, per onderwerp

19. **Metten: toepassingen** ([PPON2004], pp. 198-204). De standaard *Voldoende* wordt door 50 procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-6 goed of nagenoeg goed, de opgaven 7-10 matig en de opgaven 11-16 onvoldoende (er waren 16 opgaven). Indirect echter wel in sectie 1.2.3.
20. **Meetkunde** ([PPON2004], pp. 204-209). De standaard *Voldoende* wordt door 62 procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-5 goed of nagenoeg goed, de opgaven 6-9 matig en de opgaven 10-12 onvoldoende (er waren 12 opgaven).
21. **Tijd** ([PPON2004], pp. 209-215). De standaard *Voldoende* wordt door 50 procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-8 goed of nagenoeg goed, de opgaven 9-11 matig en de opgaven 12-15 onvoldoende (er waren 15 opgaven).
22. **Geld** ([PPON2004], pp. 215-221). De standaard *Voldoende* wordt door 42 procent van de leerlingen bereikt. De gemiddelde leerling beheerst de opgaven 1-8 goed of nagenoeg goed, de opgaven 9 en 10 matig en de opgaven 11 en 12 onvoldoende (er waren 12 opgaven).

Een vergelijking van de bovengenoemde percentages met de door de deskundigenpanels verwachte 70 tot 75 procent, geeft een verontrustend beeld te zien.

Wat kan de gemiddelde leerling in groep acht?

Domein III: Meten en meetkunde



Slechts bij één onderwerp wordt het streefpercentage bereikt, de andere percentages zijn er vaak ver onder, met als treurig dieptepunt de 12% bij onderwerp 8: vermenigvuldigen en delen met pen en papier. Natuurlijk geven de bovenstaande percentages slechts een schetsmatig beeld, maar voor wie de moeite neemt het gehele PPON-rapport (240 bladzijden) door te werken, wordt dit beeld alleen maar verontrustender. Vooral ook als je je realiseert welke van de grotendeels zeer eenvoudige rekenopgaven door een meerderheid van de leerlingen blijkbaar *niet* kunnen worden opgelost. Om een voorbeeld te noemen: bij het onderwerp 12, Breuken, komen in slechts 3 van de 30 opgaven breuken voor met een noemer groter dan 10. Toch kan de gemiddelde leerling zeven van de dertig opgaven 'matig', en zes helemaal niet oplossen. Verder is opvallend dat ook de onderwerpen die bij uitstek onder 'realistisch rekenen' kunnen worden gerangschikt (9, 10, 13-19, 21, 22), slecht tot zeer slecht scoren.

Het zal duidelijk zijn dat er na het basisonderwijs nog veel werk verzet moet worden om kinderen die uiteindelijk willen doorstromen naar mbo, hbo of universiteit op een aanvaardbaar peil van rekenvaardigheden te brengen.

Te moeilijk voor Daan en Sanne

Wanneer we Daan en Sanne weer opvatten als gemiddelde leerlingen van groep acht van de basisschool (gemiddeld op het punt van rekenvaardigheid), dan geeft het PPOON-rapport voor elk van de 22 onderwerpen aan, welke voorbeeldopgaven zij niet kunnen maken ('onvoldoende beheersen', zegt het rapport). Opdat de lezer zich hiervan gemakkelijk een indruk kan vormen, geef ik hieronder bij vrijwel elk onderwerp drie voorbeeldopgaven die voor Daan en Sanne te moeilijk zijn. Alleen bij de onderwerpen 2, 3, 4, 6 en 22 zijn het er minder omdat Daan en Sanne daar alle of vrijwel alle voorbeeldopgaven uit het rapport goed of matig beheersen. De opgaven van de onderwerpen 14 (Tabellen en grafieken), 20 (Meetkunde) en 22 (Geld) doen allemaal een essentieel beroep op de daar bijgevoegde illustraties. Om praktische redenen heb ik ze hier niet opgenomen; ik verwijs hiervoor weer naar het PPOON-rapport.

De redactie van de opgaven heb ik om typografische en praktische redenen soms wat aangepast zonder naar mijn mening de kern aan te tasten. Zo heb ik bijvoorbeeld alle illustraties weggelaten. De lezer kan echter altijd de oorspronkelijke opgaven in het PPOON-rapport nazien. Ik geef daartoe telkens het bladzijdennummer.

1. Getallen en getalrelaties ([PPOON2004], p. 52)

28. In Nederland zijn 460 miljoen munten van één eurocent. Hoeveel euro zijn die munten samen waard?

29. Maak de som af: $18,80 = 18 \times 1 + 80 \times \dots$

30. In een loterij is er 100 000 euro aan prijzen: 1 prijs van € 25 000, –, 5 prijzen van € 10 000, 5 prijzen van € 1000, – en voor de rest prijzen van € 100, –. Hoeveel prijzen van 100 euro zijn dat?

2. Basisoperaties: optellen en aftrekken (rekendictee)

Hier beheersen Daan en Sanne alle opgaven goed of matig.

3. Basisoperaties: vermenigvuldigen en delen (rekendictee) ([PPOON2004], p. 64)

29. $25 : 1000 =$

30. $10 : 8 =$

4. Hoofdrekenen: optellen en aftrekken ([PPOON2004], p. 71)

18. Het aantal inwoners van Obelin is in 6 jaar van 189 500 naar een kwart miljoen gestegen. Hoeveel inwoners zijn er in die 6 jaar bijgekomen?

5. Hoofdrekenen: vermenigvuldigen en delen ([PPON2004], p. 79)

16. De school houdt een 'koekenactie'. Er zitten 4 koeken van € 0,75 per stuk in één zakje. In totaal verkopen de leerlingen 250 zakjes met koeken. Voor hoeveel geld is dat?

17. Een bouwterrein is 500 m² groot. De grond kost € 49, – per m². Hoeveel kost dit bouwterrein?

18. $8 \times 1,5 \times 12,5 =$

6. Schattend rekenen (hoofdrekenen) ([PPON2004], p. 87)

15. Ik reken uit op de rekenmachine $1846 : 46 = 40130435$. Bij het overschrijven van het antwoord ben ik de komma vergeten. Waar moet die komma staan?

16. Voor een schaatswedstrijd zijn 23 978 kaarten verkocht. Tweederde deel hiervan is verkocht aan Nederlandse schaatsfans. Hoeveel kaarten zijn dat ongeveer?

7. Bewerkingen: optellen en aftrekken ([PPON2004], p. 95)

Bij deze en alle volgende opgaven mag met pen en papier worden gerekend.

17. In 1990 zijn 12,03 miljoen mensen door de lucht vervoerd. In 1989 waren er dat 10,34 miljoen. Met hoeveel miljoen is het aantal luchtreizigers toegenomen?

19. Pieter is met de auto op vakantie geweest. Aan het begin stond de kilometerstand op 0038796,00, aan het eind op 0040372,00. Hoeveel kilometer heeft Pieter in de vakantie gereden?

21. Aan het begin van de dag staat de kilometerteller van mijn fiets op 957,4 km. Aan het eind van de dag is de stand 009,7. Hoeveel kilometer heb ik die dag gefietst?

8. Bewerkingen: vermenigvuldigen en delen ([PPON2004], p. 103)

16. $99 \times 99 =$

19. Wilma en haar twee zussen verdelen € 8,85. Hoeveel krijgt ieder?

22. 25 kg voer voor de kippen kost € 19,50. Hoeveel kost dat voer per kilogram?

9. Samengestelde bewerkingen ([PPON2004], p. 112)

8. Wilbert verkoopt koffie en broodjes. Hij verkoopt maandag 400 broodjes en 500 bekertjes koffie. Op de broodjes verdient hij 32 cent per stuk en op de koffie 24 cent per bekertje. Hoeveel verdiende Wilbert in totaal?

12. Een stoomtreintje maakt vier keer per uur een rondrit. Iedere keer kunnen er 75 mensen in. Hij rijdt van 9.00 uur tot 18.00 uur.

Hoeveel mensen kan dat treintje maximaal vervoeren per dag?

2 De periodieke peiling van het onderwijsniveau

14. Een bibliotheek wil over 3 jaar 125 000 boeken hebben. Nu bezit die bibliotheek 118 250 boeken. Hoeveel boeken moeten er dan gemiddeld per jaar bijgekocht worden?

10. Rekenen met een zakrekenmachine ([PPON2004], p. 118)

10. Het land Korso is 3590 km^2 groot. Het aantal inwoners is 843 600. Hoeveel inwoners is dat per km^2 ? (Rond af op het dichtstbijzijnde hele getal.)

12. Een strippenkaart met 15 strippen kost € 6,40. Hoeveel cent is dat per strip? Rond af op een hele eurocent.

13. Waterverbruik in 2002: 87 m^3 . 1 m^3 kost 84,6 cent. Wat zijn de totale kosten?

11. Verhoudingen ([PPON2004], p. 138)

25. In een potje oploskoffie zit 200 gram. Met $2\frac{1}{2}$ gram oploskoffie kun je 1 kopje koffie maken. Hoeveel kopjes koffie kun je hoogstens maken met 1 potje oploskoffie?

26. Wilco verdient € 2000, –. Hij krijgt € 200, – loonsverhoging. Ron verdient € 1500. Hij krijgt in verhouding dezelfde loonsverhoging als Wilco. Hoeveel is dat?

29. Een toren van 30 m geeft een schaduw van 12 m. Naast de toren staat een boom die een schaduw geeft van 5 m. Hoe hoog is die boom?

12. Breuken ([PPON2004], p. 148)

26. Eén ton is 1000 kg. Een tram weegt $28\frac{1}{5}$ ton. Hoeveel kg weegt de tram?

27. Oma verdeelt $\frac{1}{2}$ liter vanillevla eerlijk over drie bakjes. Hoeveel vanillevla komt er in elk bakje?

30. Frea drinkt iedere dag drie bekertjes melk van een kwart liter. Hoeveel liter melk drinkt ze per week?

13. Procenten ([PPON2004], p. 157)

22. Martijn heeft 200 vragenlijsten verstuurd. 52 vragenlijsten kwamen ingevuld terug. Hoeveel procent is dat?

25. De Albo bank geeft $4\frac{1}{2}$ procent rente per jaar. Hoeveel rente levert een bedrag van € 100, – op in een jaar?

29. Aan de wandelvierdaagse doen 720 deelnemers mee. 7 van elke 8 deelnemers hebben na afloop blaren. Hoeveel procent van de deelnemers heeft geen blaren gehad?

14. Tabellen en grafieken

Om typografische redenen verwijs ik hiervoor naar de opgaven 9 – 12 van bladzijde 165 van het rapport.

15. Meten: lengte ([PPON2004], p. 173)

11. Koen heeft autopech op de snelweg. Hij staat bij het bordje 36,4 km. Bij het bordje 37,0 km kan hij om hulp bellen. Hoeveel meter moet hij lopen tot het bordje 37,0 km?
12. Peter wil twee stukken tentdoek kopen. Een stuk van 3 m bij 2 m, en een stuk van 4 m bij 2 m. De winkel verkoopt tentdoek van 2 meter breed voor 4 euro de meter. Hoeveel moet Peter voor zijn twee stukken betalen?
16. Peter heeft een rechthoekige tuin van 530 cm bij 275 cm. Hoeveel meter is de omtrek?

16. Meten: oppervlakte ([PPON2004], p. 180)

10. $1 \text{ cm}^2 = \dots \text{ mm}^2$
12. Op een rol van 50 cm breed zit 2 meter pakpapier. Hoeveel stukken van 25 cm bij 25 cm kan ik in totaal uit 1 rol knippen?
16. Vul de goede maat in. Kies uit: mm^2 , cm^2 , dm^2 , m^2 , hm^2 , km^2 .
De oppervlakte van een vingernagel is ongeveer 1 . . .
De oppervlakte van het blad waarop je werkt, is ongeveer 600 . . .

17. Meten: inhoud ([PPON2004], p. 187)

13. In een krat zitten 24 flesjes limonade. Elk flesje heeft een inhoud van 30 cl. Hoeveel liter limonade is dat in totaal?
15. In een vijver zit 4 m^3 water. Hoeveel liter water is dat?
17. In een aquarium van 10 dm lang en 5 dm breed staat het water 30 cm hoog. Hoeveel liter water moet Sandra erbij doen zodat het water 40 cm hoog staat?

18. Meten: gewicht ([PPON2004], p. 193)

15. In een zak hondenbrokjes zit 2 kg. De hond van Hanne krijgt 4 keer per dag 50 gram brokjes. Na hoeveel dagen is de zak leeg?
16. Moeder koopt 300 gram rundergehakt van € 4,00 per kg. Hoeveel moet zij betalen?
18. Daniëls cavia's Bruinwoet en Witwoet krijgen allebei 25 gram voer per dag. Daniëls vader heeft een zak voer van 2,5 kilogram gekocht. Hoeveel dagen kunnen Bruinwoet en Witwoet hiervan eten?

2 De periodieke peiling van het onderwijsniveau

19. Meten: toepassingen ([PPON2004], p. 200)

11. De kamer van Petra meet 4 m bij 5 m. Ze krijgt een kurkvloer. Bruine kurktegels kosten € 39, – per m². Grijs kurktegels kosten € 59, – per m². Hoeveel gulden bespaart Petra als zij de bruine tegels koopt?

12. De vloer is 12 bij 20 meter. Hoeveel meter zeil van 4 meter breed moet gekocht worden?

13. Een wielrenner heeft 3 uur en 45 minuten gereden met een gemiddelde snelheid van 32 km per uur. Hoe lang was de hele wedstrijd?

20. Meetkunde

Om typografische redenen verwijs ik hiervoor naar de opgaven 10 – 12 van bladzijde 208 van het rapport.

21. Tijd ([PPON2004], p. 211)

13. Op parkeerplaats NOORD kost het parkeren 1 euro per 20 minuten. Een dagkaart kost 10 euro voor de gehele dag. Na hoeveel tijd is de dagkaart voordeliger?

14. De tussentijden van een estafetteploeg zwemmen zijn: Johan 27,18 sec, Koos 28,02 sec, Maarten 26,90 sec, Simon . . . sec. De totaal tijd was 1 minuut en 47,97 seconde.

In hoeveel seconden heeft Simon de afstand gezwommen?

15. In 1985 werden er iedere seconde ergens op de aardbol 4 baby's geboren. Hoeveel baby's zij dat per dag?

22. Geld

Om typografische redenen verwijs ik hiervoor naar de opgaven 11 en 12 van bladzijde 217 van het rapport.

Kolomsgewijs versus traditioneel rekenen

Naast de resultaten van het onderzoek onder leerlingen van groep 8 bevat het PPON-rapport nog heel wat meer interessante informatie. Zo is hoofdstuk 3 gewijd aan het onderwijsaanbod, de onderwijstijd, het gebruik van de zakrekenmachine en het gebruik van verschillende rekenstrategieën. Vooral dat laatste interesseert ons hier. Omdat alle methodes het kolomsgewijs rekenen hebben geadopteerd, is het van belang te onderzoeken in hoeverre zij voldoen aan hetgeen in de huidige kerndoelen staat vermeld, namelijk dat leerlingen aan het eind van de basisschool de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met behulp van standaardprocedures of varianten daarvan kunnen uitvoeren.

