Tussentoets Algebra 3; Representatie theorie

– Datum: woensdag 26 oktober 2011.
– Tijd: 13:00-16:00. Lokatie: F1.02 (Science Park).
– Vergeet niet je naam en studentnummer te noteren op het werk dat je inlevert.
– Formuleer zorgvuldig alle resultaten die je gebruikt.
– Beargumenteer zorgvuldig hoe je tot de oplossingen van de opgaven bent gekomen. Slechts het geven van het correcte antwoord is niet voldoende.
– De tussentoets bestaat uit vijf opgaven.
– Veel succes!

Opgave 1. De alternerende groep A_n is de kern van het tekenhomomorfisme $\epsilon : S_n \to \{\pm 1\}$. Het is dus de ondergroep van de symmetrische groep S_n in n letters bestaande uit de even permutaties. Beargumenteer dat iedere irreducibele lineaire representatie van A_3 één-dimensionaal is.
Oplossing: A_3 is een abelse groep (van order 3), en irreducibele lineaire representaties van een abelse groep zijn altijd 1-dimensionaal.

Opgave 2. Zij $n \in \mathbb{N}$ en zij $\pi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ de lineaire representatie gegeven door

$$\pi(\overline{r}) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi r}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi r}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi r}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi r}{n}\right) \end{pmatrix}$$

voor $\overline{r} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(i) Bewijs dat $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = \{\rho_{\overline{t}}\}_{\overline{t} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ met $\rho_{\overline{t}} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{\times}$ de één-dimensionale representatie gegeven door $\rho_{\overline{t}}(\overline{r}) := e^{2\pi i r t/n}$ ($\overline{r} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).
Oplossing: $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ is een abelse groep van orde n, dus $\#\widehat{G} = \#G = n$ (de conjugatie klassen van G zijn de elementen van G), dus als je n inequivalente 1-dimensionale lineaire representaties hebt gevonden (die zijn automatisch irreducibel) dan heb je heel $\widehat{G}$ gevonden. 1-dimensionale representaties zijn inequivalent desda als ze verschillend zijn. De n verschillende 1-dimensionale representaties $\rho_{\overline{t}}$ ($\overline{t} \in G$) vormen dus heel $\widehat{G}$.

(ii) We vatten $\rho_{\overline{t}}$ op als klasse functie op $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Zij χ het karakter van π. Bepaal de $\overline{t} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ waarvoor geldt dat $\left(\chi \,|\, \rho_{\overline{t}}\right) \neq 0$.
Oplossing: $\overline{t} = \overline{1}$ en $\overline{t} = -\overline{1}$. Dit kan je inzien door het inprodukt van de karakters direct uit te rekenen door wat te goochelen met de complexe exponentiele functie. Makkelijker is om op te merken dat het inprodukt alleen dan

ongelijk nul is als de irreducibele 1-dimensionale representatie $\rho_{\overline{t}}$ voorkomt in de ontbinding van de representatie π in irreducibelen. Dit is het geval dan en slechts dan als de matrix $\pi(\overline{1})$ de eigenwaarde $\rho_{\overline{t}}(\overline{1})$ heeft (de bijbehorende eigenvector spant dan een 1-dimensionale $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-invariante deelruimte op isomorf met de 1-dim representatie $\rho_{\overline{t}}$, aangezien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ een cyclische groep is met cyclische voortbrenger $\overline{1}$). Het is makkelijk in te zien dat $\pi(\overline{1})$ de eigenwaarden $\rho_{\overline{1}}(\overline{1}) = e^{2\pi i/n}$ en $\rho_{-\overline{1}}(\overline{1}) = e^{-2\pi i/n}$ heeft.

Opgave 3. Zij $G = \{(\overline{a}, \overline{b}) \in \mathbb{F}_7^\times \times \mathbb{F}_7\}$ met $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ het eindige lichaam bestaande uit de restklassen modulo 7, en met $\mathbb{F}_7^\times$ de ondergroep van multiplicatieve restklassen modulo 7. We beschouwen G als een groep ten opzichte van de bewerking

$$(\overline{a}, \overline{b})(\overline{a'}, \overline{b'}) := (\overline{aa'}, \overline{ab' + b}).$$

Het eenheidselement is $(\overline{1}, \overline{0})$ en de inverse van een element $(\overline{a}, \overline{b}) \in G$ is gegeven door

$$(\overline{a}, \overline{b})^{-1} = (\overline{a}^{-1}, -\overline{a}^{-1}\overline{b}).$$

(i) Bepaal $\#G$.
Oplossing: $\#G = \#(\mathbb{F}_7^\times) \cdot \#(\mathbb{F}_7) = 6 \cdot 7 = 42$.

