

Opgave 1 (De fundamentealgroep is een groep). Completeer het bewijs dat de fundamentealgroep $\pi_1(X, x_0)$ van een topologische ruimte X een groep is: Laat zien dat voor drie lussen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ geldt $(\gamma_3 * \gamma_2) * \gamma_1 \sim \gamma_3 * (\gamma_2 * \gamma_1)$.

Opgave 2 ($\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$). Bewijs dat de $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ is. Aanwijzing:

Noem $\exp: \mathbf{R} \rightarrow S^1$ de afbeelding $t \mapsto e^{2\pi it}$. Dan is er voor elke lus $\gamma: I \rightarrow S^1$ met $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$ precies een pad $\tilde{\gamma}: I \rightarrow \mathbf{R}$ met $\tilde{\gamma}(0) = 0$ en $\exp \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ (zo een $\tilde{\gamma}$ heet lift van γ):

- (1) Noem $S^+ := S^1 - \{-1\}$ en $S^- := S^1 - \{1\}$. Dan is voor $n \in \mathbb{Z}$ de afbeelding $\exp: (-\frac{1}{2} + n, \frac{1}{2} + n) \rightarrow S^+$ een homeomorfisme. Dus is er een $s > 0$ z.d. er $\tilde{\gamma}: [0, s) \rightarrow \mathbf{R}$ bestaat met $\tilde{\gamma}(0) = 0$ en $\exp \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ voor $t \in [0, s)$. Definieer s_0 het supremum over alle s z.d. zo een $\tilde{\gamma}$ bestaat en bewijs dat $s_0 = 1$ is.
- (2) Bewijs dat er maar één $\tilde{\gamma}$ is. (Want de verzameling waar twee liftings $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'$ gelijk zijn, is afgesloten en open).
Wij kunnen dus definiëren $\text{Omloop}(\gamma) := \tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$.
- (3) Er geldt $\text{Omloop}(\gamma_1 * \gamma_2) = \text{Omloop}(\gamma_1) + \text{Omloop}(\gamma_2)$.
- (4) Als $\text{Omloop}(\gamma) = 0$ is, dan is $\gamma \sim e$.
- (5) (iets moeilijker) Als $\gamma \sim \gamma'$ dan is $\text{Omloop}(\gamma) = \text{Omloop}(\gamma')$. Om dit te bewijzen herhaal deel 1 van deze opgave als volgt: Voor een homotopie H van γ naar γ' is er precies een $\tilde{H}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ z.d. $\tilde{H}(0, s) = \tilde{\gamma}(s)$ en $\exp \circ \tilde{H} = H$. En dan is automatisch $\tilde{H}(t, 0) = 1$ en $\tilde{H}(1, s) = \tilde{\gamma}'(s)$.
- (6) Vind voor elke $m \in \mathbb{Z}$ een lus γ z.d. $\tilde{\gamma}(1) = m$.

Opgave 3. (Categorieën) Als X, Y topologische ruimten zijn, dan is het product $X \times Y$ gedefinieerd. Er zijn twee projecties $p_X: X \times Y \rightarrow X$ en $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$.

- (1) Breng in herinnering dat voor iedere topologische ruimte T de afbeelding:

$$\begin{aligned} \text{Mor}(T, X \times Y) &\rightarrow \text{Mor}(T, X) \times \text{Mor}(T, Y) \\ f &\mapsto (p_X \circ f, p_Y \circ f) \end{aligned}$$

een bijectie is.

- (2) Stel dat omgekeerd dat Z een willekeurige ruimte is, waarvoor er afbeeldingen $p: Z \rightarrow X$ en $q: Z \rightarrow Y$ zijn zodat voor iedere topologische ruimte T de afbeelding:

$$\begin{aligned} F_{p,q}: \text{Mor}(T, Z) &\rightarrow \text{Mor}(T, X) \times \text{Mor}(T, Y) \\ f &\mapsto (p \circ f, q \circ f) \end{aligned}$$

een bijectie is. Dan zijn Z en $X \times Y$ homeomorf.