In hoofdstuk 1 heb ik laten zien dat kolomsgewijs optellen, aftrekken en vermenigvuldigen geen standaardprocedures zijn: bij grotere getallen worden ze al snel hopeloos omslachtig. Ook veel rekendidactici vinden dat kolomsgewijs rekenen alleen maar een tussenstadium moet zijn op weg naar de standaardprocedures. Kolomsgewijs rekenen is een didactische keuze, een middel tot een doel. Maar het is in de huidige situatie een verplichte keuze, want er zijn geen rekenmethodes op de markt die deze keuze niet maken. En docenten die op de traditionele manier rekenles geven, worden niet zelden door de inspectie op de vingers getikt.

Uit het PPON-onderzoek blijkt dat de meeste leraren bij optellen en aftrekken geleidelijk omschakelen van kolomsgewijs rekenen naar het 'cijferalgoritme' (de 'methode van opa', zie hoofdstuk 5). Deze omschakeling vindt plaats tussen jaargroep 3 en jaargroep 6. Maar toch komt in de jaargroepen 7 en 8 kolomsgewijs optellen en aftrekken nog steeds veelvuldig voor naast het cijferalgoritme. Slechts 70 procent van de leraren laat in jaargroep 8 alleen maar het cijferalgoritme toe.

Bij vermenigvuldigen en delen is dat anders. Daar vindt die omschakeling veel later, of helemaal niet plaats. In jaargroep 8 is nog steeds minder dan 60 procent van de leraren helemaal overgeschakeld op het cijferalgoritme voor vermenigvuldigen. Door niet minder dan 13 procent van de leraren wordt ook in groep 8 nog steeds alleen maar kolomsgewijs vermenigvuldigd. Hun leerlingen krijgen dus nooit het efficiënte 'vermenigvuldigen onder elkaar' te zien, tenzij ze dat van hun ouders of grootouders leren.

Bij delen een soortgelijk verhaal. In groep 8 past bijna 60 procent van de leraren uitsluitend een 'hapmethode' toe. Zij behandelen de staartdeling niet. Toch is die niet helemaal van het toneel verdwenen: 17 procent van alle leraren behandelt in groep 8 de staartdeling als het aangewezen recept om delingen uit te voeren.

Hoofdrekenen en 'handig rekenen'

In paragraaf 3.5 van het PPON-rapport (p. 44/45) wordt ook vermeld hoeveel aandacht leraren besteden aan hoofdrekenen en 'handig rekenen' (zie hoofdstuk 1). In de jaargroepen 6, 7 en 8 besteden vrijwel alle leraren minstens één keer per week aandacht aan hoofdrekenen en 60 procent twee keer per week of vaker. In een nadere analyse hiervan blijkt dat een groot deel van die tijd wordt gevuld met 'handig rekenen': het zoeken van 'handige' oplossingsstrategieën, het door leerlingen laten hanteren van meerdere oplossingsstrategieën, het via een schatting komen tot het ruwweg bepalen van een uitkomst, het passend omgaan met benaderingen, afrondingen en schattingen in alledaagse situaties. Ik kom daar later op terug als ik in hoofdstuk 3 een opsomming geef van niet minder dan achttien van dit soort procedures voor 'handig rekenen' (zie de bladzijden 36 en 37). Wat dit allemaal betekent voor matige en zwakke leerlingen heb ik al in hoofdstuk 1 aangevoerd. In de lezersreacties in hoofdstuk 6 kunt u er meer over lezen. Het is allemaal even treurig stemmend.

Ik hoop dat de huidige commotie rond de misstanden in het rekenonderwijs ertoe zal leiden dat deze volledig scheefgegroeide situatie, namelijk een onevenredig grote aandacht voor nutteloze hoofdrekenexercities ten koste van het aanleren van de standaardprocedures voor rekenen met pen en papier, weer zal worden rechtgetrokken. Met nadruk zeg ik hier *nutteloze* hoofdrekenexercities, want in het vervolgonderwijs worden die ‘handige’ oefjes nergens bijgehouden of gebruikt, terwijl het ontstellende gebrek aan rekenvaardigheid in de standaardbewerkingen vrijwel alle leerlingen vroeg of laat opbreekt.

Happen of staartdelen – wat werkt beter?

Voorstanders van ‘happen’ in plaats van staartdelen zeggen dat leerlingen bij ‘happen’ beter begrijpen wat ze doen, en dat ze minder fouten maken. Dat eerste valt nauwelijks te bewijzen (hoe kun je bewijzen dat iemand iets snapt?) en het tweede is domweg niet waar. Integendeel, onderzoek van dr. C.M. van Putten en zijn medewerkers van de Leidse universiteit heeft aangetoond dat leerlingen die de traditionele staartdeling gebruiken significant betere resultaten behalen. Zij deden dat door de delingsopgaven in de witte toetsboekjes van het PPON-rapport (waar dus naast de antwoorden ook de uitwerkingen van de leerlingen in staan) te analyseren op strategiegebruik. In totaal ging het daarbij om 5704 items. In het PPON-rapport doet Van Putten hiervan verslag in een apart hoofdstuk *Strategiegebruik bij het oplossen van deelsommen* (p. 125-131). Van Putten en zijn medewerkers vonden dat in 24 procent van de gevallen een ‘hapmethode’ gebruikt werd, in 13 procent een staartdeling terwijl in 44 procent van de gevallen alleen een antwoord werd gegeven. In de overige gevallen werd geen antwoord gegeven of werd een andere methode gehanteerd. De hapmethode leidde in 62 procent van de gevallen tot een goed antwoord, de staartdeling had in 68 procent van de gevallen succes, en ‘geen uitwerking’ leidde in 32 procent van de gevallen tot een goed antwoord.

Het verschil in succeskans tussen happen en staartdelen deed zich zowel voor bij zwakke, als bij middelmatige of sterke leerlingen. (Op grond van hun totaalscore bij de gehele toets konden leerlingen worden gekarakteriseerd als sterke, middelmatige of zwakke rekenaars.) In elk van de drie categorieën was staartdelen succesvoller dan ‘happen’; de verschillen waren weliswaar niet erg groot, maar toch significant, namelijk 47 procent tegen 41 procent (zwakke rekenaars), 62 tegen 56 procent (matige rekenaars) en 80 tegen 76 procent (sterke rekenaars).

Wat in het onderzoek verder opviel, was het feit dat zwakke rekenaars heel weinig gebruik maken van een ‘hapmethode’, terwijl die toch bedoeld was om juist hen te helpen. Blijkbaar haken ze af zodra er überhaupt sprake is van een opgave over delen.

Het opvallendste resultaat in het onderzoek was echter het grote aantal leerlingen dat een antwoord gaf zonder ook maar iets als een berekening op te schrijven.

Deze ‘strategie’ van antwoorden zonder uitwerking leidt slechts bij de sterke rekenaars vaak tot goede antwoorden (in 59 procent van de gevallen). De matige en zwakke rekenaars gaan hierbij haast altijd de fout in (succeskans 31 procent, respectievelijk 13 procent). Tragisch is dat juist zwakke rekenaars deze strategie van ‘niets opschrijven’ bij voorkeur blijken te hanteren, niet alleen bij delen, maar net zo goed bij vermenigvuldigen zoals inmiddels uit later onderzoek van Van Putten c.s. is gebleken (zie bladzijde 64).

Zonder enige twijfel is ook dit een gevolg van de huidige cultus van hoofdrekenen en ‘handig rekenen’. *Rekenen doe je uit je hoofd; opschrijven is voor watjes* – dat is het algemene beeld dat leerlingen van rekenen hebben. Toen ik de lerares van mijn kleinzoon uit groep 8 in een gezellig gesprek thuis op het grote belang van veel oefenen wees, was ze het helemaal met me eens: ‘Ja ik ga weer elke week flink met ze hoofdrekenen’ was haar reactie. Voor haar, en voor veel van haar collega’s, geldt blijkbaar: rekenen = hoofdrekenen = handig rekenen. Diezelfde kleinzoon weigert dan ook categorisch om bij zijn berekeningen ook maar iets op te schrijven. Bij elke som geeft hij na flink piekeren direct een antwoord. Helaas vaak fout, dat wel.

Waarom kent niemand de PPON-resultaten?

Pas als je de moeite Het PPON-rapport is in 2005 gepubliceerd. Het heeft toen ook wel enige belangstelling in de pers en in vakkringen gekregen, onder andere via een stuk op de forumpagina van de Volkskrant door Rob en Marisca Milikowski. Zij illustreerden de dramatische terugval in rekenvaardigheden aan de hand van een van de PPON-opgaven. Hun stuk is nog steeds de moeite van het lezen waard, zie http://www.rekencentrale.nl/Bananensom/Lessen_uit_de_bananensom.pdf.

De aandacht voor PPON is echter weer snel weggeëbt, ongetwijfeld tot opluchting van de voorvechters van het *nieuwe rekenen*, die niet graag hun ideologie bekritiseerd zien. Vanaf het begin hebben zij ook getracht het onderzoek in een kwaad daglicht te stellen. Zo verspreidden zij bijvoorbeeld de boodschap dat de slechte resultaten verklaard konden worden doordat de leerlingen dachten dat ze buiten het antwoord niets op mochten schrijven – een aperte onjuistheid. Volgens hen was het onderzoek daarmee in feite mislukt. Adri Treffer, een van de architecten van het nieuwe rekenen, kwalificeerde in 2007 de slechte PPON-resultaten voor de rekenbewerkingen zelfs als niet-valide. En tegen alle evidentie in blijft hij volhouden dat er de laatste decennia juist sprake is van een grote vooruitgang in rekenvaardigheden bij de Nederlandse jeugd.

Het PPON-rapport zelf is overigens geen lichte kost. Het telt 240 bladzijden, met een samenvatting van vijf bladzijden en meer dan twintig conclusies. Dat maakt het niet gemakkelijk snel tot de kern ervan door te dringen. Daar komt nog iets bij. PPON 2004 is de vierde uit een reeks vergelijkbare peilingen (in 1987, 1992,

1997 en 2204) en de opzet ervan is zodanig dat door vergelijking met eerdere peilingen verantwoorde uitspraken gedaan kunnen worden over ontwikkelingen van de rekenvaardigheid in de loop der jaren. In de conclusies ligt daar ook de nadruk op: per onderwerp wordt vermeld of er ten opzichte van de vorige peilingen sprake is van vooruitgang of achteruitgang. Bij het overgrote deel van de onderwerpen blijkt er in de loop der jaren slechts sprake te zijn van kleine fluctuaties. Bij twee onderwerpen is er duidelijke vooruitgang te zien. Dat zijn 1. *Getallen en getalrelaties* en 6. *Schattend rekenen (hoofdrekenen)*. Niet toevallig zijn dit ook zwaartepunten van het moderne 'realistische' rekenonderwijs. Toch blijven ook daar de prestaties ver achter bij wat de expertpanels wenselijk en haalbaar achten. Zo wordt de standaard *Voldoende* in beide gevallen slechts bereikt door 42 procent van de leerlingen. Ook een blik op de sommen die Daan en Sanne bij deze onderwerpen *niet* kunnen maken, stemt niet vrolijk.

Maar naast vooruitgang is er ook achteruitgang, dramatische achteruitgang zelfs, namelijk bij 7. *Bewerkingen: optellen en aftrekken*, bij 8. *Bewerkingen: vermenigvuldigen en delen* en bij 9. *Samengestelde bewerkingen*. Dit zijn juist de klassieke rekenbewerkingen waar opa's rekenrecepten generaties lang succes hebben gegarandeerd. De prestaties zijn hier echt in een vrije val geraakt. Waarom heeft dit nauwelijks aandacht gekregen? Dat is niet moeilijk te verklaren. Als je, zoals gebeurd is, de berichtgeving over PPO 2004 presenteert als: er zijn 22 onderwerpen getoetst, bij twee was er vooruitgang, bij drie achteruitgang en Nederland doet het internationaal gezien nog steeds uitstekend (TIMSS en PISA), dan ontstaat al gauw de indruk dat er eigenlijk niets aan de hand is. neemt het gehele PPO-rapport door te werken en alle statistische analyses en voorbeeldopgaven bestudeert, ontdekt dat er wel degelijk iets aan de hand is. Iets dat ook steeds meer vaders en moeders, steeds meer meesters en juffen, steeds meer leraren in het voortgezet onderwijs en steeds meer docenten in het hoger onderwijs beginnen te merken: er heeft zich de afgelopen decennia een ramp voltrokken. Het eens zo succesvolle rekenonderwijs op de basisschool is ongemerkt aan de stoep rand gezet. Als gevolg hiervan is de rekenvaardigheid van de Nederlandse jeugd dramatisch gekelderde. De kerndoelen van het basisonderwijs worden niet meer gehaald. Daan en Sanne kunnen niet meer rekenen.

3. Hoofdrekenen als struikelblok

Op de basisschool neemt hoofdrekenen tegenwoordig een belangrijke plaats in. Daarbij gaat het vooral om sommen waarbij de manier waarop je ze uit moet rekenen, afhangt van de speciale getallen in de opgave. Geen algemene oplossingsregels dus, maar recepten die alleen in bijzondere gevallen werken. ‘Handig rekenen’ wordt dit genoemd. Er wordt veel tijd aan besteed omdat dit het begrip en het inzicht bij leerlingen zou bevorderen.

Aan de hand van voorbeeldopgaven zal ik laten zien wat dit ‘handige rekenen’ in de praktijk betekent. Zo zie je wat voor rekensommen leerlingen uit het hoofd moeten kunnen maken en welke oplossingsrecepten ze daarbij moeten gebruiken. Ik haal die opgaven en die recepten uit de rapportage van de Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau (PPON) die in 2004 door het Cito is gehouden onder leerlingen van jaargroep 8 van de basisschool (zie pagina 17).

Hoofdrekenopgaven uit het PPON-onderzoek

Het PPON-onderzoek betrof tweeëntwintig onderwerpen. Vijf daarvan hadden betrekking op hoofdrekenen. De leerlingen moesten die opgaven uit het hoofd uitrekenen, dus zonder gebruik te maken van ‘uitrekenpapier’ en zonder tussenkomsten te noteren. Bij twee van de vijf onderwerpen ging het om een *reken-dictee* waarbij de leerlingen het antwoord op elke opgave binnen zeven seconden moesten geven. Bij de andere drie onderwerpen was die tijdsbeperking er niet.

De voorbeeldopgaven van de beide *reken-dicties* staan op de bladzijden 58 en 64 van het PPON-rapport; ik laat ze hier buiten beschouwing. De opgaven van het *hoofdrekenen zonder tijdslimiet* staan op de bladzijden 70 – 71 (optellen en aftrekken), 78 – 79 (vermenigvuldigen en delen) en 86 – 87 (schattend rekenen). De opgaven van die laatste drie onderwerpen zijn vrijwel allemaal ingebed in een ‘realistische’ context. Om de lezer snel een idee te geven van de aard en omvang van dit hoofdrekenen in het moderne rekenonderwijs, geef ik hieronder alle opgaven van het onderwerp optellen en aftrekken en het onderwerp vermenigvuldigen en delen in een uitgekledede vorm, dus zonder context. De oorspronkelijke opgaven, waarbij dus in veel gevallen een vertaalslag aan het eigenlijke rekenen vooraf gaat, kan de lezer in het PPON-rapport vinden.