(ii) Laat zien dat

$$(\overline{a}, \overline{b})(\overline{a'}, \overline{b'})(\overline{a}, \overline{b})^{-1} = (\overline{a'}, \overline{(1-a')b + ab'})$$

in G.
Oplossing: Directe berekening.

(iii) Laat zien dat $\{(\overline{1}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1})\} \cup \{(\overline{a}, \overline{0})\}_{\overline{a} \in \mathbb{F}_7^\times \setminus \{\overline{1}\}}$ een volledige verzameling representanten is van de conjugatie klassen van G.
Oplossing: Er geldt dat $G = C((\overline{1}, \overline{0})) \cup C((\overline{1}, \overline{1})) \cup \bigcup_{\overline{a} \in \mathbb{F}_7^\times \setminus \{\overline{1}\}} C((\overline{a}, \overline{0}))$ (disjunkte vereniging) met

$$C((\overline{1}, \overline{0})) = \{(\overline{1}, \overline{0})\}, \quad C((\overline{1}, \overline{1})) = \{(\overline{1}, \overline{b})\}_{\overline{b} \in \mathbb{F}_7^\times}, \quad C((\overline{a}, \overline{0})) = \{(\overline{a}, \overline{b})\}_{\overline{b} \in \mathbb{F}_7}$$

voor $\overline{a} \in \mathbb{F}_7^\times \setminus \{\overline{1}\}$. Rest dus aan te tonen dat de deelverzameling $C(g)$ ($g \in \{(\overline{1}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1})\} \cup \{(\overline{a}, \overline{0})\}_{\overline{a} \in \mathbb{F}_7^\times \setminus \{\overline{1}\}}$) de conjugatie-klasse is in G die g bevat. Dit is triviaal voor $C((\overline{1}, \overline{0}))$ omdat $(\overline{1}, \overline{0})$ het eenheidselement is van de groep G. Voor $C((\overline{1}, \overline{1}))$ volgt dit direct uit de formule (speciaal geval van (ii))

$$(\overline{a}, \overline{b})(\overline{1}, \overline{1})(\overline{a}, \overline{b})^{-1} = (\overline{1}, \overline{a})$$

Evenzo, als $\overline{a} \in \mathbb{F}_7^\times \setminus \{\overline{1}\}$ dan voor $C((\overline{a}, \overline{0}))$ volgt het uit de formule

$$(\overline{a'}, \overline{b'})(\overline{a}, \overline{0})(\overline{a'}, \overline{b'})^{-1} = (\overline{a}, \overline{(1-a)}\overline{b'})$$

en het feit dat $\overline{1-a} \in \mathbb{F}_7^\times$ omdat $\overline{a} \neq \overline{1}$.

(iv) Beargumenteer dat $\#\widehat{G} = 7$.

Oplossing: $\#\widehat{G}$ is gelijk aan het aantal conjugatie klassen van G. Dit zijn er 7 vanwege onderdeel (iii).

(v) Bewijs dat G zes verschillende 1-dimensionale lineaire representaties heeft.

Oplossing: $\mathbb{F}_7^\times$ is een abelse groep van orde 6 en heeft dus 6 verschillende 1-dimensionale lineaire representaties (vergelijk met het argument bij opgave 2(i)), die we noteren met $\rho_i : \mathbb{F}_7^\times \to \mathrm{GL}_\mathbb{C}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ $(i = 1, \ldots, 6)$. Definieer

$$\pi_i : G \to \mathrm{GL}_\mathbb{C}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$$

voor $i = 1, \ldots, 6$ door middel van

$$\pi_i((\overline{a}, \overline{b})) := \rho_i(\overline{a}).$$

Dit zijn 1-dimensionale representaties van G aangezien $\pi_i((\overline{1}, \overline{0})) = \rho_i(\overline{1}) = 1$ en

$$\begin{aligned} \pi_i((\overline{a}, \overline{b})(\overline{a'}, \overline{b'})) &= \rho_i(\overline{aa'}) \\ &= \rho_i(\overline{a})\rho_i(\overline{a'}) \\ &= \pi_i((\overline{a}, \overline{b}))\pi_i((\overline{a'}, \overline{b'})). \end{aligned}$$

Ze zijn ook verschillend (omdat de ρ_i verschillend zijn).

