Combinatorische volledigheid in partiële groepoïden

Piet Rodenburg
Instituut voor Informatica
Universiteit van Amsterdam,
15 december 2022

Samenvatting. Ik karakteriseer de combinatorisch volledige pargoïden (partiële applicatieve systemen) door expandeerbaarheid met twee constanten die aan de bekende gelijkheden voldoen. Een voorbeeld laat zien dat deze klasse niet alleen reducten van partiële combinatorische algebra's bevat.

Abstract. I characterize the combinatorially complete pargoids (partial applicative systems) by expandability with two constants that satisfy the well-known identities. An example shows that this class contains more than just the reducts of partial combinatory algebras.

§1. Inleiding

De oppervlakkige lezer van een recent artikel van Shafer en Terwijn [ST] zou kunnen denken dat Feferman in [F] bewees dat combinatorische volledigheid — een begrip dat de auteurs alleen losjes omschrijven — in partiële groepoïden equivalent is met de aanwezigheid van twee elementen met bepaalde eigenschappen. Wie het bewijs in [F] zoekt, zal het echter niet vinden. Het is evident dat combinatorische volledigheid impliceert dat er elementen s en k zijn zo dat $sxyz \simeq xz(yz)$ en $kxy = x$; maar bestaat sxy voor alle x en y? Feferman merkt slechts op, in §3.3(1), dat het op filosofische gronden redelijk is dat een abstractieterm $\lambda^* x.\mathbf{t}$ altijd een waarde heeft, en dat de stipulatie $sxy\downarrow$, in de context van de overige combinatoraxioma's, daarvoor volstaat. Zijn minimalistische behandeling van mogelijk ongedefinieerde termen — Renardel en Troelstra wezen er al op in hun bespreking [RT] — is ook geen goed uitgangspunt voor een wiskundig bewijs.

§2. Vooraf

Als R een binaire relatie is, dan is R^+ de transitieve afsluiting van R. In het bijzonder is $\rightarrow^+$ de transitieve afsluiting van de herschrijfrelatie $\rightarrow$ (§4).

Ik volg Descartes' principe (*je pense, donc je suis*, [D]) dat een atomaire assertie het bestaan van haar subject impliceert. In het bijzonder is $M = M$ een manier om te beweren dat M bestaat. Bondiger schrijf ik $M\downarrow$ voor 'M bestaat' en $M\uparrow$ voor 'M bestaat niet'. De definitie van de Kleene-gelijkheid $\simeq$ is:

$$M \simeq N \;:\Leftrightarrow\; M\downarrow \vee N\downarrow \rightarrow M = N.$$

Een afgeleide van het zojuist beschreven *Cogito-Principe* is het *strictheidsprincipe*: de samenstellende delen van een samengestelde uitdrukking die naar een bestaand object verwijst, verwijzen naar bestaande objecten. We kunnen een gelijkheid $M(N) = P$ — mits N er echt in voorkomt — namelijk opvatten als een atomaire assertie met subject N. In een rekenkundig voorbeeld: als

$$x \div (y \div z) = 6,$$

dan bestaat $y \div z$. (En is z dus niet nul.)

Als gelijkheidssymbool in formules gebruik ik $\approx$. Ik kort de formule $\mathbf{t} \approx \mathbf{t}$ af tot $\mathbf{t}$; de formele definitie van de Kleene-gelijkheid wordt dan

$$\mathbf{s} \simeq \mathbf{t} \;:=\; \mathbf{s} \vee \mathbf{t} \rightarrow \mathbf{s} \approx \mathbf{t}.$$

Ik gebruik Hoare's notatie voor eenvoudige gevalsonderscheidingen:

$$M \lhd A \rhd N$$

is M als A waar is, en N als A onwaar is. Er hoeft niet voor beide gevallen iets gespecificeerd te worden: $M \lhd A$ is M als A waar is, en anders ongedefinieerd; en $A \rhd N \simeq N \lhd \neg A$.

