Tentamen algebra 1

8 juni 2005, 13.30–16.30, zaal A.404

Schrijf je naam en collegekaartnummer of het werk dat je inlevert.
Het tentamen bestaat uit 6 opgaven.
Beargumenteer telkens je antwoord. Veel succes!

Opgave 1.
a. Bepaal alle oplossingen $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ die voldoen aan de vergelijking $42x + 26y = 2$.
b. Bepaal de restklasse $u \pmod{273}$ die de congruenties

$$u \equiv 4 \pmod{21}, \quad u \equiv 5 \pmod{13}$$

oplost.
c. Toon aan dat $u^{13} \equiv u \pmod{273}$ voor alle $u \in \mathbb{Z}$.

Opgave 2 (theorievraag).
Laat $\sim$ een equivalentierelatie zijn op een verzameling V.
a. Geef de definitie van de equivalentieklasse van een element $v \in V$.
b. Bewijs dat twee verschillende equivalentieklassen disjunkt zijn.

Opgave 3.
Noteer

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in S_7.$$

a. Schrijf σ als produkt van disjunkte cykels.
b. Bepaal de orde en het teken van σ.
c. Is de ondergroep $\langle \sigma \rangle \subset S_7$ voortgebracht door σ een normaaldeler? Motiveer je antwoord.

Opgave 4.
a. Toon aan dat $\left(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\right)^*$ precies de deelverzameling van voortbrengers is van de cyklische groep $\left(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +\right)$.
b. Bewijs dat voor een willekeurige groep G,

$$\mathrm{Aut}(G) := \{\phi : G \to G \mid \phi \text{ groepsisomorfisme}\}$$

een ondergroep is van de groep $S(G)$ van alle bijecties $G \to G$.
c. Laat zien dat

$$\mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\right) \simeq \left(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\right)^*$$

als groepen.
d. Is het voor willekeurige $k \in \mathbb{N}$ waar dat $\mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}\right) \simeq \left(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}\right)^*$? Motiveer je antwoord.

Opgave 5.
Noteer $D_n = \{r^k \mid k = 0, \ldots, n-1\} \cup \{sr^k \mid k = 0, \ldots, n-1\}$ voor de dihedrale groep van isomoetrieen die een regelmatige n-hoek in zichzelf overvoert, waarbij s een spiegeling is en r een rotatie is over een hoek van $2\pi/n$, zodanig dat $rs = sr^{-1}$.
a. Bepaal het centrum van D_4 en van D_5.
b. Toon aan dat $D_4/Z(D_4)$ isomorf is met de Viergroep V_4 van Klein.
c. Laat zien dat $[D_4, D_4] = Z(D_4)$.
d. Bepaal de commutator ondergroep $[D_5, D_5]$ van D_5.

Opgave 6.
G is een groep met ondergroep $H \subset G$. Voor een deelverzameling $X \subseteq G$ definieren we de multiplicatie afbeelding

$$\phi_X : X \times H \to G, \qquad \phi_X(x, h) := xh.$$

a. Bewijs dat er deelverzamelingen $X \subset G$ bestaan waarvoor de afbeelding ϕ_X een bijectie is.

Voor het vervolg van de opgave kiezen we een deelverzameling $X \subset G$ waarvoor ϕ_X een bijectie is.

b. Voor gegeven $h \in H$ en $x \in X$ bestaan er unieke $x' \in X$ en $h' \in H$ zodanig dat $hx = x'h'$. Toon dit aan.

Voor gegeven $h \in H$ en $x \in X$ noteren we $h \circ x \in X$ voor het bijbehorende element $x' \in X$ uit onderdeel **b.**

c. Laat zien dat de afbeelding

$$H \times X \to X, \qquad (h, x) \mapsto h \circ x$$

een linksactie van H op X definieert.
d. Bewijs: $h \circ x = x$ voor alle $h \in H$ en $x \in X$ $\Leftrightarrow$ $H \trianglelefteq G$ is een normaaldeler.