Extra Opgaven Algebra 1

Week 7, 2012

1) (*Linksaxioma's*) Laat G een niet-lege verzameling zijn met een bewerking $G \times G \to G$ (gegeven als $(x, y) \mapsto x \circ y$) die associatief is. Verder is gegeven dat er een element $e \in G$ is zodat $e \circ x = x$ voor alle $x \in G$. Bovendien is er voor iedere $x \in G$ een element $x' \in G$ zodat $x' \circ x = e$. Laat zien dat $(G, \circ, e)$ een groep definieert.

2) Geef een voorbeeld van een groep G en twee elementen x, y van eindige orde in G zodat xy van oneindige orde is. (Aanwijzing: (3.17))

3) Laat $n > 1$ een natuurlijk getal zijn en G de verzameling $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zijn. Definieer hierop een bewerking door

$$(a, b, c) \circ (d, e, f) = (a + d, b + e + af, c + f)$$

Laat zien dat G met de bewerking $\circ$ en $e = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0})$ een groep is. Is deze groep abels? Laat zien dat $x^n = e$ voor alle $x \in G$.

4) Laat ℓ en m twee lijnen door de oorsprong van het vlak $\mathbb{R}^2$ zijn. Noteer de spiegeling in ℓ (resp. in m) met s_ℓ (resp. s_m). Bewijs dat de samenstelling $s_\ell s_m$ een rotatie is. Wat is de hoek van de rotatie?

5) Laat zien dat een eindige groep G waarin ieder element $g \neq e$ verschillend is van zijn inverse oneven orde heeft. Concludeer dat een groep van even orde een oneven aantal elementen van orde 2 heeft.

6) Laat zien dat de verzameling

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

met de gebruikelijke matrixvermenigvuldiging en $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ een groep definieert. Kennen we deze groep al?

7) Laat zien dat $G = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$ met $e = 1 \in G$ en met de gebruikelijke vermenigvuldiging van complexe getallen een groep definieert. Wat zijn de elementen van eindige orde in G?

8) Bewijs dat de verzameling van de symmetrieën van een *ruit* in het vlak 'dezelfde' vermenigvuldigingstabel heeft als de Viergroep van Klein.