3 Hoofdrekenen als struikelblok

Hoofdrekenen: optellen en aftrekken ([PPON2004], p. 70-71)

1. $63 + 78 + 37 =$
2. $847 + 98 =$
3. $€4,00 - €0,62 =$
4. $285 - 178 =$
5. $€22,25 + €8,45 + €7,75 =$
6. $8003 - 5 =$
7. $€0,95 + €2,05 + €2,34 + €1,66 =$
8. $50 - 7,50 =$
9. $1697 + 59 =$
10. $1600 - 1475 =$
11. $2,75 - 0,5 =$
12. $5,85 + 4,2 =$
13. $€0,99 + €1,99 + €0,99 + €1,99 + €1,99 =$
14. $55\,000 - 28\,500 =$
15. $0,75 + 7,5 =$
16. $€115,45 - €75,50 =$
17. $11,46 + 0,6 =$
18. $250\,000 - 189\,500 =$

In de inleidende tekst (p. 69) somt het PPON-rapport de volgende ‘oplossingsprocedures’ op. Voor optellen:

- het verwisselen of hergroeperen: $483 + 59 + 17 = 483 + 17 + 59 = 500 + 59 = 559$;
- het splitsen en rekenen via een rond getal: $8,96 + 0,16 = 8,96 \dots 9 \dots 9,12$;
- het vervangen van de oorspronkelijke getallen door één van de getallen te vergroten en het andere getal in dezelfde mate te verkleinen of omgekeerd: $194 + 210 = 200 + 204 = 404$;
- het vervangen van één of meer van de getallen en daarvoor achteraf compenseren: $99 + 99$ als $100 + 100 - 2$.

Voor aftrekken vermeldt het PPON-rapport zes procedures:

- hergroeperen;
- splitsen en rekenen via een rond getal;
- het vergroten of verkleinen van beide getallen in gelijke mate;
- het vervangen van één getal door een rond getal en daarvoor achteraf compenseren;
- aanvullen;
- het in één keer aftrekken van twee of meer getallen.

Hoofdrekenen: vermenigvuldigen en delen ([PPON2004], p. 78-79)

1. $4 \times €6,25 =$
2. $\frac{1}{2} \times 158 =$
3. Hoe vaak gaat 50 in 463?
4. $40 \times 12 =$
5. $4 \times 0,75 =$
6. $175 : 5 =$
7. $€95,- : 5 =$
8. $80 \times €2,50 =$
9. Hoe vaak gaat €0,34 in €1,70?
10. $200 \times €1,75 =$
11. Hoe vaak gaat €0,48 in €5,00?
12. $6 \times €6,98 =$
13. $25 : 4 =$
14. $€5,10 : 3 =$
15. $€8,00 : 5 =$
16. $250 \times 4 \times €0,75 =$
17. $500 \times €49,- =$
18. $8 \times 1,5 \times 12,5 =$

In de inleidende tekst (p. 77) somt het PPON-rapport de volgende 'oplossingsprocedures' op. Voor vermenigvuldigen:

- verwisselen of hergroeperen: $4 \times 7 \times 25 = 4 \times 25 \times 7$;
- splitsen: $7 \times 23 = 7 \times 20 + 7 \times 3$
- veranderen van één van de getallen in een rond getal en daarvoor een correctie toepassen: $8 \times 98 = 8 \times 100 - 8 \times 2$;
- vervangen van de opgave door een opgave met dezelfde uitkomst, door één van de factoren te vermenigvuldigen met een getal en de andere factor door datzelfde getal te delen: $18 \times 3,5 = 9 \times 7$;

Bij delen noemt het PPON-rapport de volgende procedures:

- splitsen van het deeltal: $1608 : 8$ als $1600 : 8$ en $8 : 8$;
- veranderen van één van de getallen in een rond getal en daarvoor een correctie toepassen: $1592 : 8 = 1600 : 8$ minus $8 : 8$;
- vervangen van de opgave door een opgave met dezelfde uitkomst, door beide getallen met eenzelfde getal te vermenigvuldigen of door eenzelfde getal te delen: $22,5 : 2,5 = 45 : 5$;
- afronden van de uitkomst. Bij die opgaven moet de leerling uit de context afleiden welke betekenis aan de rest moet worden toegekend en of naar boven of naar beneden moet worden afgerond.

Handig?

Het is duidelijk dat kleine veranderingen in deze opgaven ze in veel gevallen te moeilijk maken voor hoofdrekenen op school. De maakbaarheid hangt bijna altijd af van de speciaal gekozen getallen. Bij elke som is er wel een 'handige truc' waarmee je hem snel uit je hoofd op kunt lossen. Maar juist door de grote nadruk op dit soort hoofdrekenen krijgen leerlingen gemakkelijk de indruk dat er in het algemeen ook voor *elke* rekensom zo'n 'handige truc' moet bestaan.

Die indruk wordt verder gevoed door de opgaven in het PPON-onderzoek, de schooltoetsen en de Cito-toets. Want ook daar zijn bijna alle opgaven wel op een 'handige manier' uit te rekenen. Het gevolg is dat als leerlingen er niet direct in slagen om zo'n truc te vinden, ze al gauw de moed opgeven. Of ze komen in tijdnood. Let wel, het gaat hier om niet minder dan achttien verschillende recepten voor 'handig rekenen'. Misschien is de lijst zelfs niet volledig, en worden er in de schoolboeken nog meer van zulke rekenrecepten behandeld.

Hoe dan ook, de beginnende rekenaars moeten niet alleen al deze trucs leren, ze moeten ook nog leren in welke gevallen ze kunnen worden toegepast. Realiseren de ontwerpers van het 'handige rekenen' zich hoeveel tijd en inspanning dit kost? En is het vreemd dat matige en zwakke rekenaars door de bomen het bos dan niet meer zien?

Liever op papier

Als een persoonlijke opmerking wil ik daar graag aan toevoegen dat het bij veel van de hierboven gegeven opgaven niet in me op zou komen ze uit het hoofd te berekenen. Met pen en papier doe ik het sneller en gegarandeerd zonder fouten, want hoofdrekenen is nooit mijn sterke kant geweest. Het heeft bij mij ook nooit het inzicht bevorderd.

Maar afgezien daarvan, ik zou beginners, of ze nu sterk, matig of zwak zijn, zulke opgaven nooit uit het hoofd laten uitrekenen. Waar is dat goed voor? Leer ze stap voor stap de traditionele rekenrecepten met pen en papier. *Juist* met pen en papier, omdat je dan minder fouten maakt. Zo kun je jezelf namelijk makkelijk controleren omdat je alles volledig uitschrijft. In mijn lange ervaring met wiskundeonderwijs heb ik de studenten altijd gedwongen alles op te schrijven, net zolang totdat ze een vaardigheid volledig onder de knie hebben.

Wat alle leerlingen echt aan hoofdrekenen moeten beheersen, heb ik in hoofdstuk 5 opgesomd. Hieronder herhaal ik die lijst. Dat, en niet meer, is noodzakelijk om vlot te kunnen rekenen. Met pen en papier, wel te verstaan. Ik acht de huidige cultus van hoofdrekenen, compleet met alle ad-hoc trucjes die men onder de noemer 'handig rekenen' rangschikt, uitermate schadelijk voor het rekenonderwijs. De tijd en moeite die eraan besteed wordt, gaat ten koste van het aanleren van de traditionele universele rekenrecepten, die dan ook in veel gevallen op school

niet meer voldoende behandeld en geoefend worden. Nog erger is, dat dit 'handige rekenen' voor de matige en zwakke rekenaars zonder meer rampzalig is, zie hierover hoofdstuk 1 en de bloemlezing van de reacties in hoofdstuk 6.

Parate kennis

Om met pen en papier te kunnen rekenen is het nodig dat je vlot en zonder enige aarzeling de volgende berekeningen uit het hoofd kunt uitvoeren. Je moet ze gewoon paraat hebben. Een kwestie van oefenen dus, net zo lang totdat je ze kunt dromen. Het is maar een klein rijtje:

1. Twee getallen van één cijfer bij elkaar optellen.
Voorbeelden: $3 + 5 = 8$, $7 + 9 = 16$, $2 + 8 = 10$.
2. Een getal van één cijfer optellen bij een getal van twee cijfers.
Voorbeelden: $23 + 5 = 28$, $77 + 9 = 86$, $52 + 8 = 60$.
3. Twee getallen kleiner dan twintig van elkaar aftrekken (het kleinste van het grootste).
Voorbeelden: $8 - 5 = 3$, $19 - 12 = 7$, $17 - 9 = 8$, $12 - 7 = 5$.
4. Twee getallen die elk bestaan uit één cijfer gevolgd door een aantal nullen, bij elkaar optellen.
Voorbeelden: $30 + 50 = 80$, $7000 + 9000 = 16000$, $200 + 80 = 280$, $9000 + 30 = 9030$.
5. Twee getallen van één cijfer met elkaar vermenigvuldigen.
Voorbeelden: $3 \times 5 = 15$, $7 \times 9 = 63$, $2 \times 8 = 16$.
6. Een getal vermenigvuldigen met 10, 100, 1000, enzovoort.
Voorbeelden: $345 \times 10 = 3450$, $52 \times 100 = 5200$, $979 \times 1000 = 979000$.
7. Twee getallen die elk bestaan uit één cijfer gevolgd door een aantal nullen, met elkaar vermenigvuldigen.
Voorbeelden: $30 \times 50 = 1500$, $7000 \times 9 = 63000$, $200 \times 80 = 16000$, $400 \times 300 = 120000$.
8. Een getal dat eindigt op een nul delen door 10, een getal dat eindigt op twee nullen delen door 100, enzovoort.
Voorbeelden: $560 : 10 = 56$, $36000 : 100 = 360$, $606000 : 1000 = 606$.
9. Een deling, al dan niet met rest, uitvoeren als de deler een getal van één cijfer is, en het deeltal kleiner is dan tien maal de deler.
Voorbeelden: $56 : 7 = 8$, $36 : 9 = 4$, $66 : 7 = 9 \text{ rest } 3$, $77 : 9 = 8 \text{ rest } 5$.

Bij optellen onder elkaar gebruik je 1, 2 en 4, bij aftrekken onder elkaar 3, bij vermenigvuldigen onder elkaar 1, 2, 5, 6 en 7 en bij staartdelen 3, 5, 8 en 9. Voor het rekenen met kommagetallen komen daar dan nog bij:

10. Een kommagetal vermenigvuldigen met 10, 100, 1000 enzovoort.
11. Een kommagetal delen door 10, 100, 1000 enzovoort.

3 Hoofdrekenen als struikelblok

12. Procenten omzetten in kommagetallen en omgekeerd.
Voorbeeld: $15\% = 0,15$, $0,2\% = 0,002$, $235\% = 2,35$.
13. Een kommagetal afronden op een gegeven aantal decimalen (plaatsen achter de komma).

Ook voor schattend rekenen zijn de bovenstaande hoofdrekenregels voldoende. Maar ook daar geldt: wat is er tegen om bij die schatting de berekening op te schrijven? Waarom mag je niet op een kladje werken? Waarom zou dat uit het hoofd moeten? Begrijp me goed: natuurlijk is er niets op tegen dat leerlingen met een rekenknobbel snel van alles uit het hoofd gaan doen. Of laten zien hoe ze op een handige manier sneller tot het goede antwoord zijn gekomen. Maar leer ze eerst de algemene recepten. En vergis je niet: leerlingen vinden het prachtig als ze zien dat die ook in eenvoudige gevallen, waar ze misschien het antwoord direct al zien, tot het juiste antwoord leiden. Dat geeft vertrouwen en voldoening: *Zie je, het werkt écht altijd! Is dat niet schitterend?*

Ik voeg hier graag aan toe dat in het eindrapport van de *Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Rekenen en Taal* een nieuwe omschrijving van *hoofdrekenen* gegeven wordt. Daarbij wordt hoofdrekenen gedefinieerd als *rekenen met je hoofd*, en daarbij wordt het opschrijven van 'tussenresultaten' expliciet toegestaan. Ik juich dit van harte toe, al was het alleen maar omdat leerlingen dan al snel zullen ervaren dat ze met pen en papier (als dat toch bij de hand is) net zo snel de traditionele rekenrecepten (optellen onder elkaar, aftrekken onder elkaar, vermenigvuldigen onder elkaar) kunnen toepassen. Ik hoop van harte dat hiermee een eind komt aan de schadelijke cultus van hoofdrekenen en 'handig rekenen' die het huidige rekenonderwijs zoveel schade heeft berokkend.

Nu nog de lesboekjes en de Cito-toetsopgaven aanpassen en de betreffende onderwerpen verwijderen uit toekomstige PPON-onderzoeken, en we zijn weer op de goede weg!

4. Domeinbeschrijving rekenen

In het eindrapport van de *Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen* worden voor rekenen drie referentieniveaus onderscheiden: *referentieniveau 1* aan het einde van groep 8 van de basisschool (leeftijdindicatie: 12 jaar), *referentieniveau 2* aan het einde van het vmbo, respectievelijk het einde van de onderbouw (eind klas 3) van havo of vwo (leeftijdindicatie: 15 – 16 jaar), en *referentieniveau 3* aan het einde van het mbo, respectievelijk havo of vwo (leeftijdindicatie: 18 – 20 jaar). Elk van de drie niveaus heeft twee kwaliteiten: een *fundamentele kwaliteit* en een *streefkwaliteit*. In het rapport van de Expertgroep wordt het kwaliteitsonderscheid beschreven en aan de hand van voorbeeldopgaven nader vastgelegd.

In dit hoofdstuk geef ik een beschrijving van het **domein rekenen** in zowel het primair als het voortgezet onderwijs in termen van van kennis- en vaardigheidsdoelen. Aan de hand hiervan zal ik op bladzijde 47 globaal de drie referentieniveaus aangeven. Voor een nadere uitwerking van die niveaus verwijs ik naar het eindrapport van de Expertgroep.

Met nadruk wordt gesteld dat het in dit hoofdstuk *uitsluitend* gaat om het domein rekenen in strikte zin. De niet onder dit domein vallende onderdelen van de wiskunde (bijvoorbeeld algebra, meetkunde, tabellen, functies en grafieken, irrationaliteit van wortels) worden hierin niet behandeld.

Soorten getallen

In het primair onderwijs wordt gerekend met *natuurlijke getallen*, *kommagetallen* en *breuken*. Natuurlijke getallen zijn getallen waarmee je *aantallen* kunt weergeven: 5 vingers aan je hand, 12 appels op een schaal, 60 minuten in een uur, 16 miljoen Nederlanders, 0 euro in je portemonnee. Kommagetallen (decimale breuken, decimaalgetallen) zijn getallen zoals 354,27 en 0,067. Je gebruikt ze bijvoorbeeld bij het rekenen met euro's, bij schaalverdelingen, bij het bepalen van maten en gewichten of bij het rekenen met verhoudingen en procenten. Breuken zijn getallen zoals $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{15}{29}$ en $\frac{14}{5}$. In het voortgezet onderwijs wordt, afhankelijk van het onderwijstype, ook gerekend met *negatieve getallen*, *machten* en *wortels*.

Rekenen met natuurlijke getallen

Leerlingen kennen de manier waarop ons decimale positiestelsel is opgebouwd. Zij kennen de betekenis van cijfers en hun plaats in getallen. Zo weten zij dat $6498 = 6 \times 1000 + 4 \times 100 + 9 \times 10 + 8$. Zij weten dat op die manier met behulp van slechts tien cijfers (namelijk 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9) elk natuurlijk getal kan worden weergegeven.