Qua algebraïsche notatie volg ik [ALV]. In het bijzonder vat ik een partiële n-plaatsige operatie over een verzameling A op als een deelverzameling van $A \times A^n$. Het is gebruikelijk nulpaatsige operaties $\{\langle a, \emptyset\rangle\}$ — constanten — te identificeren met hun waarde a. Omdat bij de definitie van term- en polynoomoperaties uitgaande van partiële basisoperaties wat meer zorgvuldigheid vereist is, geef ik die hieronder in het kort weer.

Zij $\mathbf{A}$ een structuur: een verzameling A met een aantal finitaire, niet per se totale, basisoperaties over A. Dan is $\operatorname{Clo}\mathbf{A}$ de kloon der termoperaties van $\mathbf{A}$; dat is, de kleinste verzameling van operaties over A die de basisoperaties bevat en de projecties $e_i^n\colon \langle a_0,\ldots, a_{n-1}\rangle \longmapsto a_i$ van A^n op A, voor alle $i < n < \omega$, en gesloten is onder de compositie-operaties

$$C_m^n\colon \langle f, g_0,\ldots, g_{n-1}\rangle \longmapsto f(g_0,\ldots, g_{n-1}) \qquad n, m \in \omega$$

die gedefinieerd zijn, voor n-plaatsige f en m-plaatsige $g_0,\ldots, g_{n-1}$, door

$$f(g_0,\ldots, g_{n-1})(x_0,\ldots, x_{m-1}) \simeq f(g_0(x_0,\ldots, x_{m-1}),\ldots, g_{n-1}(x_0,\ldots, x_{m-1})).$$

Voor $n \in \omega$ is $\operatorname{Clo}_n\mathbf{A}$ de collectie der n-plaatsige elementen van $\operatorname{Clo}\mathbf{A}$.

De kloon $\operatorname{Pol}\mathbf{A}$ der polynoomoperaties van $\mathbf{A}$ is analoog gedefinieerd, maar bevat ook nog alle constanten: voor elke $a \in A$ de nulplaatsige operatie met waarde a. Voor $n \in \omega$ is $\operatorname{Pol}_n\mathbf{A}$ de collectie der n-plaatsige elementen van $\operatorname{Pol}\mathbf{A}$. In het bijzonder bevat $\operatorname{Pol}_n\mathbf{A}$ de n-plaatsige constante functies — de n-plaatsige functie met constante waarde a is $C_n^0(a)$.

Laat $\mathcal{L}$ een algebraïsch type zijn: een verzameling operatiesymbolen van gegeven eindige plaatsigheid. Ik noteer de verzameling der termen van type $\mathcal{L}$ in variabelen uit een gegeven verzameling X als $T_{\mathcal{L}}(X)$. In een structuur $\mathbf{A}$ van type $\mathcal{L}$ — die voor ieder symbool $Q \in \mathcal{L}$ een operatie $Q^{\mathbf{A}}$ over het domein A levert van de bij Q behorende plaatsigheid — interpreteren we de elementen van $T_{\mathcal{L}}(X)$ als partiële functies van de verzameling A^X der bedelingen aan X in A, als volgt:

als $\mathbf{t} = x \in X$, dan is $\mathbf{t}^{\mathbf{A}}$ de projectie $e_x^X\colon a \longmapsto a(x)$;
als $\mathbf{t} = Q\mathbf{s}_1\ldots\mathbf{s}_n$, dan $\mathbf{t}^{\mathbf{A}} = Q^{\mathbf{A}}(\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}},\ldots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}})$.

Als $X = n$ $(= \{0,\ldots, n-1\})$, dan zijn de operaties $\mathbf{t}^{\mathbf{A}}$ de elementen van $\operatorname{Clo}_n\mathbf{A}$.

Zij $\mathbf{A}_A$ de expansie van $\mathbf{A}$ waarin ieder element van het domein wordt aangeduid door een eigen constantesymbool. Noteer het type van $\mathbf{A}_A$ als $\mathcal{L} \cup A$. Omdat $\operatorname{Pol}\mathbf{A} = \operatorname{Clo}\mathbf{A}_A$, zijn de elementen van $\operatorname{Pol}_n\mathbf{A}$ de operaties $\mathbf{p}^{\mathbf{A}}$ voor $\mathbf{p} \in T_{\mathcal{L}\cup A}(n)$.