(vi) Beargumenteer dat G, op isomorfie na, een unieke irreducibele lineaire representatie heeft van dimensie > 1, en bereken zijn dimensie.

Oplossing: Zij $\{\pi_1, \ldots, \pi_6, \pi_7\}$ de volledige set representanten van $\widehat{G}$, met $\pi_1, \ldots, \pi_6$ als in onderdeel (v). Zij n_i de graad (dimensie) van de representatie π_i (dus $n_1 = \cdot = n_6 = 1$). Dan geldt

$$42 = \#G = \sum_{i=1}^{7} n_i^2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + n_7^2,$$

dus $n_7 = 6$. Er volgt dat iedere irreducibele irreducibele representatie π van G van dimensie > 1 isomorf is met π_7, en dus van dimensie $n_7 = 6$ is.

Opgave 4. In deze opgave is G de groep uit opgave 3. Je mag de geformuleerde resultaten uit opgaven 3 gebruiken bij het oplossen van deze som.

(i) Laat zien dat de afbeelding $G \times \mathbb{F}_7 \to \mathbb{F}_7$, gegeven door

$$((\overline{a}, \overline{b}), \overline{x}) \mapsto (\overline{a}, \overline{b}) \cdot \overline{x} := \overline{ax + b},$$

een transitieve werking is van G op $\mathbb{F}_7$.

Oplossing: Aan te tonen dat het een actie is: moet je laten zien dat $(\overline{1}, \overline{0}) \cdot \overline{x} = \overline{x}$ en $g \cdot (h \cdot \overline{x}) = (gh) \cdot \overline{x}$ voor alle $g, h \in G$ en $\overline{x} \in \mathbb{F}_7$. Dit volgt uit een directe berekening. Een actie $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ heet **transitief** als voor ieder tweetal elementen $x, y \in X$ er minimaal één $g \in G$ bestaat zodanig dat

$g \cdot x = y$ (anders gezegd, de actie is transitief als X maar één G-baan heeft). Om dit in onze sitaute te checken is dus voldoende te laten zien dat de G-baan van $\overline{0}$ heel $\mathbb{F}_7$ is. Maar dat is duidelijk: $(\overline{a}, \overline{y}) \cdot \overline{0} = \overline{y}$ voor alle $\overline{y} \in \mathbb{F}_7$.

(ii) Laat zien dat $\rho : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}\big(\mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7)\big)$, gedefinieerd door $(\rho(g)f)(\overline{x}) := f(g^{-1} \cdot \overline{x})$ ($g \in G$, $f \in \mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7)$ en $\overline{x} \in \mathbb{F}_7$) een lineaire representatie is van G.
Oplossing: Het moet dus een lineaire G-actie zijn op de vectorruimte $\mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7)$ van complex-waardige functies op $\mathbb{F}_7$. Dat de actie lineair is, is triviaal. Dat $\rho((\overline{1}, \overline{0})) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7)}$ evenzo. De enige niet-triviale check is

$$\begin{aligned}
\big(\rho(g)\big(\rho(h)f\big)\big)(\overline{x}) &= \big(\rho(h)f\big)(g^{-1} \cdot \overline{x}) \\
&= f(h^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot \overline{x})) \\
&= f((h^{-1}g^{-1}) \cdot \overline{x}) \\
&= f((gh)^{-1} \cdot \overline{x}) \\
&= \big(\rho(gh)f\big)(\overline{x})
\end{aligned}$$

voor $g, h \in G$, $f \in \mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7)$ en $\overline{x} \in \mathbb{F}_7$.