Als X, Y objecten van een willekeurige categorie \mathcal{C} zijn, dan noemen wij een object Z voor wie er twee afbeeldingen $p: Z \rightarrow X$ en $q: Z \rightarrow Y$ zijn z.d. voor alle T de afbeeldingen $F_{p,q}$ bijectief zijn het *product van X en Y* . Gaan naar dat je net bewezen heeft dat als $(Z, p, q), (Z', p', q')$ allebij een product van X en Y zijn, dat dan Z en Z' isomorf zijn. Wij schrijven dus vaak $X \times Y$ voor een product van X en Y .

Geef een voorbeeld van een andere categorieën waar voor elk paar van objecten X, Y een product $X \times Y$ bestaat.

Extra opgave: Geldt dit ook in de categorie Top^\bullet van gepunteerde topologische ruimten?

Opgave 4. Bewijs dat $\phi: \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ gedefinieerd door $\phi([\alpha]) = ([p \circ \alpha], [q \circ \alpha])$ een isomorfisme van groepen is.

OPGAVEN ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE, SERIE 2

Opgave 5. Laat C een categorie zijn. Bewijs dat voor ieder object X van C het identiteitsmorfisme id_X éénduidig bepaald is.

Opgave 6. Laat I een partiëel geordende verzameling zijn. Laat zien dat I éénduidig een categorie $C(I)$ bepaalt met $\text{Ob}(C(I)) = I$ en $\text{Mor}(i, j) = \emptyset$ als $i > j$ of i en j niet vergelijkbaar zijn, en verder $\#\text{Mor}(i, j) = 1$ als $i \leq j$.

Opgave 7. Laat C een categorie zijn. Definiëer een categorie C^o met $\text{Ob}(C^o) = \text{Ob}(C)$. [Noteer voor een object X van C het corresponderende object van C^o met X^o .] Verder stellen we $\text{Mor}_{C^o}(X^o, Y^o) := \text{Mor}_C(Y, X)$. [Noteer voor $\alpha \in \text{Mor}(Y, X)$ het corresponderende element van $\text{Mor}_{C^o}(X^o, Y^o)$ met α^o .] Laat verder $\beta^o \circ \alpha^o := (\alpha \circ \beta)^o$ en $\text{id}_{X^o} := (\text{id}_X)^o$. Ga na dat dit inderdaad een categorie levert; de ‘tegengestelde’ categorie. (Eng: opposite category)

Opgave 8. Laat C_1 en C_2 categorieën zijn. Een contravariante functor $F : C_1 \rightarrow C_2$ levert een covariante functor $C_1^o \rightarrow C_2$ en omgekeerd. Ga dit na.

Opgave 9. Laat $C = \text{Gr}$ de categorie van groepen en homomorfismen van groepen zijn. Definiëert het voorschrift $F(G) = Z(G)$, het centrum van G , en $F(\alpha) = \alpha|_{Z(G)}$ voor $\alpha \in \text{Hom}(G, G')$ een functor?

Opgave 10. Ga in detail na dat $\pi_1 : \text{Top}^* \rightarrow \text{Gr}$ een functor is.

Opgave 11. Geef een voorbeeld van een categorie zonder product.

Opgave 12. Laat een simplex $\sigma = [a_0, \dots, a_n]$ in \mathbf{R}^N gegeven zijn. Laat zien dat het voorschrift

$$[a_0, \dots, a_n] \mapsto (-1)^i [a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n]$$

de geïnduceerde oriëntatie op de $(n-1)$ -simplices geeft.

Opgave 13. Laat $\sigma = [a_0, \dots, a_n]$ in \mathbf{R}^N een simplex zijn. Definiëer de rand $\partial_n \sigma$ van σ als $\sum (-1)^i [a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n]$. Laat zien dat de rand van de rand nul is: $\partial_{n-1} \partial_n \sigma = 0$.