Omdat een term in variabelen uit X ook een term is in variabelen uit een omvattende verzameling Y, is de notatie $\mathbf{t}^{\mathbf{A}}$ niet altijd eenduidig. Ik noteer dan $\mathbf{t}_X^{\mathbf{A}}$ voor de partiële functie van bedelingen aan X. De kleinste X waarvoor $\mathbf{t}_X^{\mathbf{A}}$ nietleeg kan zijn, is $\operatorname{Var}\mathbf{t}$, de verzameling der variabelen die in $\mathbf{t}$ voorkomen.

Het is overigens gebruikelijk om in concrete gevallen, zoals dat van het product in een pargoïde, voor het onderscheid tussen operatiesymbool Q en operatie $Q^{\mathbf{A}}$ op de context te vertrouwen en superscripten te onderdrukken.

Laat **A** en **B** structuren zijn van hetzelfde type $\mathcal{L}$. Dan is **A** een *relatieve substructuur* van **B** als $A \subseteq B$, en voor elke n, voor ieder n-plaatsig operatiesymbool $Q \in \mathcal{L}$ en alle $a_1,\ldots, a_n \in A$, geldt:

$$Q^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots, a_n) \simeq Q^{\mathbf{B}}(a_1,\ldots, a_n) \lhd Q^{\mathbf{B}}(a_1,\ldots, a_n) \in A.$$

§3. Pargoïden en combinatorische volledigheid

Een *partiële applicatieve structuur* [B], of *partiële groepoïde*, ingekort *pargoïde* [LE], is een niet-lege verzameling A met een binaire operatie $\cdot$ (applicatie, product) die niet per se voor alle paren in $A \times A$ is gedefinieerd. Een pargoïde heet *totaal*, of een *groepoïde* (of *applicatieve structuur*) als haar productoperatie totaal is.

Een element a van een pargoïde $\mathbf{A} = \langle A, \cdot\rangle$ is *linkspassief* als voor geen enkele $x \in A$ het product $a \cdot x$ gedefinieerd is.

Het operatiesymbool $\cdot$ wordt vaak weggelaten. Er zijn drie soorten contexten waarin we de operatiepunt *wel* schrijven: als de operatie een zekere nadruk heeft, zoals in definities; om een van de applicaties uit te lichten, bijvoorbeeld om haakjes uit te sparen, wanneer we $x \cdot yz$ noteren in plaats van $x(yz)$; en wanneer sommige factoren worden weergegeven met complexe uitdrukkingen. We laten het product associeren naar links: $xyz = (xy)z$.

Een niet-totale productoperatie induceert totaal ongedefinieerde polynoomoperaties:

PROPOSITIE 1. Zij $\mathbf{A} = \langle A, \cdot\rangle$ een niet-totale pargoïde. Dan $\emptyset \in \mathrm{Pol}_n\mathbf{A}$ voor alle $n \geq 0$.

BEWIJS. Stel dat $a_1a_2\uparrow$. Dan is $C^2_0(\cdot, a_1, a_2)$ de lege nulplaatsige operatie; en $C^0_n(C^2_0(\cdot, a_1, a_2))$ is n-plaatsig en leeg. ⊠

DEFINITIE 2. Een pargoïde **A** is *combinatorisch volledig* als voor alle $n \geq 1$, voor iedere n-plaatsige polynoomoperatie p van **A**, een element $a \in A$ bestaat zo dat

voor alle $x_1,\ldots, x_n \in A$, $\qquad ax_1\ldots x_n \simeq p(x_1,\ldots, x_n)$.

OPMERKING. Bij $n = 0$ treedt een probleem op. Als $p \neq \emptyset$, dan is p zelf een geschikte a. Maar als **A** niet totaal is, dan is er ook een nulplaatsige polynoomoperatie zonder waarde; en die is natuurlijk *niet* equivalent met een element van A.

