Tentamen Algebra 3; Representatie theorie

– Datum: donderdag 22 december 2011.
– Tijd: 13:00-16:00. Lokatie: C1.112 (Science Park).
– Vergeet niet je naam en studentnummer te noteren op het werk dat je inlevert.
– Geef aan op je ingeleverde werk of je dit vak als **bachelorvak** of als **mastervak** doet.
– Formuleer zorgvuldig alle resultaten die je gebruikt.
– Beargumenteer zorgvuldig hoe je tot de oplossingen van de opgaven bent gekomen. Slechts het geven van het correcte antwoord is niet voldoende.
– Het tentamen bestaat uit vijf opgaven. Per opgave wordt aangegeven hoeveel punten er aan toegekend worden. In totaal kan je 90 punten halen.
– **Veel succes!**

Opgave 1 (20 punten). Zij G een eindige groep met eenheidselement $e \in G$. Voor een eindig dimensionale representatie $\pi : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ en voor een lineaire functionaal $f \in V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ schrijven we $\pi^*(g)f \in V^*$ voor de lineaire functionaal

$$(\pi^*(g)f)(v) := f(\pi(g^{-1})v), \qquad \forall\, v \in V.$$

(a) Laat zien dat dit aanleiding geeft tot een eindig dimensionale representatie $\pi^* : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V^*)$.

(b) Bewijs: π is irreducibel $\Leftrightarrow$ π^* is irreducibel.

Noteer $\mathrm{Bl}(V)$ voor de vectorruimte van complex bilineaire en G-invariante vormen op V. Met andere woorden, $\mathrm{Bl}(V)$ bestaat uit bilineaire afbeeldingen

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

die voldoen aan

$$\langle \pi(g)v, \pi(g)v' \rangle = \langle v, v' \rangle \qquad \forall\, g \in G, \forall\, v, v' \in V.$$

De vectorruimte structuur op $\mathrm{Bl}(V)$ is als volgt: voor $\lambda_i \in \mathbb{C}$ en $\langle \cdot, \cdot \rangle_i \in \mathrm{Bl}(V)$ is $\lambda_1 \langle \cdot, \cdot \rangle_1 + \lambda_2 \langle \cdot, \cdot \rangle_2$ de bilineaire vorm

$$(v, v') \mapsto \lambda_1 \langle v, v' \rangle_1 + \lambda_2 \langle v, v' \rangle_2.$$

(c) Laat zien dat $\mathrm{Bl}(V)$ isomorf is met de vectorruimte $\mathrm{Hom}^{(G)}(V \otimes_{\mathbb{C}} V, \mathbb{C}_{triv})$, waarbij:

(i) $V \otimes_{\mathbb{C}} V$ de representatieruimte is van de tensorprodukt representatie van π met zichzelf,

(ii) $\mathbb{C}_{triv}$ de representatieruimte is van de triviale representatie van G,

(iii) $\mathrm{Hom}^{(G)}(V \otimes_{\mathbb{C}} V, \mathbb{C}_{triv})$ de vectorruimte van lineaire G-vervlechtingsoperatoren $V \otimes_{\mathbb{C}} V \to \mathbb{C}_{triv}$ is.

Z.O.Z.

Voor de rest van de opgave nemen we aan dat V irreducibel is.

(d) Toon aan: als $V \not\simeq V^*$ dan $\dim_{\mathbb{C}}\big(\mathrm{Bl}(V)\big) = 0$.

(e) Bewijs: als $V \simeq V^*$ dan $\dim_{\mathbb{C}}\big(\mathrm{Bl}(V)\big) = 1$.

Opgave 2 (15 punten). Laat G een eindige groep zijn, en $H \subseteq G$ een ondergroep. Voor eindig dimensionale representaties $\sigma : H \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(W)$ en $\pi : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ en voor een vaste $g \in G$ definieren we getwiste representaties $\sigma^g : gHg^{-1} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(W)$ en $\pi^g : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ door $\sigma^g(x) := \sigma(g^{-1}xg)$ ($x \in gHg^{-1}$) en $\pi^g(y) := \pi(g^{-1}yg)$ ($y \in G$). Laat zien dat

$$\mathrm{Ind}_{gHg^{-1}}^{G}(\sigma^g) \simeq \big(\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)\big)^g.$$

Opgave 3 (15 punten). Zij G een eindige groep met eenheidselement $e \in G$. Noteer r_G voor het karakter van de reguliere representatie $\rho_G : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}\big(\mathbb{C}[G]\big)$. Zij $\sigma : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ een eindig dimensionale representatie is van dimensie > 0 en neem aan dat het karakter $\chi_\sigma \in F(G)$ van σ de eigenschap heeft dat $\chi_\sigma(g) = 0$ voor alle $g \in G \setminus \{e\}$. Noteer

$$d_\sigma := \frac{\dim_{\mathbb{C}}(V)}{\#G}.$$

(a) Bewijs dat

$$\chi_\sigma = d_\sigma r_G.$$

(b) Toon aan dat d_σ een natuurlijk getal is.

(c) Laat zien dat $V \simeq \mathbb{C}[G]^{\oplus d_\sigma}$ als G-representaties.

Opgave 4 (15 punten). Zij $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ een eindige ondergroep. Dan heeft G een natuurlijke twee-dimensionale representatie,

$$\pi_G : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}\big(\mathbb{C}^2\big), \qquad \pi_G(g)v := gv, \qquad \forall\, g \in G,\ \forall\, v \in \mathbb{C}^2.$$

(a) Bewijs: G is abels $\Leftrightarrow$ π_G is reducibel.