Opgave 14. Is $X := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ een polyeder? In dat geval, geef een complex K en beschrijf een homeomorfisme $\phi : |K| \rightarrow X$.

Opgave 15. Een afbeelding $f : [a_0, \dots, a_n] \rightarrow \mathbf{R}^k$ heet *affien* als $f(\sum_i t_i a_i) = \sum_i t_i f(a_i)$ voor alle $t_i \in \mathbf{R}$ met $\sum_i t_i = 1$. Geef een expliciete formule voor de affiene afbeelding tussen de twee simplices $[a_0, a_1]$ en $[b_0, b_1]$. Toon aan hoe je met deze formule Opgave 1 kan bewijzen.

Opgave 16. Is er een coproduct in Top ?

OPGAVEN ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE, SERIE 3

Opgave 17. Laat zien dat voor een exacte rij $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ geldt $C = 0$ dan en slechts dan als $A \rightarrow B$ surjectief en $D \rightarrow E$ injectief is.

Opgave 18. Welke korte exacte rijen $0 \rightarrow \mathbb{Z}/4 \rightarrow \mathbb{Z}/8 \times \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/4 \rightarrow 0$ zijn er?

Opgave 19. Definier een rij $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta_3} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta_2} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ door $\delta_3(m) = (cam, cbm)$ en $\delta_2(m, n) = bm - an$, waarbij a, b en c vaste gehele getallen zijn. Laat zien dat deze rij een complex definiëert, en bereken zijn homologie.

Opgave 20. Geef een triangulering van de bol, en van de X uit Opgave 14 en bereken daarmee de homologie.

Opgave 21. Realiseer het reële projectieve vlak als simpliciaal complex en bereken de homologiegroepen.

OPGAVEN ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE, SERIE 4

Opgave 22. Laat $f_i : X \rightarrow Y$ voor $i = 1, 2$ twee continue afbeeldingen van een compacte topologische ruimte naar een metrische ruimte zijn. Bewijs dat $d(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} \delta(f_1(x), f_2(x))$ met δ de afstandsfunctie op Y een afstandsfunctie op $\text{Mor}(X, Y)$ geeft.

Opgave 23. Laat K en L twee simpliciale complexen zijn en laat δ een Lebesguegetal voor de overdekking van $|L|$ door de open sterren van zijn hoekpunten zijn. Laat zien dat ieder tweetal continue afbeeldingen f_1, f_2 van $|K|$ naar $|L|$ met $d(f_1, f_2) < \delta/3$ een gemeenschappelijke simpliciale approximatie hebben.

Opgave 24. Maak Opgaven 29, 30 en 31 uit Matveev.

OPGAVEN ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE, SERIE 5

Opgave 25. Bewijs dat homotopie-equivalentie een equivalentierelatie is.

Opgave 26. Laat X een topologische ruimte zijn en $A \subset X$ een deelruimte. Een retractie van X op A is een continue afbeelding $r : X \rightarrow X$ met $r(X) = A$ en $r|_A = \text{id}_A$. Een deformatieretractie van X op A is een retractie r van X op A zo dat er een homotopie $\text{id}_X \sim r$ is. i) Construeer voor $n \geq 1$ een deformatieretractie van $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ met de $n - 1$ -sfeer S^{n-1} . ii) Construeer een deformatieretractie van de 2-torus $S^1 \times S^1$ minus een punt op $(S^1 \times p) \cup (q \times S^1)$ voor vaste $p, q \in S^1$.

Opgave 27. Bewijs dat het retract van een samentrekbare ruimte samentrekbaar is.

Opgave 28. Laat $r : X \rightarrow A$ een retractie zijn met $i : A \rightarrow X$ de inclusie. Bewijs dat $i_* : H_n(A) \rightarrow H_n(X)$ injectief is, $r_* : H_n(X) \rightarrow H_n(A)$ surjectief is, en $H_n(X)$ de directe som van het beeld van i_* en de kern van r_* is.

Opgave 29. Bereken de homologiegroepen van \mathbf{R}^n . Bereken de homologiegroep $H_1(S^1)$.