(iii) Laat zien dat $V := \{f \in \mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7) \mid \sum_{\overline{x} \in \mathbb{F}_7} f(\overline{x}) = 0\}$ een G-invariante deelruimte is van $\mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7)$.
Oplossing: Duidelijk is dat $V \subset \mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7)$ een deelruimte is van dimensie 6 (want $\mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7)$ is $\#\mathbb{F}_7 = 7$-dimensionaal, en V is verkregen uit $\mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7)$ door één niet-triviale homogene lineaire vergelijking op te leggen). Omdat $G \times \mathbb{F}_7 \to \mathbb{F}_7$ een actie is, geldt dat $g\cdot : \mathbb{F}_7 \to \mathbb{F}_7$ een bijectie is voor alle $g \in G$ (dit heeft niks met transitiviteit van de werking te maken!). Maar dan geldt, voor $f \in V$ en $g \in G$,

$$\sum_{\overline{x} \in \mathbb{F}_7} (\rho(g)f)(\overline{x}) = \sum_{\overline{x} \in \mathbb{F}_7} f(g^{-1} \cdot \overline{x}) = \sum_{\overline{y} \in \mathbb{F}_7} f(\overline{y}) = 0$$

(met $\overline{y} := g^{-1} \cdot \overline{x}$ als nieuwe sommatie-variabele), dus $\rho(g)f \in V$. Conclusie is dat $V \subset \mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7)$ een G-invariante deelruimte is.

(iv) Construeer een expliciete G-invariante deelruimte $W \subset \mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7)$ zodat

$$\mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7) = V \oplus W.$$

Oplossing: Bekijk $W := \mathbb{C}1 \subset \mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7)$ met $1 \in \mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7)$ de functie identiek gelijk aan één. Dit is een 1-dimensionale deelruimte, G-invariant omdat uiteraard $\rho(g)1 = 1$ voor alle $g \in G$. Rest aan te tonen dat $\mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7) = V \oplus W$. We weten al dat de dimensies op de goede manier optellen ($\dim(V) + \dim(W) = 6 + 1 = 7 = \mathrm{Dim}(\mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7))$), dus voldoende aan te tonen dat $V \cap W = \{0\}$. Als $V \cap W \neq \{0\}$ dan geldt $W \subset V$ (want W is een 1-dimensionale deelruimte), in het bijzonder $1 \in V$, maar dit is absurd. Dus inderdaad $V \cap W = \{0\}$.

(v) Bewijs dat de deelrepresentatie ρ_W van ρ de triviale representatie van G is.
Oplossing: Gezien in de oplossing van (iv) dat W één-dimensionaal is en dat iedere $g \in G$ triviaal werkt op W. Dus ρ_W is de triviale representatie.

Opgave 5. We gebruiken de notaties van opgaven 3 en 4. Je mag de geformuleerde resultaten uit opgaven 3 en 4 gebruiken bij het oplossen van deze opgave. Zij $\chi_\rho \in F(G)$ het karakter van de representatie $\rho : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7))$ (zie opgave 4 **(ii)**).

(i) Bewijs dat $\chi_\rho(g) = \#\{\overline{x} \in \mathbb{F}_7 \mid g \cdot \overline{x} = \overline{x}\}$.

Oplossing: Kies de lineaire basis $\{\delta_{\overline{x}}\}_{\overline{x}\in\mathbb{F}_7}$ voor $\mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7)$, met $\delta_{\overline{x}}(\overline{y}) = \delta_{\overline{x},\overline{y}}$ de Kronecker delta functie. Dan voor $g \in G$,

$$
\begin{aligned}
\chi_\rho(g) &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{Fun}(\mathbb{F}_7)}(\rho(g)) \\
&= \sum_{\overline{x}\in\mathbb{F}_7} \delta^*_{\overline{x}}(\rho(g)\delta_{\overline{x}}) \\
&= \sum_{\overline{x}\in\mathbb{F}_7} \delta^*_{\overline{x}}(\delta_{g\cdot\overline{x}}) \\
&= \sum_{\overline{x}\in\mathbb{F}_7} \delta_{\overline{x},g\cdot\overline{x}} \\
&= \#\{\overline{x} \in \mathbb{F}_7 \,|\, g \cdot \overline{x} = \overline{x}\},
\end{aligned}
$$

waarbij we in de derde gelijkheid gebruik hebben gemaakt van het feit dat $(\rho(g)\delta_{\overline{x}})(\overline{y}) = \delta_{\overline{x},g^{-1}\cdot\overline{y}} = \delta_{\overline{y},g\cdot\overline{x}} = \delta_{g\cdot\overline{x}}(\overline{y})$.

(ii) Bepaal expliciet de waarden $\chi_\rho(g)$ voor alle representanten g van de conjugatie klassen van G (zie opgave 3 **(iii)**).