Hoofdrekenen

Leerlingen kunnen vlot en zonder enige aarzeling de volgende berekeningen uit het hoofd uitvoeren:

1. Twee getallen van één cijfer bij elkaar optellen.
Voorbeelden: $3 + 5 = 8$, $7 + 9 = 16$, $2 + 8 = 10$.
2. Een getal van één cijfer optellen bij een getal van twee cijfers.
Voorbeelden: $23 + 5 = 28$, $77 + 9 = 86$, $52 + 8 = 60$.
3. Twee getallen kleiner dan twintig van elkaar aftrekken (het kleinste van het grootste).
Voorbeelden: $8 - 5 = 3$, $19 - 12 = 7$, $17 - 9 = 8$, $12 - 7 = 5$.
4. Twee getallen die elk bestaan uit één cijfer gevolgd door een aantal nullen, bij elkaar optellen.
Voorbeelden: $30 + 50 = 80$, $7000 + 9000 = 16000$, $200 + 80 = 280$, $9000 + 30 = 9030$.
5. Twee getallen van één cijfer met elkaar vermenigvuldigen.
Voorbeelden: $3 \times 5 = 15$, $7 \times 9 = 63$, $2 \times 8 = 16$.
6. Een getal vermenigvuldigen met 10, 100, 1000, enzovoort.
Voorbeelden: $345 \times 10 = 3450$, $52 \times 100 = 5200$, $979 \times 1000 = 979000$.
7. Twee getallen die elk bestaan uit één cijfer gevolgd door een aantal nullen, met elkaar vermenigvuldigen.
Voorbeelden: $30 \times 50 = 1500$, $7000 \times 9 = 63000$, $200 \times 80 = 16000$, $400 \times 300 = 120000$.
8. Een getal dat eindigt op een nul delen door 10, een getal dat eindigt op twee nullen delen door 100, enzovoort.
Voorbeelden: $560 : 10 = 56$, $36000 : 100 = 360$, $606000 : 1000 = 606$.
9. Een deling, al dan niet met rest, uitvoeren als de deler een getal van één cijfer is, en het deeltal kleiner is dan tien maal de deler.
Voorbeelden: $56 : 7 = 8$, $36 : 9 = 4$, $66 : 7 = 9 \text{ rest } 3$, $77 : 9 = 8 \text{ rest } 5$.

Rekenen met pen en papier

Leerlingen kunnen met pen en papier de volgende rekenbewerkingen vlot uitvoeren.

1. Optellen van twee of meer getallen (optellen onder elkaar).

2. Aftrekken van een getal van een groter getal (aftrekken onder elkaar).
3. Vermenigvuldigen van twee getallen (vermenigvuldigen onder elkaar).
4. Delen met rest (staartdeling).

Rekenen met kommagetallen

Leerlingen kennen de betekenis van kommagetallen en hun plaats op de getallenlijn. Ze kennen kommagetallen in tal van praktijksituaties, bijvoorbeeld bij het rekenen met geldbedragen of bij het gebruik van schaalverdelingen op linialen en andere meetinstrumenten.

Hoofdrekenen

Leerlingen kunnen vlot en zonder aarzelen de volgende rekenbewerkingen uit het hoofd uitvoeren.

1. Een kommagetal vermenigvuldigen met 10, 100, 1000 enzovoort.
2. Een kommagetal delen door 10, 100, 1000 enzovoort.
3. Procenten omzetten in kommagetallen en omgekeerd.
Voorbeeld: $15\% = 0,15$, $0,2\% = 0,002$, $235\% = 2,35$.
4. Een kommagetal afronden op een gegeven aantal decimalen (plaatsen achter de komma).

Rekenen met pen en papier

Leerlingen kunnen met pen en papier de volgende rekenbewerkingen vlot uitvoeren.

1. Optellen van twee of meer kommagetallen (optellen onder elkaar).
2. Aftrekken van een kommagetal van een groter kommagetal (aftrekken onder elkaar).
3. Vermenigvuldigen van twee kommagetallen (vermenigvuldigen onder elkaar).
4. Het omzetten van een deling met kommagetallen in een deling waarbij de deler een natuurlijk getal is, vervolgens de deling uitvoeren, en ten slotte, indien gevraagd, het quotiënt afronden op een gegeven aantal decimalen.
Voorbeeld: $1,452 : 0,17 = 145,2 : 17$. Dit levert na uitvoering van de deling en afronden op twee decimalen als uitkomst 8,54.

Toepassingen

Leerlingen kunnen rekenen met kommagetallen in de volgende toepassingen (contexten).

1. Rekenen met geldbedragen.

4 Domeinbeschrijving rekenen

2. Rekenen met verhoudingen en procenten.
3. Rekenen in het metrieke stelsel voor lengte, oppervlakte (van rechthoeken), inhoud (van rechthoekige blokken) en gewicht.
4. Rekenen met tijd (uren, minuten, seconden) en snelheid (kilometers per uur en meters per seconde).
5. Omrekenen van meters per seconde naar kilometers per uur en omgekeerd.
6. Omrekenen van valuta, bijvoorbeeld euro's naar dollars, bij een gegeven wisselkoers.

Bij al deze toepassingen kunnen leerlingen contextopgaven in rekenopgaven vertalen, oplossen en de uitkomsten in termen van de context interpreteren. Zij kunnen de berekeningen in eenvoudige gevallen met de hand (pen en papier) uitvoeren. Bij lastiger opgaven kunnen zij een rekenmachine gebruiken. In dat geval kunnen zij vooraf met pen en papier of uit het hoofd een schatting maken van de uitkomst.

Rekenen met breuken

Leerlingen kunnen breuken visualiseren door middel van bijvoorbeeld pizzadiagrammen (taartdiagrammen). Daarnaast kunnen zij ook de plaats van een breuk aangeven op de getallenlijn. Zij kennen de betekenis van termen als teller, noemer en breukstreep. Naast de meest gebruikelijke notatie van een breuk met de horizontale breukstreep (zoals $\frac{3}{4}$) kennen zij ook de notatie met een schuine breukstreep (zoals $3/4$).

Rekenen met pen en papier

Leerlingen kunnen met pen en papier de volgende rekenbewerkingen voor breuken vlot uitvoeren.

1. Een geheel getal als breuk schrijven (noemer 1).
2. Een kommagetal als breuk schrijven (noemer 10, 100, ...).
3. Een breuk vereenvoudigen (teller en noemer delen door een gemeenschappelijke deler).
4. Twee breuken onder één noemer brengen (gelijknamig maken).
5. Twee breuken na gelijknamig maken bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken.
6. Twee breuken met elkaar vermenigvuldigen.
7. Een breuk delen door een breuk.
8. Een breuk met een teller die groter is dan de noemer, schrijven als 'gemengde breuk'. *Voorbeeld:* $\frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$. Dit komt neer op delen met rest van de teller door de noemer: $14 : 5 = 2 \text{ rest } 4$, dus $\frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$.
9. Een 'gemengde breuk' schrijven als gewone breuk.

Opmerking: vooral bij vermenigvuldigen en delen, maar vaak ook bij aftrekken, zijn gemengde breuken onhandig. Het zal daarom vaak beter zijn om bij berekeningen gemengde breuken eerst om te zetten in gewone breuken.

Toepassingen

Ook breuken worden in toepassingen veel gebruikt, bijvoorbeeld bij het rekenen met verhoudingen en procenten.

1. Leerlingen kennen *uit het hoofd* het verband tussen breuken met noemer 2, 3, 4, 5 en 10 en het bijbehorende percentage, bijvoorbeeld: $\frac{1}{2} = 50\%$, $\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\%$, $\frac{3}{4} = 75\%$, $\frac{2}{5} = 40\%$.
2. Leerlingen kunnen met behulp van een rekenmachine een breuk omzetten in een (afgerond) kommagetal.
3. Leerlingen kunnen breuken en kommagetallen gebruiken bij het rekenen in contexten met verhoudingen en procenten.

Rekenen met negatieve getallen

Leerlingen kennen het gebruik van negatieve getallen in praktijksituaties zoals temperatuurschalen of saldi van een bankrekening.

1. Leerlingen kennen de 'uitgebreide getallenlijn' waarop positieve getallen, negatieve getallen en het getal 0 hun plaats hebben.
2. Leerlingen beheersen de rekenregels voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met positieve en negatieve getallen. In het bijzonder weten zij dat bij vermenigvuldigen met -1 het teken van een getal omklapt (van plus naar min of van min naar plus).

Machten

Machten van tien en de wetenschappelijke notatie

1. Leerlingen kennen de betekenis van notaties als $10^2 = 100$, $10^5 = 100\,000$, $10^{-1} = 0,1$, $10^{-4} = 0,0001$, dat wil zeggen machten van 10 met een positieve of negatieve gehele exponent.
2. Leerlingen zijn vertrouwd met de 'wetenschappelijke notatie' die onder andere op rekenmachines wordt gebruikt en waarbij een kommagetal wordt aangegeven als product van een getal tussen 0,1 en 1 en een macht van 10. *Voorbeelden:* $475,23 = 0,47523 \times 10^3$ en $0,003256 = 0,3256 \times 10^{-2}$. De laatste vormen wordt ook vaak genoteerd als $0,47523 E 3$, respectievelijk $0,3256 E - 2$. (De E is hier de eerste letter van 'exponent'.)

4 Domeinbeschrijving rekenen

Machten en rekenregels voor machten

1. Leerlingen kennen de betekenis van machten met een willekeurig positief grondtal en een positieve of negatieve gehele exponent.
Voorbeelden: $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$, $3^{-4} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{81}$.
2. Leerlingen kennen de regels voor vermenigvuldigen en delen van machten met hetzelfde grondtal.

Ontbinden in factoren, priemgetallen

Leerlingen weten wat een priemgetal is.

1. Leerlingen kunnen met pen en papier natuurlijke getallen kleiner dan 1000 in priemfactoren ontbinden.
2. Leerlingen kunnen de grootste gemeenschappelijke deler (ggd) van twee natuurlijke getallen berekenen met behulp van de priemontbinding van die getallen.
3. Leerlingen kunnen het kleinste gemeenschappelijke veelvoud (kgv) van twee getallen berekenen met behulp van de priemontbinding van die getallen.
4. De leerlingen kennen de deelbaarheidskenmerken voor deelbaarheid van een natuurlijk getal door 2, 3, 4, 5 en 9.

Wortels

Vierkantswortels

1. Leerlingen kennen de betekenis van (vierkants)wortels van natuurlijke getallen.
2. Leerlingen kunnen zulke wortels in standaardvorm brengen, bijvoorbeeld $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.
3. Leerlingen kennen de betekenis van (vierkants)wortels van positieve breuken.
4. Leerlingen kunnen zulke wortels in standaardvorm brengen, bijvoorbeeld $\sqrt{\frac{7}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{35}$.
5. Leerlingen kunnen (benaderingen van) wortels berekenen met behulp van een rekenmachine.
6. Leerlingen kunnen wortels schrijven als machten met $\frac{1}{2}$ als exponent. *Voorbeeld:* $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$.
7. Leerlingen kennen de rekenregels voor wortels en kunnen die toepassen.

Hogeremachtswortels

1. Leerlingen kennen de betekenis van hogeremachtswortels van natuurlijke getallen en breuken.
2. Leerlingen kunnen zulke wortels schrijven als machten met een breuk als exponent. *Voorbeeld:* $\sqrt[3]{15} = 15^{\frac{1}{3}}$.
3. Leerlingen kunnen (benaderingen van) zulke wortels berekenen met behulp van een rekenmachine.
4. Leerlingen kennen de rekenregels voor hogeremachtswortels en kunnen die toepassen.

Referentieniveaus en kwaliteiten

In het rapport van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen worden drie referentieniveaus onderscheiden: *referentieniveau 1* aan het einde van groep 8 van de basisschool (leeftijdindicatie: 12 jaar), *referentieniveau 2* aan het einde van het vmbo, respectievelijk het einde van de onderbouw (eind klas 3) van havo of vwo (leeftijdindicatie: 15 – 16 jaar), en *referentieniveau 3* aan het einde van het mbo, respectievelijk havo of vwo (leeftijdindicatie: 18 – 20 jaar). Elk van de drie niveaus heeft twee kwaliteiten: een *fundamentele kwaliteit* en een *streefkwaliteit*. In het rapport van de Expertgroep wordt het kwaliteitsonderscheid beschreven en aan de hand van voorbeeldopgaven nader vastgelegd.

Bij de beschreven referentieniveaus gaat het om *minimumeisen*: natuurlijk staat het docenten en schoolboekenschrijvers vrij om meer te behandelen. De voornaamste functie van de referentieniveaus is dat ze standaarden stellen en dat ze vastleggen welke rekenvaardigheden vervolgopleidingen bij binnenkomende leerlingen en studenten aanwezig kunnen veronderstellen. Verder wordt nogmaals gesteld dat het hier uitsluitend gaat om het domein rekenen in strikte zin. Andere onderdelen van de wiskunde, bijvoorbeeld algebra, meetkunde, tabellen, functies en grafieken, irrationaliteit, worden hier buiten beschouwing gelaten.

Referentieniveau 1 (12 jaar)

Het onderscheid tussen fundamentele kwaliteit (1F) en streefkwaliteit (1S) ligt op dit referentieniveau niet in de inhoud, doch slechts in de beheersing van de genoemde vaardigheden. Dit onderscheid wordt in het rapport van de Expertgroep nader uitgewerkt, onder andere met behulp van voorbeeldopgaven.

1. Rekenen met natuurlijke getallen: volledig
2. Rekenen met kommagetallen: volledig
3. Rekenen met breuken: volledig

4 Domeinbeschrijving rekenen

Referentieniveau 2 (15-16 jaar)

Bij referentieniveau 2 omvat de fundamentele kwaliteit 2F de minimale rekenvaardigheid die aan het einde van het vmbo bereikt moet zijn. De streefkwaliteit 2S omvat datgene wat leerlingen van havo en vwo op het gebied van rekenen moeten beheersen aan het einde van de onderbouw (eind klas 3). Hierbij horen zaken als machten en wortels, maar ook priemgetallen, grootste gemene deler, kleinste gemene veelvoud en eenvoudige deelbaarheidskenmerken.

Fundamentele kwaliteit 2F

1. Rekenen met natuurlijke getallen: volledig
2. Rekenen met kommagetallen: volledig
3. Rekenen met breuken: volledig
4. Rekenen met negatieve getallen: volledig
5. Machten: alleen machten van 10 en de wetenschappelijke notatie

Streefkwaliteit 2S

1. Rekenen met natuurlijke getallen: volledig
2. Rekenen met kommagetallen: volledig
3. Rekenen met breuken: volledig
4. Rekenen met negatieve getallen: volledig
5. Machten: volledig
6. Ontbinden in factoren, priemgetallen: volledig
7. Wortels: volledig

Referentieniveau 3 (18-20 jaar)

De fundamentele kwaliteit en de streefkwaliteiten 3F en 3S zijn voor het domein rekenen inhoudelijk gelijk aan de respectievelijke fundamentele en streefkwaliteiten 2F en 2S van referentieniveau 2. Met andere woorden, voor het domein rekenen behoeven die kwaliteiten slechts te worden onderhouden; uitbreiding is niet nodig.

