

Proeftentamen Basiswiskunde

oktober 2009, tijdsduur: drie uur

Maak de volgende vijf opgaven. Schrijf de antwoorden helder en duidelijk op in goed Nederlands. Als U stellingen uit de Syllabus gebruikt vermeld deze dan expliciet.

1) Bewijs dat $\sqrt[5]{3}$ niet een rationaal getal is.

2) Laat X , Y en Z deelverzamelingen van een verzameling V zijn. Laat zien dat

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

3) Bewijs voor ieder natuurlijk getal n dat geldt

$$\sum_{k=1}^n k^2 + k = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}.$$

4) Laat $V = \mathbb{R}^2$ het platte vlak zijn. Definiëer een relatie op V door

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{dan en slechts dan als} \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

- a) Laat zien dat \sim een equivalentierelatie is.
- b) Beschrijf de equivalentieklassen.
- c) Laat zien dat de verzameling

$$L = \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 : a \geq 0\}$$

een volledig representantensysteem voor \sim is.

5)

- i) Laat X een verzameling zijn. Wanneer heet X aftelbaar? (Geef de definitie van *aftelbaar*.)
- ii) Laat Y een aftelbare verzameling zijn en $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ een niet-negatief geheel getal. Bewijs dat de verzameling van deelverzamelingen van Y met n elementen aftelbaar is.
- iii) Bewijs dat de verzameling van eindige deelverzamelingen van Y aftelbaar is.