Voor $\pi, \pi' \in \widehat{G}$ noteren we $d_{\pi,\pi'}$ voor de niet-negatieve gehele getallen waarvoor geldt dat $\pi_G \otimes \pi \simeq \oplus_{\pi' \in \widehat{G}} d_{\pi,\pi'} \pi'$ als G-representaties. Met andere woorden, $d_{\pi,\pi'} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ is de multipliciteit van de irreducibele representatie $V_{\pi'}$ in de ontbinding van de tensor produkt representatie $\mathbb{C}^2 \otimes V_\pi$ in irreducibelen (waarbij $\mathbb{C}^2$ de representatieruimte is van π_G).

(b) Stel dat het karakter $\chi_G \in F(G)$ van π_G reële waarden aanneemt. Bewijs dat $d_{\pi,\pi'} = d_{\pi',\pi}$ voor alle $\pi, \pi' \in \widehat{G}$.
Hint: geef eerst een uitdrukking van $d_{\pi,\pi'}$ als inprodukt van karakters.

Z.O.Z.

Opgave 5 (25 punten). We gebruiken in deze opgave de notaties uit opgave 4. Stel dat $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ een eindige ondergroep is zodat het karakter $\chi_G \in F(G)$ van de natuurlijke twee-dimensionale representatie $\pi_G : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ reëelwaardig is. Vanwege opgave 4(b) kunnen we dan als volgt een gelabelde, ongerichte graaf $M(G)$ definieren:

(i) de elementen van $\widehat{G}$ vormen de knopen van de graaf,
(ii) het aantal zijden tussen de knopen $\pi \in \widehat{G}$ en $\pi' \in \widehat{G}$ is gelijk aan $d_{\pi,\pi'}$,
(iii) de knoop $\pi \in \widehat{G}$ is gelabeld met de graad $\dim_{\mathbb{C}}(V_\pi)$ van π.

Bekijk de ondergroep

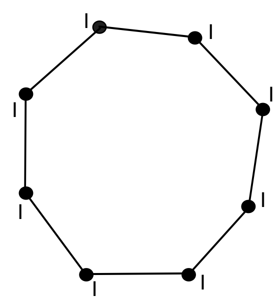
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} e^{\pi\sqrt{-1}t/4} & 0 \\ 0 & e^{-\pi\sqrt{-1}t/4} \end{pmatrix} \mid t = 1, \ldots, 8 \right\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

(a) Laat zien dat $\widehat{H} = \{\chi_s\}_{s=1}^{8}$ met

$$\chi_s \begin{pmatrix} e^{\pi\sqrt{-1}t/4} & 0 \\ 0 & e^{-\pi\sqrt{-1}t/4} \end{pmatrix} := e^{\pi\sqrt{-1}st/4}, \qquad 1 \leq s, t \leq 8.$$

(b) Laat zien dat $\pi_H \simeq \chi_1 \oplus \chi_7$ en dat het karakter $\chi_H \in F(H)$ van π_H reëelwaardig is.

(c) Toon aan dat



de graaf $M(H)$ is.

Noteer

$$r := \begin{pmatrix} e^{\pi\sqrt{-1}/4} & 0 \\ 0 & e^{-\pi\sqrt{-1}/4} \end{pmatrix}, \qquad s := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en laat $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ de ondergroep zijn die voortgebracht wordt door r en s.

(d) Laat zien dat $G \simeq D_8$ en dat $\chi_G \in F(G)$ reëelwaardig is (D_8 is de dihedrale groep van orde 16).

Z.O.Z.

Op het college is bewezen dat $\widehat{G} = \{\eta_{1,1}, \eta_{1,-1}, \eta_{-1,1}, \eta_{-1,-1}\} \cup \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ met $\eta_{\epsilon,\xi} : G \to \mathbb{C}^*$ de irreducibele één-dimensionale representaties gekarakteriseerd door

$$\eta_{\epsilon,\xi}(r) := \epsilon, \qquad \eta_{\epsilon,\xi}(s) := \xi$$

en met $\pi_t : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}^2)$ $(t = 1, 2, 3)$ de irreducibele twee-dimensionale representaties gekarakteriseerd door

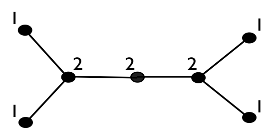
$$\pi_t(r) := \begin{pmatrix} e^{\pi\sqrt{-1}t/4} & 0 \\ 0 & e^{-\pi\sqrt{-1}t/4} \end{pmatrix}, \qquad \pi_t(s) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) Bewijs dat $\pi_1 \otimes \eta_{-1,-1} \simeq \pi_3 \simeq \pi_1 \otimes \eta_{-1,1}$.
Hint: beperk de representaties eerst tot H.

(f) Laat zien dat $\pi_1 \otimes \pi_2 \simeq \pi_1 \oplus \pi_3$.

(g) Laat zien dat $\pi_1 \otimes \pi_3 \simeq \eta_{-1,1} \oplus \eta_{-1,-1} \oplus \pi_2$.

(h) Bewijs dat



de graaf $M(G)$ is.

EINDE VAN HET TENTAMEN

PRETTIGE FEESTDAGEN