Tussentoets Algebra 2

– Datum: 19 oktober 2009.
– Tijd: 13:00-16:00.
– Vergeet niet je naam en studentnummer te noteren op het werk dat je inlevert.
– Formuleer zorgvuldig alle resultaten die je gebruikt.
– Beargumenteer zorgvuldig hoe je tot de oplossingen van de opgaven bent gekomen. Slechts het geven van het correcte antwoord is niet voldoende.
– De tussentoets bestaat uit vijf opgaven.
– Veel succes!

Opgave 1. Beschouw $\mathbb{Z}^2$ als abelse groep ten opzichte van de vertrouwde coordinaatsgewijze optelling $(k,l)+(m,n)=(k+m,l+n)$. Ga na of de abelse groep $\mathbb{Z}^2$ een ring wordt ten opzichte van de vermenigvuldiging

$$(k,l)\cdot(m,n):=(kn,lm)$$

op $\mathbb{Z}^2$.

Opgave 2. Ga na of de volgende ringen domeinen zijn:
(i) $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$.
(ii) $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$.
(iii) $\mathbb{Z}[X]/(X^2+X+1)$.
(iv) $\mathbb{Z}[X]/(4X^2+4X-3)$.

Opgave 3. **(i)** Laat zien dat $(Y-X^2+4)\subset\mathbb{Z}[X,Y]$ een priemideaal is, maar geen maximaal ideaal.
(ii) Is $(Y,Y-X^2+4)$ een priemideaal in $\mathbb{Z}[X,Y]$?
(iii) Is $(X,Y-X^2+4)$ een priemideaal in $\mathbb{Z}[X,Y]$?
(iv) Laat zien dat $(7,X,Y-X^2+4)$ een maximaal ideaal is in $\mathbb{Z}[X,Y]$.

Opgave 4. Bewijs dat

$$\mathbb{R}[X]/(X^3-X^2+X-1)\simeq\mathbb{R}\times\mathbb{C}$$

als ringen.

Opgave 5. **(i)** Laat R een commutatieve ring met 1 zijn, en $0\neq x\in R$. Bekijk de afbeelding $l_x:R\to R$, gedefinieerd door $l_x(r):=xr$ $(r\in R)$.
Bewijs: de afbeelding l_x is injectief $\Leftrightarrow$ x is geen nuldeler in R.
(ii) Stel R is een domein en $\#R<\infty$. Laat zien dat R een lichaam is.