Definitie 2 generaliseert de gebruikelijke definitie voor groepoïden:

PROPOSITIE 3. Een groepoïde **A** is combinatorisch volledig dan en slechts dan als voor alle $n \geq 0$, voor iedere n-plaatsige polynoomoperatie p van **A**, een $a \in A$ bestaat zo dat voor alle $x_1,\ldots, x_n \in A$, $ax_1\ldots x_n = p(x_1,\ldots, x_n)$.

BEWIJS. Merk op dat in een groepoïde alle polynoomoperaties totaal zijn; daardoor geldt voor polynoomoperaties p en q en $x_1,\ldots, x_n \in A$:

$$(*) \qquad p(x_1,\ldots, x_n) \simeq q(x_1,\ldots, x_n) \Leftrightarrow p(x_1,\ldots, x_n) = q(x_1,\ldots, x_n).$$

($\Rightarrow$) Zij p een niet-lege nulplaatsige polynoomoperatie. Dan is p een eenling $\{\langle a, \emptyset\rangle\}$, voor zekere $a \in A$; dus $a = p(\emptyset)$.
($\Leftarrow$) Direct uit ($*$). $\boxtimes$

§4. Partiële combinatorische algebra's

Een *semicombinatorische algebra*, afgekort *sca*, is een pargoïde **A** waarin twee constantesymbolen s en k geïnterpreteerd zijn zo dat

$$\mathbf{A} \models (1)\ sxyz \simeq xz(yz)\ \&\ (2)\ kxy \approx x.$$

Een sca is een *partiële combinatorische algebra*, afgekort *pca*, als bovendien

$$\mathbf{A} \models (0)\ sxy.$$

Een pca is *totaal*, of een *combinatorische algebra*, als de productoperatie totaal is.

LEMMA 1 (Bethke). Elke niet-totale pca bevat een linkspassief element.

BEWIJS. Laat $\mathbf{A} = \langle A, \cdot, s, k\rangle$ een pca zijn, en a, b elementen van A zonder product $a \cdot b$. Uit het gegeven dat $kaa = a$ en $kbb = b$ volgt wegens het cogito-principe dat ka en kb bestaan; dus volgens (0) bestaat $s(ka)(kb)$. Wegens (1) en (2) geldt nu voor elke $x \in A$:

$$s(ka)(kb)x \simeq kax(kbx) \simeq ab,$$

dus $s(ka)(kb)x\uparrow$. $\boxtimes$

STELLING 2. Een pargoïde is combinatorisch volledig dan en slechts dan als ze expandeerbaar is tot een semicombinatorische algebra, en ofwel totaal is, of een linkspassief element bevat.

BEWIJS. ($\Rightarrow$) Zij **A** een combinatorisch volledige pargoïde. Uit de combinatorische volledigheid volgt dat **A** elementen s en k heeft die voldoen aan

$$(1)\ sxyz \simeq xz(yz)\ \ \&\ \ (2\text{a})\ kxy \simeq x.$$

Omdat x varieert over bestaande elementen van **A**, is (2a) equivalent met

$$(2)\ kxy \approx x.$$

Als **A** niet totaal is, dan $\emptyset \in \mathrm{Pol}_1\mathbf{A}$ volgens §3, Propositie 1. Wegens combinatorische volledigheid is er dan een $a \in A$ zo dat voor alle $x \in A$

$$ax \simeq \emptyset(x),$$

dus $ax\uparrow$.
($\Leftarrow$) Zij $\mathbf{A} = \langle A, \cdot, s, k\rangle$ een semicombinatorische algebra. Laat C het type $\{\cdot, s, k\}$ zijn, en $T_{C\cup A}(Y)$ de verzameling der formele **A**-polynomen in een aftelbaar oneindige verzameling Y van variabelen. We definiëren voor elke $x \in Y$ een operatie λ^*x die $T_{C\cup A}(Y)$ afbeeldt naar $T_{C\cup A}(Y \setminus \{x\})$, als volgt: $\lambda^*x.\mathbf{p}$ is

$\mathbf{i} := skk$ als $\mathbf{p} = x$,

$k\mathbf{p}$ als x niet voorkomt in $\mathbf{p}$,

$s(\lambda^*x.\mathbf{r})(\lambda^*x.\mathbf{q})$ anders, als $\mathbf{p} = \mathbf{rq}$.