5. Opa's rekenrecepten

Hieronder geef ik alle traditionele rekenrecepten (de 'recepten van opa') aan de hand van voorbeelden. Dit hoofdstuk is ontleend aan het *Basisboek Rekenen*. Daarin staat ook een gedetailleerde beschrijving en verklaring van die recepten, alsmede een grote collectie oefenopgaven.

Optellen

Optellen van natuurlijke getallen onder elkaar:

$$\begin{array}{r} 348 \\ 10282 \\ 33264 \\ 78695 \\ 81410 \\ 579 \\ 53186 \\ \hline 257764 \end{array} +$$

Controle: ook van beneden naar boven optellen.

Optellen van kommagetallen onder elkaar:

$$\begin{array}{r} 3,48 \\ 1028,2 \\ 33,264 \\ 78,695 \\ 814,10 \\ 5,79 \\ 531,86 \\ \hline 2495,389 \end{array} +$$

Zorg dat de komma's recht onder elkaar staan! *Controle:* ook van beneden naar boven optellen.

Optellen van breuken: eerst gelijknamig maken, dan tellers optellen.

$$\frac{32}{9} + \frac{14}{15} = \frac{160}{45} + \frac{42}{45} = \frac{202}{45}$$

Bij het gelijknamig maken neem je bij voorkeur het kleinste gemeenschappelijke veelvoud (kgv) van de noemers. Hier dus $\text{kgv}(9, 15) = 45$. Soms kun je de uitkomst nog vereenvoudigen. Bij meer dan twee breuken neem je ook het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van alle noemers. Voorbeeld:

$$\frac{13}{7} + \frac{3}{14} + \frac{12}{5} + \frac{3}{10} = \frac{130}{70} + \frac{15}{70} + \frac{168}{70} + \frac{21}{70} = \frac{334}{70} = \frac{167}{35}$$

Aftrekken

Aftrekken van twee natuurlijke getallen onder elkaar:

$$\begin{array}{r} 81410 \\ 53186 \\ \hline 28224 \end{array} -$$

Controle: van beneden naar boven optellen.

Aftrekken van twee kommagetallen onder elkaar:

$$\begin{array}{r} 1028,200 \\ 78,695 \\ \hline 949,505 \end{array} -$$

Zorg dat de komma's recht onder elkaar staan en voeg eventueel na de komma extra nullen toe (hier grijs gemaakt). *Controle:* van beneden naar boven optellen.

Aftrekken van twee breuken: eerst gelijknamig maken, dan tellers aftrekken.

$$\frac{32}{9} - \frac{14}{15} = \frac{160}{45} - \frac{42}{45} = \frac{118}{45}$$

Bij het gelijknamig maken neem je het kgv van de noemers. Hier neem je dus $\text{kgv}(9, 15) = 45$. Soms kun je de uitkomst nog vereenvoudigen.

Vermenigvuldigen

Vermenigvuldigen van twee natuurlijke getallen onder elkaar:

$$\begin{array}{r} 3178 \\ 4912 \\ \hline 6356 \\ 31780 \\ 2860200 \\ 12712000 \\ \hline 15610336 \end{array} \begin{array}{l} \times \\ \\ \\ + \end{array}$$

Let op de slotnullen (hier grijs gemaakt). Ervaren rekenaars laten die weg.

Vermenigvuldigen van twee kommagetallen onder elkaar:

$$\begin{array}{r} 349,823 \\ 2,47 \\ \hline 2448761 \\ 13992920 \\ 69964600 \\ \hline 864,06281 \end{array} \begin{array}{l} \times \\ \\ \\ + \end{array}$$

Je voert de tussenberekeningen *zonder komma's* uit, en zet de komma vervolgens in het eindresultaat op de juiste plaats: het aantal decimalen na de komma in het product is de *som* van de aantallen decimalen na de komma in de getallen die je met elkaar vermenigvuldigt. Hier hebben die getallen 3 en 2 decimalen, dus het product heeft $3 + 2 = 5$ decimalen na de komma.

Vermenigvuldigen van breuken: het product is een breuk met als teller het product van de tellers en als noemer het product van de noemers. Soms kun je gemeenschappelijke factoren al direct wegstrepen:

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{6 \times 4} = \frac{5 \times \cancel{3}^1}{\cancel{6}_2 \times 4} = \frac{5 \times 1}{2 \times 4} = \frac{5}{8}$$

Delen

Delen met rest doe je met een staartdeling:

$$\begin{array}{r} 37 \overline{) 83218} \quad 2 \\ \underline{74} \\ 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 37 \overline{) 83218} \quad 22 \\ \underline{74} \\ 92 \\ \underline{74} \\ 18 \end{array} \quad \begin{array}{r} 37 \overline{) 83218} \quad 224 \\ \underline{74} \\ 92 \\ \underline{74} \\ 181 \\ \underline{148} \\ 33 \end{array} \quad \begin{array}{r} 37 \overline{) 83218} \quad 2249 \\ \underline{74} \\ 92 \\ \underline{74} \\ 181 \\ \underline{148} \\ 338 \\ \underline{333} \\ 5 \end{array}$$

Deze staartdeling laat zien dat $83218 : 37 = 2249 \text{ rest } 5$. Als de rest 0 is, zegt men dat de deling *opgaat*. Het getal 83218 heet het *deeltal*, het getal 37 heet de *deler*, het getal 2249 heet het *quotiënt*, het getal 5 heet de *rest*.

Controle: via de vermenigvuldiging $37 \times 2249 + 5 = 83218$.

Een van de vele toepassingen van staartdelen is het omzetten van een gewone breuk in een gemengde breuk (dat wil zeggen met het gehele deel apart). Omdat (zie de zojuist gegeven staartdeling) $83218 : 37 = 2249 \text{ rest } 5$ is, geldt

$$\frac{83218}{37} = 2249 \frac{5}{37}$$

Als een deling niet opgaat, kun je met een *voortgezette staartdeling* het quotiënt zo nauwkeurig benaderen als je wilt met een kommagetal. De voortgezette staartdeling werkt ook bij het delen met kommagetallen. Zorg er dan wel voor dat de

5 Opa's rekenrecepten

deler geen kommagetal is door de deler en deeltal zo nodig met een macht van 10 te vermenigvuldigen.

Een toepassing van de voortgezette staartdeling is het omzetten van breuken in (benaderende) kommagetallen. Hier is de voortgezette staartdeling waarmee je laat zien dat $\frac{13}{7} \approx 1,85714$ (hier is het resultaat dus afgerond op vijf decimalen).

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 13,00000} \quad \backslash 1,85714 \\ \underline{7} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 10 \\ \underline{7} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 2 \end{array}$$

Delen door een breuk is vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk:

$$\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = \frac{5}{6} \times \frac{4}{3} = \frac{5 \times 4}{6 \times 3} = \frac{5 \times \cancel{4}^2}{\cancel{6}_3 \times 3} = \frac{5 \times 2}{3 \times 3} = \frac{10}{9}$$

6. Reacties

In het juninummer 2007 van Nieuw Archief voor Wiskunde verscheen mijn artikel Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen – Mythen in de rekendidactiek. Een preprint ervan had ik al eind januari 2007 op mijn homepage gezet. Ik heb daarop heel wat instemmende reacties per e-mail gehad. Veel korte, maar ook een aantal langere reacties die een nieuw licht op de zaak werpen, of in elk geval de ernst van de problematiek onderstrepen. In november 2007 verscheen mijn artikel ook in het Tijdschrift voor Remedial Teaching. Ook dat leverde weer een stroom van korte en langere instemmende reacties op. Een artikel in het dagblad Trouw op 19 december 2007 onder de titel De rekenmethode van opa werkt altijd, een artikel over rekenen op de pabo in NRC Handelsblad op 22 december 2007 onder de titel Kind van de rekening, een column van Marc Chavannes op 29 december 2007 (2007 + 1 is ongeveer . . . Schat de uitkomst), een interview met Adri Treffers en mij (Strijd om de staartdeling), een nieuwe column van Marc Chavannes (Rekenen als nationaal omgangsvraagstuk), beide op 26 januari 2008, en een column van Leo Prick (Ramp in rekenen) op 2 februari 2008, allemaal in NRC Handelsblad, leverden weer nieuwe reacties.

Hieronder volgt een bloemlezing uit al die reacties. De meeste afzenders zijn slechts met hun initialen aangegeven. In enkele gevallen heb ik hun initialen veranderd om privacy-redenen. Belangstellenden zal ik graag via een aan mij gerichte mail met individuele afzenders in contact brengen (craats@science.uva.nl).

1. HO schreef op 09-02-2007:

Geachte prof. Van de Craats, beste Jan,

Dat Rekenrijkboek waar je uit citeert wordt inderdaad ook op de school van mijn dochter gehanteerd. Je analyse is perfect. De drie mythes zijn inderdaad geheel juist. Mijn dochter wil alleen maar een methode om sommen uit te rekenen. Zij is niet geïnteresseerd in de diepere wereld achter het getal. Wat ze ook graag zou willen is coherentie tussen de verschillende manieren om de verschillende sommen uit te rekenen.

Ik probeer haar vaak uit te leggen dat er niets zo eenvoudig is als rekenen waarbij op wonderschone en wonderbaarlijke wijze altijd alles perfect op zijn plaats valt. En er voor alles maar één antwoord is dat je misschien wel in verschillende talen

kan opschrijven, zoals wat ze op school een kommagetal of een breuk noemen, maar in essentie hetzelfde is. Die eenduidigheid van rekenen heeft zij nooit leren zien door al die methodes die je perfect beschrijft.

Nou maar hopen dat er 'op niveau' wat tegen gedaan wordt.

2. JJ schreef op 10-04-2007:

Hallo meneer Van de Craats,

Met heel veel plezier (maar vooral herkenning en onderkenning) heb ik uw artikel gelezen 'Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen' Zelf heb ik 10 jaar een bovenbouwklas gehad (groep 6, 7, 8 op een Montessorischool). De afgelopen 6 jaar heb ik met de methode Pluspunt gewerkt. Het gebruik van die methode heeft me geen dag het gevoel gegeven dat ik goed rekenonderwijs gaf. Ik vergeleek de opbouw van de rekenmethode met een timmerman die tijdens het maken van zijn eerste grote klus (een prachtige ladenkast) nog nooit een zaag of hamer in zijn handen had gehad. Zo zie ik de huidige rekenmethodes ook. De kinderen moeten de meest ingewikkelde berekeningen maken, terwijl ze het gereedschap (het kunnen bereken van een opgave) nog niet beheersen. Het happen (altijd de staartdeling blijven doen), de verschillende manieren om tot een oplossing te komen, de vele uitzonderingen bij de aanbidding van een nieuw rekenonderdeel, de weinige inoefening etc., etc., heeft mij altijd zeer geïrriteerd.

Inmiddels ben ik intern begeleider op dezelfde school. Ik zie heel veel kinderen die een bloedhekel aan het rekenen hebben. Sterker nog ze voelen zich zo onzeker over hun vaardigheden, dat ik veel faalangstige kinderen onderzoek. Toevallig verleden week hierover met de directie gesproken. We zijn nu dan ook op zoek naar een nieuwe methode. Heeft u inzicht in de verschillende methoden? En zo ja, wat is volgens u een goede methode?

Haar laatste vraag heb ik doorgespeeld naar een aantal experts. Een van hen, Rob Milikowski, mailde me als volgt:

Beste Jan,

Alle rekenmethoden zijn realistisch. Met de invoering van de euro moesten alle uitgeverijen met een herziene druk komen waaruit de kwartjes en guldens verdwenen. Wat bleef waren de eierdoos en de autobus. Wat in alle methoden kwam, voor zover nog niet aanwezig, het kolomsgewijze rekenen. Pluspunt behoort bovendien tot de meest onoverzichtelijke. Met telkens drie boeken tegelijk in gebruik, en veel verschillende onderwerpen bij elkaar gepropt. Binnen de bestaande realistische methodes is het nog het prettigst werken in Wereld in Getallen.

Wij krijgen echter regelmatig kinderen met rekenproblemen op onze praktijk die zijn verdwaald in de mêlee aan strategieën die worden aangeboden. Bij diagnos-

tisch rekenonderzoek dat we verrichten kijken we ook altijd of de kinderen een methode beheersen voor optellen (en in een enkel geval aftrekken): met rekenmachine of op papier. Onze praktijk draait nog niet zo lang, maar die kinderen die toch wel kunnen optellen doen dat altijd volgens het klassieke algoritme. We zijn nog niemand tegen gekomen die overweg kan met het kolomsgewijze optellen. Wij werken zelf bij remediëring met eigengemaakt lesmateriaal. Dat bestrijkt nog een beperkt terrein, maar kinderen zijn heel tevreden als ze rijtjes sommen onder elkaar kunnen maken. En als ze dan met de rekenmachine zien dat het antwoord goed is, is het helemaal feest.

Het is eigenlijk vreemd dat er geen enkele methode op de markt is die voor het cijferen met de meer klassieke aanpak werkt. Het zou toch heel normaal zijn als er voor de scholen keuze mogelijk is. Mevrouw JJ is denk ik weinig geholpen met dit antwoord. Het is natuurlijk wel goed als er wat meer stemmen klinken die een alternatief willen voor de bestaande eenvormigheid.

Een andere expert, Marc van Zanten, mailde:

Geachte mevrouw JJ,

Momenteel zijn er zes reken-wiskundemethodes voor de basisschool op de markt (Pluspunt, De Wereld in Getallen, Rekenrijk, Alles Telt, Talrijk, Wis en Reken). Dit zijn allemaal moderne methodes, d.w.z. vormgegeven volgens principes van het realistische reken-wiskundeonderwijs, zoals het gebruik maken van modelmatige representaties, betekenisverlenende contexten en het aansluiten op informele denknoties van kinderen. Toch zijn er tussen deze methodes onderling vrij grote verschillen, bijvoorbeeld in het omgaan met verschillende oplossingsstrategieën. Niet elke methode is voor alle scholen even geschikt. Verschillen kunnen zitten in de visie op leren, de onderwijskundige oriëntatie van de school en de leerlingpopulatie. (. . .)

Succes, met vriendelijke groet,

Marc van Zanten

3. XX schreef op 24-06-2007:

Aan professor dr. J. van de Craats,

Mag ik me even voorstellen: XX, binnenkort 25 jaar werkzaam in het basisonderwijs als onderwijzeres (ik koester dat ouderwetse woord), de laatste jaren in groep 4.

Onlangs had ik met onze vriend en vroegere buurman, de heer YY, een gesprek over het feit, dat ondanks meer dan 4 uur rekenles per week de leerlingen voor een groot deel moeite hebben met het rekenen, zoals dat eind groep 4 vereist is (Cito toets eind groep 4) en dat ik iedere keer weer al mijn pedagogische kwaliteiten in stelling moet brengen om de kinderen aan het rekenen te krijgen. Heel

veel kinderen hebben er namelijk een enorme tegenzin voor ontwikkeld. We werken op onze school met de methode Pluspunt. Enkele jaren geleden volgde ik de cursus van de EDI: 'Met sprongen Vooruit', die me allerlei spelletjes en hulpmiddelen zoals een ketting met alle getallen van 1 t/m 100 leerde gebruiken om zo het rekenen inzichtelijker te maken voor de kinderen (die daar op zevenjarige leeftijd eigenlijk op een uitzondering mijns inziens na, nog niet aan toe zijn). Tijdens de gezellige borrel met YY uitte ik mijn frustratie over de rekenlessen en de resultaten ervan, nog verhevigd door het feit dat de kranten ook de nodige aandacht besteden aan het falen van ons onderwijssysteem: Denk b.v. aan de pabostudenten die de rekentoets, ook na scholing nog niet konden halen!