OPGAVEN ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE, SERIE 6

Opgave 30. Definiëer de relative *simpliciale* homologiegroepen.

Opgave 31. Laat v een punt van een simpliciaal complex K zijn. Bewijs dat $H_i(K, v) \cong \tilde{H}_i(K)$ (waar $\tilde{H}_i(K)$ de reduceerde homologie is).

Opgave 32. Bereken de (simpliciale) homologiegroepen $H_i(X, \delta X)$, met X de topologische ruimte uit Opgave 14 en δX de rand van X .

Opgave 33. Bereken de (simpliciale) homologie groepen $H_i(M)$, met M de Möbius band, en $H_i(M, \delta M)$, waar δM de rand van M is.

Opgave 34. Bereken de homologiegroep $H_0(K, L)$, voor elke paar van simpliciale complexen $L \subset K$, in termen van de wegsamenhangende componenten van K .

OPGAVEN ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE, SERIE 7

Opgave 35. Bereken de homologiegroepen van S^2 met de noordpool en de zuidpool geïdentificeerd.

Opgave 36. Gebruik Opgave 26 om de homologiegroepen van $S^1 \times S^1$ minus een punt te berekenen.

Opgave 37. Voor een topologische ruimte X is de suspensie SX gedefiniëerd als het quotient van $X \times I$ met $(x, 0) \sim (x', 0)$ en $(x, 1) \sim (x', 1)$ voor alle $x, x' \in X$. Bewijs dat $\tilde{H}_i(SX) \cong \tilde{H}_{i-1}(X)$

Opgave 38. Bereken de homologiegroepen $H_i(\mathbf{R}^n - F)$, met F een eindige verzameling van punten. Tip: gebruik Opgave 26 en bereken $H_i(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - F)$ met excisie.

Opgave 39 (Toepassing van de excisie stelling). Laat $(X_i)_{i \in I}$ een familie van topologische ruimten zijn en $x_i \in X_i$ punten. Dan is de wigsom van X_i gedefinieerd als

$$\vee_{i \in I} X_i := \left(\prod_{i \in I} X_i \right) / \{x_i\}_{i \in I}$$

(Het cijfer 8 is dus de wigsom $S^1 \vee S^1$.) Stel dat voor alle $i \in I$ het punt x_i een samentrekbare omgeving $V_i \in X_i$ heeft (X_i heet dan goed gepuntieerd). Toon aan dat

$$\tilde{H}_i(\vee X_i) = \oplus \tilde{H}_i(X_i).$$

Opgave 40 (Rekenen met exacte rijen). Gegeven een commutatief diagram van

abelse groepen: $A_1 \xrightarrow{d_1} A_2 \xrightarrow{d_2} A_3 \xrightarrow{d_3} A_4 \xrightarrow{d_4} A_5$ zodanig dat de rijen

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{d_1} & A_2 & \xrightarrow{d_2} & A_3 & \xrightarrow{d_3} & A_4 & \xrightarrow{d_4} & A_5 \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \phi_4 & & \downarrow \phi_5 \\ B_1 & \xrightarrow{e_1} & B_2 & \xrightarrow{e_2} & B_3 & \xrightarrow{e_3} & B_4 & \xrightarrow{e_4} & B_5 \end{array}$$

van het diagram exact zijn, de afbeeldingen ϕ_2, ϕ_4 isomorfismen zijn, ϕ_1 surjectief is en ϕ_5 injectief is. Toon aan dat ϕ_3 dan een isomorfisme is.

Geef een voorbeeld van een diagram $A_1 \xrightarrow{d_1} A_2 \xrightarrow{d_2} A_3 \xrightarrow{d_3} A_4 \xrightarrow{d_4} A_5$

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{d_1} & A_2 & \xrightarrow{d_2} & A_3 & \xrightarrow{d_3} & A_4 & \xrightarrow{d_4} & A_5 \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow & & \downarrow \phi_4 & & \downarrow \phi_5 \\ B_1 & \xrightarrow{e_1} & B_2 & \xrightarrow{e_2} & B_3 & \xrightarrow{e_3} & B_4 & \xrightarrow{e_4} & B_5 \end{array}$$

waar weer de rijen exact zijn, ϕ_2, ϕ_4 isomorfismen zijn, ϕ_1 surjectief is en ϕ_5 injectief is maar de groepen A_3 en B_3 niet isomorf zijn.