Een eenvoudige inductie naar $\mathbf{p}$ laat zien dat x niet voorkomt in $\lambda^*x.\mathbf{p}$. De volgende stap is dat we bewijzen, opnieuw met inductie naar $\mathbf{p}$, dat voor alle $b \in A$ en $c\colon Y \setminus \{x\} \longrightarrow A$,

$$(\lambda^*x.\mathbf{p})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c) \cdot b \simeq \mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y}(c \cup \{\langle b, x\rangle\}) \qquad (\lambda^*).$$

We vereenvoudigen de uitdrukking aan de rechterkant tot $\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y}(c, b)$.

1° $\mathbf{p} = x$. We moeten bewijzen dat $skkb = b$, voor elke $b \in A$. Wegens (1),

$$skkb \simeq kb(kb);$$

wegens (2) bestaat kbb, en dus kb; opnieuw uit (2) volgt dan dat $kb(kb) = b$.

2° x komt niet voor in $\mathbf{p}$. Zij $c \in A^{Y\setminus\{x\}}$. We moeten bewijzen dat

$$k \cdot \mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c) \cdot b \simeq \mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y}(c, b), \qquad \text{voor elke } b \in A.$$

Merk op dat $\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c) \simeq \mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y}(c, b)$. Als $\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)$ bestaat, dan

$$k \cdot \mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c) \cdot b = \mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)$$

volgens (2). En als $\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)$ niet bestaat, dan bestaat $k \cdot \mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c) \cdot b$ ook niet, volgens het strictheidsprincipe.

3° $\mathbf{p} = \mathbf{rq}$. Zij $c \in A^{Y\setminus\{x\}}$. We moeten bewijzen dat

$$s \cdot (\lambda^*x.\mathbf{r})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c) \cdot (\lambda^*x.\mathbf{q})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c) \cdot b \simeq \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_{Y}(c, b) \cdot \mathbf{q}^{\mathbf{A}}_{Y}(c, b), \quad \text{voor elke } b \in A.$$

Als $\mathbf{r}^{\mathbf{A}}_{Y}(c, b) \cdot \mathbf{q}^{\mathbf{A}}_{Y}(c, b)$ bestaat, dan bestaan $\mathbf{r}^{\mathbf{A}}_{Y}(c, b)$ en $\mathbf{q}^{\mathbf{A}}_{Y}(c, b)$ volgens het strictheidsprincipe; volgens inductiehypothese bestaan dan ook $(\lambda^*x.\mathbf{r})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)$ en $(\lambda^*x.\mathbf{q})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)$. Dan kunnen we (1) toepassen. Voor de omgekeerde richting, stel

$$s \cdot (\lambda^*x.\mathbf{r})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c) \cdot (\lambda^*x.\mathbf{q})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c) \cdot b \text{ bestaat.}$$

Dan

$$\begin{aligned}
&s \cdot (\lambda^*x.\mathbf{r})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c) \cdot (\lambda^*x.\mathbf{q})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c) \cdot b = \\
&\qquad (\lambda^*x.\mathbf{r})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c) \cdot b \cdot ((\lambda^*x.\mathbf{q})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c) \cdot b) \quad \text{wegens (1)}\\
&\qquad = \mathbf{r}^{\mathbf{A}}_{Y}(c, b) \cdot \mathbf{q}^{\mathbf{A}}_{Y}(c, b) \quad \text{volgens inductiehypothese}\\
&\qquad = \mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y}(c, b).
\end{aligned}$$