YY zegde me toe me een artikel te laten lezen, waarvan hij de indruk had dat dit aansloot bij mijn bevindingen.

Uw artikel in Nieuw Archief voor Wiskunde over Mythen in de Rekendidactiek is me uit het hart gegrepen en wat ik nog nooit gedaan heb: reageren en de schrijver via een e-mail berichten dat ik zijn betoog vanuit mijn ervaring uit de praktijk volledig onderschrijf, doe ik nu wel. En nu maar hopen dat de wijze woorden die u zegt gehoord worden op alle Pedagogische Academies, door de Inspectie, en last but not least door al die mensen voor de klas, zodat het rekenen weer een begrijpelijk en dus leuk vak wordt voor alle kinderen en ieder kind weer even goed kan rekenen als indertijd zijn opa (of oma natuurlijk).

4. ZZ schreef op 10-07-2007:

Geachte heer Van de Craats,

Graag wilde ik u bij deze laten weten dat ik het volledig eens ben met de tekst van dit artikel.

Vanaf de basisschool had ik al moeite met rekenen. Het trucjes toepassen werkte niet voor mij. Ik liep daar altijd in vast, want er waren toch weer uitzonderingen. En op die uitzonderingen ook weer uitzonderingen. Soms kwam ik tot een antwoord maar wist ik niet waarom. Mijn ouders hebben al die tijd mijn probleem aangekaart maar op school werd er niet geluisterd. Hetzelfde daarna op alle andere scholen. Uiteindelijk na van allerlei beroepen te hebben geproefd besloot ik dat ik juf op de basisschool wilde worden. Ik ging naar de MBO opleiding SPW. Weer het rekenen aangekaart, niks mee gedaan. De opleiding onderwijsassistent... zelfde verhaal. Ik kreeg geen bijlessen. Twee diploma's voor werk in het onderwijs... nooit een som voor mijn neus gehad. Eindelijk was mijn droombaan in zicht. Ik ging naar de Pabo. De hele zomervakantie heb ik door de Pabo aanbevolen boeken behandeld. Elke dag was ik er twee uur minimaal mee bezig. Ik zakte voor mijn eerste toets en had bijna de slechtste score van alle leerlingen op school. Bij de taaltoets scoorde ik echter erg hoog zonder daar iets voor te hebben gedaan. Na 4 maanden moest ik er weg. Mijn mentor: 'Je bent de meest gemotiveerde student en je scoort op alles boven gemiddeld, maar

de rekentoets zal je nooit halen. Je mag ook blijven, maar dat heeft geen zin. Dan moet je volgend jaar weg.' Ik had al moeite met sommen van groep 5.

Op mijn werk (als onderwijsassistent) waren ze geschokt dat ik moest stoppen, omdat ook zij lang niet iemand hadden gezien die al die jaren zo gedreven was om leraar te worden. En het heeft mijzelf zo geraakt dat ik de maanden erna verdoofd was. Niemand heeft mij ooit geholpen om beter te worden in het rekenen en daar moet ik de dupe van worden. Mensen spreken je erop aan. 'Weer een pabostudent die niet kan rekenen. Ben je echt zo dom? Zo moeilijk is het niet.' Mijn werk als onderwijsassistente doe ik niet meer met zoveel plezier. Want ik kan geen leraar basisonderwijs worden door mijn rekenprobleem. . . maar als assistent zetten ze je wel volledige dagen (onderbetaald) voor de klas en dan mag je wel rekenles geven. Okay, officieel zou het niet mogen, maar wie doet er iets aan? Het is voorgekomen dat ik drie maanden voor een overspannen leerkracht in moest vallen. Dan moet ik ook rekenles geven.

Door al deze dingen maakt het lezen van het artikel me ook kwaad. Want waarom snappen niet meer mensen hoe dit in elkaar steekt? Ik ben nu 25 jaar en ik zie het niet gebeuren dat ik ooit voor die klas zal staan. Het enige wat erop zit is wachten tot de opleiding weer gesplitst zal worden en ik enkel onderbouw-juf zou kunnen worden. Na al die jaren opleiding met dit doel heb ik geen motivatie meer om me helemaal om te laten scholen voor een ander vak. Dus zal ik het moeten doen met de zwakke banenmarkt en het slechte salaris van de onderwijsassistent. Terwijl de rest van de Pabo qua niveau voor mij niks voorstelde.

In antwoord op dit schokkende relaas heb ik mevrouw ZZ geschreven dat het mijn stellige overtuiging is dat iedereen met een redelijke intelligentie kan leren rekenen, en dat het volgens mij echt het failliet is van de 'moderne rekendidactici' dat ze gemotiveerde studenten zoals zij in de kou laten staan. In dit verband had ik ook ons Basisboek rekenen aanbevolen. Mevrouw ZZ antwoordde hierop:

(. . .) Ik zal eens gaan kijken naar het boek. Het punt bij de Pabo is dat zij het niet aanvaarden als men op een andere manier rekt dan hoe zij het willen en dus met de nieuwe didactiek. Maar dat ik kan rekenen weet ik ook zeker. Ik heb wellicht wat meer nodig om het opnieuw te leren. Hartelijk dank voor uw reactie.

In een reactie op de bovenstaande mailwisseling merkte iemand uit kringen van de moderne didactici op dat het relaas van ZZ bewijst dat zij juist volgens de 'klassieke methode' les zou hebben gehad, waarbij dan onder klassieke methode 'mechanistisch drilwerk' wordt verstaan. Ik denk dat dit niet het geval is: haar beschrijving duidt juist op wat tegenwoordig 'handig rekenen' genoemd wordt: voor elke nieuwe som een nieuwe truc. Die dan weer niet werkt in iets andere omstandigheden, voeg ik eraan toe. Maar voor de zekerheid heb ik haar om een toelichting gevraagd. Dit is wat zij me mailde. Lees vooral ook haar laatste alinea en vergelijk de inhoud ervan met de andere reacties, met name die van mevrouw JJ en die van mevrouw XX, allebei ervaren basisschooldocenten.

Geachte heer Van de Craats,

Waarop ik heb gereageerd was in eerste instantie echt op het trucjes toepassen. De trucjes waren misschien niet hetzelfde, maar feit blijft dat ze aanwezig waren en niet werkten voor mij (voor mij persoonlijk staat dat even los van het feit of het de oude of nieuwe manier is). En inderdaad voor elke som een nieuwe truc, want dat was precies waar ik op vastliep. Ik raakte daar alleen maar van in de war. Ik heb onder andere door dit grote rekenprobleem en de pesterijen die daarbij om de hoek kwamen kijken mijn herinneringen aan die basisschooltijd een beetje weggedrukt dus ik kan ook niet exact zeggen hoe ik precies heb leren rekenen. Ik kan wel zeggen dat het trucjes toepassen aanwezig was ... en dat ik er moeite mee had, omdat er altijd uitzonderingen waren waarop je dan weer een ander trucje moest toepassen. Wat ik nu zie is dat hij (*d.w.z. de didacticus die ik hierboven aanhaalde – JvdC*) de klassieke manier benoemt als 'trucjes toepassen' en u de nieuwe manier.

Het repertoire aan trucjes en zelf een foute variant bedenken was vooral heel herkenbaar bij het lezen van het artikel. Wanneer bleek op school dat ik moeite had met het rekenen kreeg ik juist nog meer trucjes aangeleerd. Dat ik eigenlijk niet begreep wat ik deed, maakte niet uit. Als ik maar het goede antwoord gaf. Bij een ander is het dus later een kwestie van even opruimen hoe je die sommen nu eigenlijk moest uitrekenen. Bij mij was alles al weg, simpelweg om het feit dat ik de manier van uitrekenen niet begreep. Als ik het had begrepen was ik er misschien daarna nog wel uitgekomen toen ik naar de Pabo ging. Het is denk ik wel een combinatie van wat een methode geeft en wat de docent ermee doet en bij mij hebben ze dus ook erg weinig gedaan.

Als het over het rekenonderwijs anno 2007 gaat, waar ik vanwege mijn baan als onderwijsassistente ook zicht op heb, kan ik zeggen dat ik elk jaar schrik van het hoge aantal kinderen dat uitvalt op rekenen. Bij die kinderen zie ik hetzelfde gebeuren als wat er bij mij gebeurde. Het wordt teveel en ze haken af. Er zijn weinig kinderen in de groepen 3 waar ik in werk die aangeven rekenen leuk te vinden en dat lijkt me toch een kwalijke zaak. Wanneer ik uitleg geef volgens de methode zijn er altijd nog teveel kinderen die het niet begrijpen. Ik maak alles visueel en vaak is er geen makkelijkere manier om het uit te leggen dan de manier waarop ik het al deed. Op zulke momenten weet ik me soms geen raad en heb ik toch te doen met ze. Vaak zit er geen logische opbouw in de methodes. Ik bereid dan mijn les voor vanuit de methode en moet de helft eruit laten, omdat het veel te hoog gegrepen is. Voor dat onderdeel is er op dat moment nog geen basis. Ik ben zelf dus tegen van alles aangelopen en ik zie dat kinderen dat nu weer doen. Waar het probleem exact zit is mij niet altijd even duidelijk.

5. **HP** schreef op 21-08-2007:

Vanmiddag sprak ik de directeur van een grote basisschool (750 leerlingen). Ik

wilde zijn mening (en die van het team!) weten over het realistische rekenen. Deze directeur heeft ook coördinerende taken op het gebied van rekenen in zijn regio. In 2001 kreeg zijn school van de inspectie kritiek over de verouderde rekenmethode op zijn school. Die kritiek was niet gebaseerd op een resultatenonderzoek, maar ging simpelweg uit van de veronderstelling dat verouderde methodes per definitie zwak zijn. Onder druk van de inspectie (en de overheid) ging men over op de (peperdure!) realistische rekenmethode RekenRijk. Een kanttekening is dat er in 2007 eigenlijk alleen maar gekozen kan worden uit realistische rekenmethoden. Ouderwetse methodes zijn effectief *ausradiert*. De directie van de school staat onder enorme druk. In vrijwel elke gespreksgroep zit wel een aanhanger van de realistische methode die als deskundige door de inspectie wordt aanbevolen.

Een samenvatting van zijn (door het team gedragen) opvattingen en ervaringen:

De rekenmethode is niet systematisch, maar verwarrend. De grondgedachte is, dat voorafgaand aan automatisering eerst inzicht moet worden verworven, maar de ervaring van de leerkrachten is dat de realiteit omgekeerd is. Er valt van alles aan te merken op de matige effectiviteit van de methode. Terzijde: ook over de taalmethode (spelling) regent het klachten van de zelfde aard (te weinig oefening). De ergste klacht van de leerkrachten is de hype van het *samenwerkend leren*, dat er alleen maar toe leidt dat de sterke leerling niet aan werken toekomt en de zwakke leerling (die met de concentratieproblemen!) voortdurend afgeleid wordt.

Mijn kanttekening hierbij over de school:

De school (liever gezegd: de leerlingen) presteert al jaren goed wat betreft de doorstroming naar het havo/vwo/gymnasium. Dat is niet gekomen onder invloed van de nieuwe methode, maar was al vóór 2001 bekend. Het is voor negentig procent een witte school in wat tien jaar geleden een nieuwbouwuurt was. Ik vrees dat de negatieve effecten van de moderne rekenmethode hierdoor slechts geleidelijk zullen doordringen (thuishulp van goed opgeleide ouders e.d.). Veel erger is, wat de zwakkere scholen wordt aangedaan.

6. JS schreef op 02-12-2007:

Geachte Heer Van de Craats,

Gisteren las ik uw artikel in het Tijdschrift voor Remedial Teaching. Met dank voor het heldere, duidelijke artikel. Ik denk dat veel mensen in het basisonderwijs blij zullen zijn met dit heldere standpunt.

Eindelijk! zal men zeggen.

Nu nog de mensen van het Freudenthal Instituut zo ver krijgen, evenals het Cito en niet te vergeten de Inspectie. Scholen kregen een onvoldoende van de inspec-

tie als ze het op de u beschreven (beproefde wijze) aanpakten en goede resultaten haalden! Naar de praktijk wordt niet geluisterd. Ik hoop dat uw artikel een omkeerpunt zal zijn.

Met vriendelijke groet,
JS, orthopedagoog

Naar aanleiding van de opmerking over de rol van de inspectie in de bovenstaande mails en soortgelijke geluiden die ik van veel anderen vernam, heb ik een bevreemde oud-inspecteur om commentaar gevraagd. Hier volgt een gedeelte uit zijn antwoordmail:

(. . .) Het is inderdaad een feit dat de inspectie primair onderwijs al jaar en dag nogal dicht tegen het 'realistisch rekenen' aan zit. Met name Wiskobas en aansluitende ontwikkelingen stonden en staan daar hoog aangeschreven en worden mede vanuit de inspectie primair onderwijs gestimuleerd met voorbijgaan aan andere vormen van rekenonderwijs. Een aantal inspectiemedewerkers primair onderwijs is afkomstig uit kringen rond realistisch rekenonderwijs en heeft daar zijn/haar hart aan verpand. Dat mag en kan natuurlijk, maar dat mag nooit tot gevolg hebben dat voorbijgegaan wordt aan andere didactische opvattingen. Nog steeds hebben we (gelukkig) geen staatsdidactiek en dienen ook andere wegen op hun merites beoordeeld te worden. Uiteindelijk dient het de inspectie te gaan om kwaliteitsevaluaties die los gezien moeten worden van al of niet gewaardeerde strategieën. Inderdaad is het waar dat meer traditioneel rekenonderwijs (whatever it may be!) door de inspectie tamelijk negatief beoordeeld wordt. Ook in mijn ogen een verontrustende zaak, waarvoor ik in mijn inspectietijd intern ook al menig keer aandacht heb gevraagd. (. . .)

Navraag bij de inspectie leverde als antwoord dat de inspectie de (eind)opbrengsten van scholen beoordeelt in relatie tot scholen met een vergelijkbare leerlingpopulatie. Daarnaast onderzoekt de inspectie (in het 'oude toezicht') of de gehanteerde rekenmethode van de school de kerndoelen rekenen/wiskunde behandelt. Het officiële standpunt luidt: 'De Inspectie voor het Onderwijs bemoeit zich niet met de manier waarop de kerndoelen worden bereikt; het is juist aan school/bestuur zelf om een keuze te maken.'

7. MW schreef op 03-12-2007:

Geachte heer Van de Craats,

Met heel veel plezier en genoeg las ik uw artikel in het Tijdschrift voor Remedial Teaching. Ik werk nu 32 jaar in het onderwijs, waarvan de laatste 5 jaar als remedial teacher. (. . .) De meeste aandacht gaat uit naar woordenschat en technisch lezen. De allochtone kinderen komen al met een grote achterstand het onderwijs binnen.

