

# Proeftentamen Algebra 2

December 2004

Maak vijf van de volgende zes opgaven. Indien U er zes maakt worden de vijf best gemaakte geteld.

1) Laat  $R$  een commutatieve ring met eenheidselement zijn. Voor een ideaal  $I$  van  $R$  definiëren we

$$A = \{r \in R : rx = 0 \text{ voor alle } x \in I\}.$$

Bewijs dat  $A$  een ideaal van  $R$  is.

2) Laat  $R$  een commutatieve ring met 1 zijn.

i) Geef de definitie van een *priemideaal*.

ii) Bewijs:  $I$  is een priemideaal  $\iff R/I$  is een domein.

3) Welke van de volgende idealen van  $\mathbb{Z}[X]$  zijn priem en welke maximaal? Motiveer het antwoord.

$$(13), \quad (X^3 - 2), \quad (5, X^3 - 2), \quad (7, X^3 - 2).$$

4) Bepaal alle irreducibele monische polynomen van graad 2 in  $\mathbb{F}_3[X]$ .

5) Laat  $K$  een lichaam zijn en  $L$  een uitbreidingslichaam van  $K$  waarvan de graad  $[L : K]$  gelijk is aan een priemgetal. Bewijs: een deellichaam van  $L$  dat  $K$  bevat is gelijk aan  $K$  of aan  $L$ .

6) Laat  $f = X^4 + X^3 - X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$  en laat  $\alpha \in \mathbb{C}$  een nulpunt van  $f$  zijn.

i) Bewijs dat  $f$  irreducibel is in  $\mathbb{Q}[X]$ .

ii) Bewijs  $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha^2)$ .

iii) Bepaal het minimumpolynoom van  $\alpha^2$  over  $\mathbb{Q}$ .