Opgave 41 (Nog een expliciet voortbrenger). Je kan S^n ook construeren als de vereniging van twee n -simplices $\Delta_+^n \cup \Delta_-^n$ waar je $\partial\Delta_-^n$ met $\partial\Delta_+^n$ geïdentificeerd hebt.

- (1) Toon aan dat $[id_{\Delta_+}] - [id_{\Delta_-}] \in C_n(S^n)$ een cykel is.
- (2) Toon aan dat $[id_{\Delta_+}] - [id_{\Delta_-}] \in C_n(S^n) \in H_n(S^n)$ een voortbrenger is. (Hint: Er zijn afbeeldingen $H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n, \Delta_-) \rightarrow H_n(\Delta_+, \partial\Delta_+)$, en van de laatste groep ken je al een voortbrenger.)
- (3) Bekijk $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ en de afbeelding $s : S^n \rightarrow S^n$ die door de spiegeling $(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_0, x_1, \dots, x_n)$ gegeven is. Laat zien dat

$$s_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$$

gelijk aan de vermenigvuldiging met -1 is.

OPGAVEN ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE, SERIE 9

Opgave 42 (Brouwer fixpunt stelling). Bewijs dat elke afbeelding $f : D^n \rightarrow D^n$ een fixpunt heeft, door gebruik van de graad van de afbeelding $S^n \rightarrow S^n$ die zowel de noordpool als de zuidpool naar de zuidpool stuurt via f .

Opgave 43. Construeer een surjectieve afbeelding $S^n \rightarrow S^n$ die graad nul heeft.

Opgave 44. Bewijs voor $n > 0$ dat elke afbeelding $S^n \rightarrow S^n$ homotoop is met een afbeelding die een fixpunt heeft.

Opgave 45. Gegeven een afbeelding $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ toon aan dat er een punt $x \in S^{2n}$ is, voor wie $f(x) = x$ of $f(x) = -x$. Concludeer dat elke afbeelding $\mathbf{R}P^{2n} \rightarrow \mathbf{R}P^{2n}$ heeft een fixpunt. Construeer dan afbeeldingen $\mathbf{R}P^{2n-1} \rightarrow \mathbf{R}P^{2n-1}$ zonder fixpunten, door afbeeldingen $\mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ zonder eigenvectoren.

Opgave 46 (De hoofdstelling van algebra). Bewijs dat iedere polynoom met complexe coëfficiënten een wortel heeft. Gebruik de volgende stappen: Laat S_c de cirkel met radius c zijn. Neem aan dat $h(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ geen wortel in de bal met radius c heeft. We beschouwen dan h als een afbeelding $h : S_c \rightarrow \mathbf{R}^2 - 0$.

- (1) Toon aan dat de afbeelding $H^1(h) : H_1(S_c) \rightarrow H_1(\mathbf{R}^2 - 0)$ triviaal is.
- (2) Toon aan dat of c groot genoeg is, dan is h homotoop met $k : S_c \rightarrow \mathbf{R}^2 - 0$ definieert door $k(z) = z^n$.
- (3) Toon aan dat (1) en (2) leiden tot een contradictie.

Opgave 47. Een polynoom h met complexe coëfficiënten, beschouwd als een afbeelding $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, kan verlengd worden naar een continue afbeelding $\hat{h} : S^2 \rightarrow S^2$, door de toevoeging van een punt. Laat zien dat de graad van \hat{h} gelijk is met de graad van h (als een polynoom). Laat verder zien dat de lokale graad van \hat{h} in een wortel van h is gelijk aan de multipliciteit van de wortel.