Toch krijg ik ook steeds meer aanmeldingen voor rekenonderzoek binnen. Het valt me dan op dat het inoefenen en automatiseren ernstig tekort schiet! De kinderen hebben zich allerlei trucjes en handigheidjes aangeleerd om tot oplossingen te komen. Vaak nemen ze zoveel onhandige stappen dat ze door de bomen het bos niet meer zien. Ook kennen ze de 'vriendjes van 10' onvoldoende waardoor de tientaloverschrijding moeizaam gaat.

In bijna ieder handelingsplan kan ik dit al standaard opschrijven. Ik vraag me dan ook regelmatig af of ik hiaten aan het wegwerken ben, of bezig ben met basisvaardigheden die eigenlijk in de klas thuishoren

Ik bied de kinderen één oplossing aan en werk op de ouderwetse manier. Vaak gaan ze dan heel snel vooruit. Ook valt het me op dat veel kinderen de formules niet begrijpen. Ze (en veel collega's!) weten niet dat het = teken 'is gelijk' of 'is hetzelfde' betekent. De beruchte stipsommen zijn dan veel te moeilijk. Als ik het principe uitleg aan de hand van een weegschaal snappen ze het ineens wel!

Verder zijn ze volgens mij te weinig echt in beweging, ervaren ze te weinig wat er nou eigenlijk gebeurt met rekenen. Zeker, ze tellen, turven, tekenen zich ongelukkig, maar het echte *doen* ontbreekt. Bij de \times sommen tellen ze eindeloos stapels koekjes met 5 nootje erop, flessen in kratjes, kaarsen in dozen e.d. Maar dat een vermenigvuldiging een herhaalde optelling is die verkort wordt in de formule weten ze niet!

Ik liet de kinderen in mijn klas altijd de beweging herhalen, b.v. 'Ga eens 5 keer naar het raam, tik 3 keer tegen je neus', enz. Met elastiekjes en blokjes MAB-materiaal liet ik dan de sommen leggen: 'maak 1 groepje van 3, leg nu eens 2 groepjes van 3', enz.

Dan zagen ze het 'trappetje' verschijnen en snapten ze wat er gebeurde. (. . .)

Ik heb uw artikel gekopieerd voor onze drie interne begeleiders en de zorgsectie. Ik ben benieuwd! Ik heb door uw artikel in ieder geval de bevestiging gekregen dat ik op de 'ouderwetse' manier dus nog niet zo heel fout bezig ben!

8. FS schreef op 10-12-2007:

Geachte meneer Van de Craats,

Ik heb onlangs uw artikel in het Tijdschrift voor Remedial Teaching gelezen en zat in mijn stoel te knorren van tevredenheid.

Ik werk sinds een aantal jaren als remedial teacher in het basisonderwijs en heb uren, zo niet dagen, doorgebracht met het zoeken naar geschikt materiaal om een leerling te leren cijferen. Ik kon hier in de huidige rekenmethodes niets over vinden. De leerling in kwestie verdronk in alle tussenstapjes en bleef dus fouten maken terwijl zijn inzicht goed was, zelfs beter dan zijn vijftigjarige super-alpha-r't'er. Terwijl ik hem de staartdelingen bijbracht, voelde ik me altijd wat schuldig

omdat dit volgens de meeste mij bekende literatuur 'niet mocht'.

In uw artikel heb ik eindelijk de bevestiging gevonden dat er wel degelijk goede redenen zijn om leerlingen te leren rekenen (cijferen) en dat 'handig rekenen' doorgaans zeer onhandig uitpakt. Veel dank hiervoor!

9. Arjen de Vries schreef op 22-12-2007:

Geachte heer Van de Craats

Eindelijk iemand die het realistische rekenen kritisch tegen het licht houdt. U noemt het 'terreur'. En u hebt gelijk. Mijn zwager en ik hebben in de tachtiger jaren een rekenmethode ontwikkeld met een strakke opbouwende methodiek. We hebben met vier uitgevers om de tafel gezeten. De directies waren aanvankelijk positief als wij vertelden hoe de methode in elkaar stak. Ze gingen daarna adviezen inwinnen bij hun didactici. Die waren allen op de toer van het realistisch rekenen. Onze methode was dan wel een verbetering van de bestaande rekenmethoden, maar sloot niet aan bij de nieuwe ontwikkelingen. In mijn eigen school (...) heb ik de nieuwe methoden aanvankelijk nog tegen kunnen houden. Ik vond ze gewoon slecht: *praat-methoden*. Terwijl ik liever een werkmethode voorstond.

Uiteindelijk moest ik onder druk van ouders een nieuwe methode aanschaffen. Het werd Pluspunt. Alleen de delen voor de groepen 3-5 waren verschenen. Ieder jaar kwam er een nieuw leerjaar gereed. Met de delen t/m groep 6 viel nog te werken. Toen kwam deel 7. Ik heb het een aantal maanden geprobeerd. Het lukte niet. Het werken met groep 7 kostte zoveel tijd, dat ik geen tijd overhield voor groep 8. En ging ik uitleggen bij groep 8, dan zaten de meeste leerlingen van groep 7 niks te doen, omdat ze niet verder konden. (...) Omdat ik boven de methode stond, ging het niveau niet naar de knoppen. Later heb ik in een jaar tijd voor de bovenbouw zelf een methode gemaakt door elke zaterdag lessen te maken voor mijn leerlingen. De resultaten waren fantastisch. Alle leerlingen deden bij mij mee aan de citotoets terwijl men op andere scholen de zwakke leerlingen buiten het toetsgebeuren hield (...), en nog waren mijn resultaten beter. (...)

10. AB schreef op 15-01-2008:

Geachte collega Van de Craats,

Naar aanleiding van uw artikel in "Tijdschrift voor Remedial Teaching" willen wij, mijn vrouw en ik, graag van harte onze steun en instemming uitspreken. Wij zijn beide, op verschillende fronten (mijn vrouw in haar praktijk als remedial teacher/orthopedagoge en ikzelf als docent aan de TU Eindhoven) actief in het onderwijs en wij worden, helaas, beide dagelijks geconfronteerd met de door u geschetste problematiek. Ook als ouder van twee schoolgaande kinderen (10 en

12 jaar) zien wij de door u geschetste problemen helaas dagelijks. Wij hopen dan ook van harte dat er naar de door u gedane aanbevelingen op een breed front geluisterd zal worden!

Twee reacties op het stuk van Marc Chavannes in NRC Handelsblad op de website van de krant:

11. Margot Koenderman *schreef op 30-12-2007:*

Geachte heer Chavannes,

Blijf alstublieft alert op dit onderwerp. Blijf uw kind volgen en zonodig, heel burgerlijk ongehoorzaam, de oude strategieën aanleren. Ik ben 64 en een ouderwetse schooljuf. Ik heb het hele proces meegemaakt. Ik heb er al bovenop gezeten bij mijn eigen kinderen in de jaren tachtig, want toen begon de teloorgang al. Ik heb nu een bijlesleerling, een Turks meisje uit groep 8. Ik laat haar nu de tafels leren en ik laat haar zien hoe je vandaar uit kan delen. Een openbaring voor haar, want ze leren niet om een structuur te herkennen, alles is nieuw. ZE IS 12!!!! Die methodes zijn een ramp voor alle niet-talige kinderen en ook voor alle kinderen die geen uitgesproken rekenaanleg hebben.

Op school kreeg ik steeds meer kinderen die met 8 jaar, zelfs onder de 10, niets geautomatiseerd hadden.

Blijf schrijven en wees alstublieft vasthoudend. Dit was een korte, emotionele reactie, maar ik zou er een avond over kunnen praten.

12. Henk Pfaltzgraff *schreef op 02-01-2008:*

Wat ik er uit eigen, recente, ervaring uit groep 4 aan toevoeg (na een gesprek met de juf) is, dat niet alleen die juf *maar ook de kinderen* hun plezier en ambitie aan het verliezen zijn. En gaandeweg het schattend, happend, babbelend, gekunsteld, geïllustreerd en onzeker makend rekenen in de klas beginnen te haten. Mijn kleindochter (net 7 geworden) is de laatste maanden haar plezier in sommetjes van opa helemaal kwijt geraakt. Af en toe moet ik haar helpen met een ook voor mij onduidelijke tekst uit het werkschrift van RekenRijk. En de tafels van vermenigvuldiging zitten er nog steeds niet in, terwijl dat kind een geheugen heeft waar ik zelf niet aan kan tippen.

Het volgende fragment komt uit een mail die ik al eind 2006 van een ervaren wiskundelerares ontvangen heb. De inhoud is echter ook zeer relevant voor de bovenstaande discussie.

13. Riet Bosman schreef op 08-12-2006:

(...) Er zit me nog een vraag dwars: 'Waar waren alle wiskundedocenten toen de basisschool misvormd werd?' Mijn zus werd van kleuterjuf opeens bevoegd tot en met groep 8 (= vroegere klas 6). Twee vakken mocht zij bijscholen! 'Riet,' zei ze 'ik doe geen rekenen, want dat vraag ik wel aan jou'. Verstandig leek me dat, maar echt niet iedereen was zo verstandig een vak te kiezen waar ze wat aan hadden. Nu hebben de leeftijdgenoten van mijn zus meestal goed basisonderwijs gekregen en hebben zij minimaal een mulo-diploma en dat was zo'n beetje gelijk aan een ouderwets havo-diploma.

Een andere ervaring: mijn dochter heeft een redelijk ouderwetse basisschool bezocht (met staartdelen en breuken vermenigvuldigen en delen), daarna basisvorming en toen de oude havo-bovenbouw met wiskunde, natuurkunde, scheikunde en als vervolgopleiding pabo. Zij was de enige eerstejaars die nog ouderwets had leren rekenen. Zij was de enige die na de colleges 'didactiek van het rekenen' (rekenlessen werden niet gegeven) de rekentoets voldoende maakte. Zij heeft op verzoek van de pabo tegen betaling studenten bijles gegeven. Zij kreeg ook de opdracht rekentoetsen na te kijken. In de correctiemodellen zaten fouten. De toetsen waren in Rotterdam al afgenomen en nagekeken. Zij heeft gevraagd of ze de goede antwoorden conform het correctiemodel fout moest rekenen. Laat maar open, was de reactie, die opgaven doen wij wel. Nooit meer iets van gehoord. Ze kon vragen wat ze wilde, maar kreeg nooit antwoord. Dit zijn wel mensen die in de collegezaal maar beweren dat 'rijtjes racen' zo fout is.

Dan is daar mijn zoon die door de directrice van de school uitgelegd krijgt dat $24 : (1/4) = 6$. Dit wordt op verschillende manieren uitgelegd, maar mijn zoon wil er niet aan, want 24 gedeeld door 1 is 24 en $1/4$ is minder dan 1 dus moet er meer uitkomen. Zij vindt nog steeds dat er 6 uitkomt en om het te bewijzen pakt ze een rekenmachine en toetst ' $24 : 1 : 4 =$ ' in en krijgt 6. Zie je nu wel!! (...)

Dr. C.M. van Putten, als methodoloog verbonden aan de afdeling Psychologie van de Faculteit der Sociale Wetenschappen, Universiteit van Leiden en auteur van een bijdrage over strategiegebruik bij delingsopgaven in het PPO-rapport, mailde me naar aanleiding van de vele artikelen in de media over de rekenproblematiek:

14. Kees van Putten schreef op 28-01-2008:

(...) De ironie van het lot wil dat zowel mijn vroegere onderzoek naar de zorgleerlingen van het beroepsonderwijs (proefschrift uit 1987), als mijn huidige onderzoek naar rekenstrategieën van basisschoolleerlingen nu ineens uiterst actueel werden. Mijn eerste onderzoekjes naar de traditionele staartdeling dateren uit 1989; het was toen werk op de vierkante millimeter (computersimulatie van staartdelen als een regelgeleide cognitieve vaardigheid) en het interesseerde vrij-

wel niemand. Nu strijdt men publiekelijk om de staartdeling (ook in de USA is er een *war on math*).

Op de Onderwijs Research Dagen op 6 juni 2007 in Groningen heb ik een presentatie verzorgd over strategiegebruik bij het onderdeel *Bewerkingen: vermenigvuldigen* uit PPOON 1997 en 2004.

Tot dan toe beperkten onze aanvullende analyses van het PPOON-materiaal zich tot de *Bewerkingen: deelsommen*. In 2006 hebben Marian Hickendorff en ik samen met een groep van zes psychologiestudenten bijna 10 000 vermenigvuldigingopgaven van ruim 1500 leerlingen bekeken in de PPOON-toetsboekjes die door het Cito aan de Universiteit Leiden ter beschikking zijn gesteld. Dit zijn de eerste resultaten en mijn AIO Marian gaat binnenkort beginnen met gedetailleerdere analyses.

De traditionele vermenigvuldiging ‘onder elkaar’ (zoals opa het deed) komt nog steeds veel voor (in tegenstelling tot de staartdeling), maar is wel aan het teruglopen in 2004 vergeleken met 1997.

Ik heb speciaal ingezoomd op de opgave $99 \times 99 = ?$ omdat deze zich zo goed leent voor de zogenaamde realistische aanpak. Ik heb een groot deel van testboekjes met deze opgave uit PPOON 2004 op een avond zelf nagekeken en heb die nacht bijzonder slecht geslapen: zolang de leerlingen maar ‘volgens opa’ rekenden, ging het meestal goed, maar realistische aanpakken via bijvoorbeeld 100×99 of 100×100 leverden een slagveld aan foutieve uitwerkingen en antwoorden op. Het begon al met fouten in 100×99 of 100×100 (met fouten als 990 respectievelijk 1000 of 100 000), en vervolgens het probleem hoeveel daarvan af te trekken (compenseren) met fouten als 1 of 2, 100 of 200 eraf. Eigenlijk was alleen de traditionele aanpak hier succesvol en konden alleen de sterke rekenaars (beste 33%) zich een realistische aanpak veroorloven; alle andere combinaties waren kansloos.

Deze opgave bleek ook lastig op de nationale rekentest van december j.l. omdat die daar onder tijdsdruk uit het hoofd gedaan moest worden. Twee van de drie finalisten bezweken en toen kreeg de derde de tijd om het goed uit te rekenen: $(100 \times 99) - 99 = 9801$.

Komende maand gaan we samen met twee psychologiestudenten kijken naar het onderdeel *Bewerkingen: aftrekken*. In juli zullen hun bachelorscripties naar verwachting afgerond zijn en weten we hopelijk weer iets meer over de impact van het realistisch rekenen op het einde van de basisschool. Helaas alleen over PPOON 2004, want het 1997-materiaal is op het Cito niet bewaard gebleven. Eigenlijk zou de overheidssubsidie voor PPOON ook archivering of digitalisering van de oorspronkelijke toetsboekjes mogelijk moeten maken.

Ik voeg hier nog het volgende aan toe. Bij het slagveld aan problemen in de realistische aanpak van de opgave 99×99 rees bij mij de vraag waarom getalbegrip, inzicht en schattend rekenen hier zo weinig leerlingen op het juiste pad hielden. Deze speerpunten van het realistisch rekenen laten op de peilingen voor-

uitgang zien, maar blijken niet goed te functioneren als er een beroep op wordt gedaan. Waarom gaat 100×100 of 100×99 zo vaak fout? Hoezo getalbegrip? Waarom wordt zo vaak een onjuiste compensatie gebruikt? In het oppervlakte-model van 100×100 tegels verwijder je eerst 100 en daarna 99 tegels, zodat je op 9801 uitkomt voor een oppervlakte van 99×99 . Geen enkele leerling in het PPO-materiaal heb ik een dergelijke visualisatie zien gebruiken; hoezo inzichtelijk rekenen?