Wegens het strictheidsprincipe impliceert (λ^*):

$$\mathrm{Dom}\,(\lambda^*x.\mathbf{p})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}} \supseteq \{c \in A^{Y\setminus\{x\}} \mid \exists b \in A.\ c \cup \{\langle b, x\rangle\} \in \mathrm{Dom}\,\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y}\} \qquad (\mathrm{D}\lambda^*).$$

Zij d een linkspassief element van $\mathbf{A}$. Zij $p \in \mathrm{Pol}_n\mathbf{A}$. Stel $p = \mathbf{p}^{\mathbf{A}}$, waar $\mathbf{p} \in T_{C\cup A}(x_1,\ldots,x_n)$; definieer

$$a := \ d \lhd \mathrm{Dom}\,p = \emptyset \rhd (\lambda^*x_1.\ldots\lambda^*x_n.\mathbf{p})^{\mathbf{A}}_{\emptyset}.$$

Als $\mathrm{Dom}\,p = \emptyset$, dan divergeren $ab_1\ldots b_n$ en $p(b_1,\ldots,b_n)$ gelijkelijk voor alle $b_1,\ldots,b_n \in A$. Stel nu dat $\mathrm{Dom}\,p \neq \emptyset$. Dan concluderen we in n stappen met behulp van $(\mathrm{D}\lambda^*)$ dat $(\lambda^*x_1.\ldots\lambda^*x_n.\mathbf{p})^{\mathbf{A}}_{\emptyset}\!\downarrow$. Vervolgens berekenen we

$$\begin{aligned}
ab_1\ldots b_n &\simeq (\lambda^*x_1.\ldots\lambda^*x_n.\mathbf{p})^{\mathbf{A}}b_1\ldots b_n && \text{per definitie}\\
&\simeq (\lambda^*x_2.\ldots\lambda^*x_n.\mathbf{p}(b_1, x_2,\ldots, x_n))^{\mathbf{A}}b_2\ldots b_n && \text{wegens } (\lambda^*)\\
&\simeq (\lambda^*x_3.\ldots\lambda^*x_n.\mathbf{p}(b_1, b_2, x_3,\ldots, x_n))^{\mathbf{A}}b_3\ldots b_n && \text{evenzo}\\
&\simeq \ldots\ldots\\
&\simeq \mathbf{p}(b_1,\ldots, b_n)^{\mathbf{A}} = p(b_1,\ldots, b_n).
\end{aligned}$$

Dus $\mathbf{A}$ is combinatorisch volledig.

Als **A** geen linkspassief element heeft, dan is, volgens Lemma 1, **A** totaal. Dan heeft **A** geen lege polynoomoperaties, en volstaat de definitie

$$a \ := \ (\lambda^* x_1 \ldots \lambda^* x_n.\mathbf{p})^{\mathbf{A}}_{\emptyset}$$

om aan te tonen dat **A** combinatorisch volledig is. ⊠

GEVOLG 3. Partiële combinatorische algebra's zijn combinatorisch volledig.

BEWIJS. Partiële combinatorische algebra's zijn semicombinatorische algebra's, en de niet-totale bevatten een linkspassief element, volgens Lemma 1. ⊠

Voorbeeld 4

Laat $C = \{\cdot, s, k\}$ het type zijn van de combinatorische algebra's, X een willekeurige verzameling variabelen, en N de verzameling der normaalvormen in $T_C(X)$ van het termherschrijfsysteem CL :=

$$\begin{aligned} &sxyz \to xz(yz), \\ &kxy \to x. \end{aligned}$$

Definieer de productoperatie $*$ op N door

$$\mathbf{m} * \mathbf{n} :\simeq \text{de normaalvorm van } \mathbf{mn}.$$

(Het systeem CL is confluent; normaalvormen zijn dus uniek. Cf. [Te].)

De structuur $\mathbf{N} = \langle N, *, s, k\rangle$ is een pca: de herschrijfregels van CL corresponderen met de wetten (1) en (2), en als **m** en **n** normaalvormen zijn van CL, dan is $s\mathbf{mn}$ ook een normaalvorm. Gevolg 3 impliceert dus dat **N** (of eigenlijk haar pargoïdereduct) combinatorisch volledig is.

