Proeftentamen Algebra 3

november 2008

Maak tenminste vijf van de volgende zes opgaven. Indien U er meer maakt worden de vijf best gemaakte geteld.

1) Laat $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$ de lichaamsuitbreiding van $\mathbb{Q}$ zijn verkregen door adjunctie van de elementen $i = \sqrt{-1}$ en $\sqrt{2}$.

- i) Laat zien dat $K/\mathbb{Q}$ een Galoisuitbreiding is.
- ii) Bepaal alle tussenlichamen van $K/\mathbb{Q}$.
- iii) Geef een element $\alpha \in K$ zodat $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.
- iv) Bepaal het minimumpolynoom $f \in \mathbb{Q}[x]$ van α.

2) Laat α_1, α_2 en α_3 de drie nulpunten van het polynoom $X^3 + 3X^2 - 2X + 1$ in $\mathbb{C}$ zijn. Bereken de coëfficiënten van het monische polynoom van graad 3 in $\mathbb{Q}[X]$ dat nulpunten α_1^2, α_2^2 en α_3^2 heeft.

3)

- i) Laat n een natuurlijk getal zijn. Geef de definitie van het n-de cyklotomische polynoom Φ_n.
- ii) Bepaal Φ_{21}.
- iii) Hoeveel irreducibele factoren heeft $\Phi_{21} (\mathrm{mod} 5)$ in $\mathbb{F}_5[X]$?

4)

- i) Laat K een lichaam zijn en $f \in K[X]$. Wanneer heet het polynoom f separabel? (Geef de definitie van 'separabel'.)
- ii) Laat K een lichaam zijn en $f \in K[X]$ een monisch irreducibel polynoom. Bewijs: f is separabel dan en slechts dan als $f' \neq 0$.

5) Laat G een eindige groep zijn en p een priemgetal.

- i) Geef de definitie van een p-Sylow-ondergroep van G.
- ii) Laat N een normaaldeler van G zijn en S een p-Sylowondergroep van G. Bewijs dat $S \cap N$ een p-Sylowondergroep van N is.
- iii) Laat p en q twee priemgetallen zijn met $q > p$ en G een niet-abelse groep van orde pq. Bewijs dat een q-Sylowondergroep van G een normaaldeler is. Bewijs dat p een deler is van $q - 1$.

6) Laat $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ de lichaamsuitbreiding van $\mathbb{Q}$ zijn verkregen door een nulpunt van $f = X^3 - 3X + 1$ te adjungeren.

- i) Bepaal de graad van het ontbindingslichaam van f.
- ii) Bewijs dat $K \subset \mathbb{Q}(\zeta_9)$ met ζ_9 een primitieve negendemachts eenheidswortel.
- iii) Laat zien dat er geen $\beta \in K$ met $\beta \notin \mathbb{Q}$ is met $\beta^3 \in \mathbb{Q}$.