Ik heb de indruk dat de Freudenthalers er geen benul van hebben hoe lastig 'inzicht' als onderwijsdoel eigenlijk is en voor hoe weinig leerlingen het tenslotte is weggelegd.

15. FW schreef op 10-02-2008:

Geachte heer Van de Craats,

Ik hou het zo kort mogelijk, u krijgt vast veel steunbetuigingen en dit is er weer een. Mijn dochter had de domme pech om in de derde klas van de lagere school over te moeten schakelen van het klassiek rekenonderwijs (conform uw ideeën) naar de methode Rekenrijk (onder dwang van de onderwijsinspectie). Ze is niet dom, maar ze kan niet rekenen (ze is inmiddels 16 jaar). Verstrikt en verward in truukjes ziet ze door de bomen het bos niet. Ik steun u van ganser harte in uw strijd.

Nu de opmerking:

Als ik met mijn dochter huiswerk doe, merk ik dat ze niet alleen niet kan rekenen maar ook dat ze nooit echt geïnternaliseerd heeft wat bijvoorbeeld vermenigvuldigen of delen is. Voor haar zijn dat aparte vaardigheden en geen automatismen. Toen ik haar vroeg de totale afstand uit te rekenen die een fietser met een snelheid van 23 km/u in 97 minuten aflegt, herkende ze dat niet als een vermenigvuldiging: 'eh, . . . moet je dan delen?' Ik heb geen antwoord gegeven maar toen gevraagd 'een fietser fietst met een snelheid van 20 km/u, welke afstand legt hij af in 4 uur?' En toen gaf ze het juiste antwoord vlot!

Volgens mij is dit de kern van mijn observatie: het inzichtelijk rekenen volgens de realisten leidt alleen tot inzicht in de eenvoudige gevallen waar het realistisch rekenen goed werkt. Precies in lijn met uw betoog: inzicht is het gevolg van het oefenen. Beperkt oefenen leidt tot beperkt inzicht!

Ik denk ook dat het komt omdat vermenigvuldigen (of delen) zélf te veel van haar aandacht opeist. Als er een complex probleem (de fietser) in haar 'werkgeheugen' zit, is er geen plaats meer voor de andere complexe handeling (het vermenigvuldigen). Ik heb nog op opa's manier leren rekenen en heb zelf het idee dat bij mij die vermenigvuldigingsgedachte maar heel weinig geheugenruimte inneemt, waardoor ik al mijn aandacht en creativiteit aan het probleem (de fietser) kan geven. Als mijn idee klopt is dat een extra argument voor uw kruistocht.

Ik las daarover niet op uw website, dus dacht: ik schrijf het maar eens op en stuur het aan hem. Bij deze!

De volgende reactie verscheen op de ingezonden brievenpagina van NRC Handelsblad:

16. Mevr. P.H. Oprinsen schreef op 09-02-2008:

Toen ik ontdekte dat mijn kinderen nooit hadden gehoord van de staartdeling, was ik even van mijn stuk gebracht. Helemaal in de war raakte ik van de ingewikkelde en onprecieze gokmethode die ze me toen voordeden ter berekening van een deling. Mijn oplossing was als volgt: in een kwartiertje heb ik ze geleerd hoe een staartdeling werkt en eens in de zoveel tijd maak ik er vijf en die maken ze dan. 'Tsjee, dit is best leuk' of 'dit gaat veel sneller', verzuchten ze dan.

17. MD schreef op 12-02-2008:

Geachte heer Van de Craats,

Met grote interesse heb ik het NRC-artikel gelezen dat ging over het rekenonderwijs van ook mijn kinderen. Al langer is het zo dat wij ons in het onderwijsniveau van onze kinderen verdiepen. Afgelopen week kwam ik er dus inderdaad achter dat mijn zoon van net 12, ja inderdaad vandaag de CITO-toets, helemaal niet eens achter de komma kan delen! Al die tijd had ik mij in slaap laten wiegen door hele goede cijfers op school. Naar aanleiding van het artikel testte ik hem eens uit met grote getallen. Resultaat: schatten en raden, en fout. Wat is er mis mee om het gewoon even uit te rekenen? vroeg ik. Dat hoeven we niet! Halverwege het basisonderwijs wisselde mijn zoon van school en dus van *Wereld in Getallen* naar *Rekenrijk*. Met die eerste methode heette het dat hij het maar niet snapte, bij de tweede viel er dan wel een kwartje. Toen ik zei dat er wel tien manieren zijn om een kind rekenen te leren, werd mij verboden de traditionele methode (die hij snapte in een half uur) te gebruiken. Nu hebben we ook problemen met de jongste, en je mag er gewoon niets mee. Ik heb net zijn juf aan de lijn gehad. Nee, ze zit op een rekencursus en hun methode hoort echt tot de allerbeste. Let wel, mijn oudste zoon is een prima leerling, het wordt hem gewoon niet geleerd.

Onze lokale Voortgezet Onderwijs Instelling is ten prooi gevallen aan een miljoenenslurpende *Nieuw Leren*-methode. Na een driejarige schandelijke test die *Slash* heette, worden er nu weer 500 kinderen geslachtofferd in een nieuw project. Onze dochter gaat om die reden naar eigen keus elke dag 9 kilometer op de fiets naar een gewone school. Ze wil tandarts worden en niet loten. Eigen uitleg: *als ik daarheen ga, feesten we de hele dag en geen huiswerk. Dan wordt het tandartsassistente. Ze staat een negen voor wiskunde . . .*

De cijfers die ik zie bij de onderwijsinspectie zijn heel anders dan de werkelijke situatie. Na *Slash* gingen er veel kinderen naar een 4-havo jaar. Dat jaar bleven er vier complete klassen extra zitten. Dat zijn zeker zestig kinderen. Ik kom ze niet tegen in de statistieken. Mijn nichtje was een van de twee leerlingen van een hele klas die overging naar havo 5. De rest niet. En ja, 8 maanden bijles. Het vmbo alhier heeft een record aantal zakkers gehad naar ik hoorde; niets van te zien.

Als ik kijk naar hoe het allemaal gaat dan zijn wij gelukkig beiden gezegend met een goede opleiding. Wij zijn nog in staat onze kinderen te helpen. Maar voor veel ouders geldt dat niet. Mijn nichtje uit 4 vwo loopt vast op economie. Ja inderdaad, ze kan niet rekenen. Hypotheekformules, uuhhhh. Bijna een perfecte Cito-toets had ze.

Hoezo gelijke kansen voor alle kinderen? Het is iets waar ik mij buitengewoon boos over kan maken, het gesol met de toekomst van onze kinderen door een achterhaalde zeventigerjarenclub.

In het bedrijfsleven 'bieden ze geen stof aan', ze eisen een prestatie voor hun geld. Acceptatie 'dat de jeugd maar een aandachtsspanne heeft van 30 minuten, dan moeten ze er echt even uit' (echt gezegd door een directeur van een middelbare school) brengt ze pas goed in de narigheid: wat dacht je, dat de baas straks acht koffiepauzes inlast?! Als wij onze kinderen aan tafel vertellen over allerlei zaken die te maken hebben met hun schoolonderwerpen dan hangen ze aan onze lippen. Ja zegt de school dan; wat weten ze toch veel! Kinderen zijn een spons, ze willen echt wel kennis vergaren, aan de kinderen ligt het niet. Aan ons wel. Vorige week las ik de Frankfurter Allgemeine op vakantie. Ook in Duitsland schijnt het een probleem te zijn. Wat ik nu maar niet begrijp is dat we niet gewoon kijken naar landen die op het hoogste niveau staan. Om ervan te leren en het kunstje af te kijken. Finland schijnt het erg goed te doen op de basisschool.

Ik ben blij dat er nu eindelijk wat op gang komt, ik hoop dat u succes heeft. Mijn frustratie als ouder is dat ik eigenlijk bijna niets kan, het is roeien tegen de stroom in. Ik word er zo boos van!

Een zeer bezorgde en ook boze ouder.

Onder andere naar aanleiding van deze brief en soortgelijke reacties: niet alleen Finland doet het in internationale vergelijkingen altijd heel goed, maar ook Vlaanderen. Bij de TIMSS en PISA-testen staat Vlaanderen bij wiskunde en rekenen als eerste van alle Europese landen. We spreken dezelfde taal, hebben hetzelfde metrieke stelsel, hebben dezelfde munteenheid, waarom gaan we niet over op het Vlaamse lesmateriaal?

18. WW schreef op 23-02-2008:

Beste Jan van de Craats,

Ik ben pas afgestudeerd aan de pabo. Sinds 1 december 2007 ben ik werkzaam

als leerkracht. Ik geef les aan een groep 5/6. We werken met de methode *Alles telt*. Vanochtend stond in de Telegraaf een artikel waarin u pleit voor het invoeren van een Vlaamse rekenmethode. Ik vond het artikel erg interessant om te lezen. Ik merk bij mijn rekenzwakke leerlingen ook dat ze moeite hebben met de realistische rekenmethode en niet weten met welke oplossingsstrategie ze moeten werken. Sommige kinderen zie ik gewoon verzuipen in de methode. Persoonlijk kan ik me wel vinden in uw bevindingen. Ik hou zelf erg van duidelijke oplossingsstrategieën.

Het is frustrerend om na vier jaar hbo-onderwijs te vernemen dat de realistische rekenmethode niet het gewenste effect heeft in de praktijk. Ik heb dus een hbo opleiding gevolgd waarin mij is verteld hoe ik rekenles moet geven, maar waarvan nu blijkt dat het totaal niet effectief is. Ik voel me nu geen professioneel leerkracht met betrekking tot het rekenonderwijs.

Op school lag er onlangs een artikel van u in mijn postvak uit het Tijdschrift voor Remedial Teaching 2007/5. Hierin bespreekt u drie mythen uit het rekenonderwijs. Erg interessant om te lezen. Het had voor mij persoonlijk echter wel de invloed dat ik aardig begin te twijfelen hoe ik goed rekenonderwijs moet geven. Als beginnende leerkracht ben ik erg zoekende en moet ik nog veel leren. Ik heb behoefte aan duidelijkheid zodat ik mijn kinderen goed les kan geven. Echter alle artikelen die er nu verschijnen maken mij onzeker over hoe ik rekenles moet geven.

Mijn vraag is dan ook: Wat moet ik nu doen?? In het artikel pleit u eigenlijk voor het afschaffen van de realistisch rekenmethodes. Daar kan ik wel inkomen, maar zo gemakkelijk gaat dat natuurlijk niet. Wat moet ik nu dan doen met mijn kinderen in de klas?

Ik ben erg benieuwd naar uw reactie hierop.

Met vriendelijke groet,

WW, een beginnende leerkracht die nu niet weet wat hij aan moet met het rekenonderwijs

Uit mijn antwoord citeer ik:

Uw ervaringen verbazen me niet: ze zijn in lijn met mijn verwachtingen over de resultaten van de huidige rekenmethodes en de huidige pabo-opleidingen. Maar natuurlijk wilt u nu wijze raad over hoe verder goed rekenonderwijs te geven. (...) Ik zend uw mail daarom door naar Rob en Marisca Milikowski van *de Rekencentrale* in Amsterdam, en naar Arjen de Vries, ervaren (ex)basisschooldocent. (...) En als persoonlijk raad geef ik u: zorg dat u zelf uitstekend kunt rekenen en gebruik voortdurend uw gezonde verstand om te toetsen wat in de klas werkt en wat niet, en pas uw onderwijs daaraan aan. Veel succes; ik blijf graag op de hoogte van uw ervaringen!

Boeken, artikelen, rapporten en websites

- [1] Jos van den Bergh, Petra van den Brom-Snijders, Marijke Creusen, Jan Haarsma, *Rekenwijzer*, ThiemeMeulenhof, Utrecht/Zutphen, 2005, ISBN 90-06-95503-5
- [2] Jan van de Craats, Rob Bosch, *Basisboek rekenen*, Pearson Education, Amsterdam, 2007, ISBN 978-90-430-1394-9
- [3] Fred Goffree, Wil Oonk, *Reken Vaardig – Op weg naar basale en professionele gecijferdheid*, Wolters-Noordhoff, Groningen/Houten, 2004, ISBN 90-01-21508-4
- [4] Ed de Moor, Willem Uittenbogaard, Sieb Kemme (eindredactie), *Basisvaardigheden rekenen voor de pabo*, Wolters-Noordhoff, Groningen/Houten, 2006, ISBN 90-01-85014-6
- [5] Jan van de Craats, *Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen*, Nieuw Archief voor Wiskunde, vijfde serie, jaargang 8, nr. 2, juni 2007, 132-136. Ook verschenen in het Tijdschrift voor Remedial Teaching, 15e jaargang, november 2007, 10-14.
- [6] Jan Jansen, Frank van der Schoot, Bas Hemker, met een bijdrage van Cornelis M. van Putten, *Balans [32] van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4, Uitkomsten van de vierde peiling in 2004*, Cito, 2005.
Dit is het PPOON-rapport. Het kan worden gedownload vanaf:
http://www.citogroep.nl/share/PPON/Cito_pponbalans_32.pdf.
- [7] Een gerelateerde uitgave is *Onderwijs op peil? Een samenvattend overzicht van twintig jaar PPOON* door Frank van der Schoot, projectleider PPOON (Cito, Arnhem, februari 2008). Dit rapport kan worden gedownload vanaf:
http://www.cito.nl/po/ppon/alg/Cito_PPON_20_jaar.pdf
- [8] *Over de drempels met taal en rekenen*, eindrapport van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen, januari 2008. Dit rapport (3 delen) kan worden gedownload vanaf <http://www.taalenrekenen.nl> (SLO, Enschede).
- [9] PISA-rapporten, zie: <http://www.pisa.oecd.org/>
- [10] TIMSS-rapporten, zie: <http://nces.ed.gov/timss/index.asp>
- [11] Rapport van het Centraal Planbureau over o.a. TIMSS en PISA, zie: <http://www.cpb.nl/nl/pub/cpbreeksen/bijzonder/69/>

[12] <http://www.rekencentrale.nl/>. Dit is de website van *De rekencentrale* van Rob en Marisca Milikowski. Hier is het artikel van bladzijde 33 te vinden over de 'bananensom', maar ook andere lezenswaardige artikelen, bijvoorbeeld *Kolomsgewijs rekenen: terug naar de twaalfde eeuw* of *Afscheid van het cijferen* over rekenen in het Speciaal Basisonderwijs.

[13] <http://www.liesbethvanderplas.nl/>. Dit is de website van Liesbeth van der Plas, auteur, ontwerper en programmeur van educatieve software. Haar tekst *Minder bekende problemen van het Nederlandse wiskundeonderwijs* kan daar als pdf-file worden gedownload.

(Zie http://www.liesbethvanderplas.nl/_userdata/AAAonderwijs.pdf.)

Ik verwijs op de bladzijden 5 en 16 van dit zwartboek naar de hoofdstukken 1 en 4 van haar tekst, maar ook verder is deze gedegen, helder geschreven analyse van de huidige rekenproblematiek een aanrader!