Oplossing: Directe berekeningen, gebruikmakend van (i). Voor $\overline{a} \in \mathbb{F}_7^\times \setminus \{\overline{1}\}$,

$$
\begin{aligned}
\chi_\rho((\overline{1},\overline{0})) &= \#\{\overline{x} \in \mathbb{F}_7 \,|\, (\overline{1},\overline{0}) \cdot \overline{x} = \overline{x}\} = 7, \\
\chi_\rho((\overline{1},\overline{1})) &= \#\{\overline{x} \in \mathbb{F}_7 \,|\, \overline{x} = \overline{x+1}\} = 0, \\
\chi_\rho((\overline{a},\overline{0})) &= \#\{\overline{x} \in \mathbb{F}_7 \,|\, \overline{ax} = \overline{x}\} = 1,
\end{aligned}
$$

want $\overline{ax} = \overline{x}$ desda $\overline{(a-1)}\overline{x} = \overline{0}$ desda $\overline{x} = \overline{0}$ aangezien $\overline{a} \neq \overline{1}$.

(iii) Zij $1 \in F(G)$ the functie identiek gelijk aan 1. Laat zien dat $\big(\chi_\rho|1\big) = 1$.

Oplossing: Dit volgt uit een directe berekening en de vorige opgave,

$$
\begin{aligned}
&\big(\chi_\rho \,|\, 1\big) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g) \\
&= \frac{1}{42}\Big(\#C((\overline{1},\overline{0}))\cdot\chi_\rho((\overline{1},\overline{0})) + \#C((\overline{1},\overline{1}))\cdot\chi_\rho((\overline{1},\overline{1})) + \sum_{a\in\mathbb{F}_7^\times\setminus\{\overline{1}\}} \#C((\overline{a},\overline{0}))\cdot\chi_\rho((\overline{a},\overline{0}))\Big) \\
&= \frac{1}{42}\big(1\cdot 7 + 6\cdot 0 + 5\cdot 7\cdot 1\big) = \frac{7+35}{42} = 1.
\end{aligned}
$$

(iv) Bewijs dat $\big(\chi_\rho|\chi_\rho\big) = 2$.
Oplossing: Dit volgt opnieuw uit een directe berekening,

$$\big(\chi_\rho\,|\,\chi_\rho\big) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}|\chi_\rho(g)|^2$$

$$= \frac{1}{42}\big(\#C((\overline{1},\overline{0}))\cdot\chi_\rho((\overline{1},\overline{0}))^2 + \#C((\overline{1},\overline{1}))\cdot\chi_\rho((\overline{1},\overline{1}))^2 + \sum_{a\in\mathbb{F}_7^\times\setminus\{\overline{1}\}}\#C((\overline{a},\overline{0}))\cdot\chi_\rho((\overline{a},\overline{0}))^2\big)$$

$$= \frac{1}{42}\big(1\cdot 7^2 + 6\cdot 0 + 5\cdot 7\cdot 1^2\big) = \frac{49+35}{42} = 2.$$

(v) Bewijs dat de deelrepresentatie $\rho_V : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ van ρ irreducibel is.
Oplossing: Opgave 4 (onderdelen (iv) en (v)) geeft dat $\chi_\rho = \chi_V + \chi_W = \chi_V + 1$ met $1 \in \mathrm{F}(G)$ de (klasse) functie identiek gelijk aan 1. Dan opgave 5 onderdeel (iii) geeft

$$1 = (\chi_\rho\,|\,1) = (\chi_V\,|\,1) + (1\,|\,1) = (\chi_V\,|\,1) + 1,$$

dus $(\chi_V\,|\,1) = 0$ (ofwel, in de ontbinding van V in irreducibele deelrepresentaties van G komt de triviale representatie van G niet voor). Maar dan, vanwege opgave 5 onderdeel (iv),

$$\begin{aligned} 2 &= (\chi_\rho\,|\,\chi_\rho) \\ &= (\chi_V + 1\,|\,\chi_V + 1) \\ &= (\chi_V\,|\,\chi_V) + 2(\chi_V\,|\,1) + (1\,|\,1) \\ &= (\chi_V\,|\,\chi_V) + 1, \end{aligned}$$

ofwel $(\chi_V\,|\,\chi_V) = 1$. Maar dat impliceert dat ρ_V een irreducibele representatie van G is, van dimensie 6 (in het bijzonder geldt, gebruikmakend van de notatie van de oplossing van opgave 3 onderdeel (v), dat $\rho_V \simeq \pi_7$).

EINDE VAN DE TUSSENTOETS