De converse van Gevolg 3 is

(†) Iedere combinatorisch volledige pargoïde is expandeerbaar tot een pca.

Met een variatie op Voorbeeld 4 zullen we laten zien dat (†) *niet* waar is.

Voorbeeld 5

Zij **N** als in het vorige voorbeeld; maar neem aan dat X oneindig is. Zij $\boldsymbol{\omega} := s\mathbf{ii}$. De term $\boldsymbol{\omega}$ behoort tot N, maar $\boldsymbol{\omega} * \boldsymbol{\omega}$ bestaat niet. Definieer: $\mathbf{d} := s(k\boldsymbol{\omega})(k\boldsymbol{\omega})$. Dan is **d** een linkspassief element van **N** (zie het bewijs van Lemma 1). Laat nu

$$L := \{\mathbf{n} \in N \,|\, (\mathbf{n} * x)\!\downarrow \text{ voor } x \in X \setminus \mathrm{Var}\,\mathbf{n}\},$$

en $N' = L \cup \{\mathbf{d}\}$. Merk op dat L alle termen bevat waar de constantesymbolen s en k niet in voorkomen. Zij $\mathbf{N}'$ de relatieve substructuur van **N** met domein N'.

PROPOSITIE 5.1. $\mathbf{N}'$ is een sca.

BEWIJS. Laat **p** en **q** elementen zijn van $T_C(X)$ zo dat $\mathbf{p} \to \mathbf{q}$ in CL. Dan hebben **p** en **q** ofwel dezelfde tot N' behorende normaalvorm, of ze hebben allebei geen normaalvorm in N'. Dus $\mathbf{N}' \models \mathbf{p} \simeq \mathbf{q}$; en als $\mathbf{q} \in X$, $\mathbf{N}' \models \mathbf{p} \approx \mathbf{q}$. Dus $\mathbf{N}'$ voldoet aan de gelijkheden (1) en (2).⊡

GEVOLG 5.2. $\mathbf{N}'$ is combinatorisch volledig.

BEWIJS. Combineer Stelling 2 met de bovenstaande Propositie en het feit dat een linkspassief element van een pargoïde **P** ook linkspassief is in relatieve substructuren van **P**. ⊡

De CL-normaalvorm $\boldsymbol{\omega}$ behoort tot L, want $\boldsymbol{\omega} * x = xx$. Dus ook $k\boldsymbol{\omega} \in L$. Evenzo $s\boldsymbol{\omega}\mathbf{i} \in L$: $s\boldsymbol{\omega}\mathbf{i} * x = xxx$; en $k(s\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}) \in L$. Merk nu op dat $s\boldsymbol{\omega}\mathbf{i} * \boldsymbol{\omega}\uparrow$:

$$s\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}\boldsymbol{\omega} \to \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{i}\boldsymbol{\omega}) \to^+ \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega} \to^+ \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}.$$

De normaalvorm $s(k(s\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}))(k\boldsymbol{\omega})$ is dus linkspassief in $\mathbf{N}$ (cf. het bewijs van Lemma 1); maar $s(k(s\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}))(k\boldsymbol{\omega}) \neq \mathbf{d}$, dus $s(k(s\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}))(k\boldsymbol{\omega}) \notin N'$. Bijgevolg $\mathbf{N}' \not\models (0)$; dus $\mathbf{N}'$ is geen pca.

Hiermee is (†) echter nog niet weerlegd, want combinatorische volledigheid is formeel een eigenschap van de pargoïde $\mathbf{N}'\lceil\{\cdot\}$.

PROPOSITIE 5.3. Er zijn geen $\mathbf{t}, \mathbf{u} \in N'$ zo dat $\langle N', *, \mathbf{t}^{\mathbf{N}}, \mathbf{u}^{\mathbf{N}}\rangle$ een pca is.

BEWIJS. We zullen laten zien dat er geen $\mathbf{t} \in N'$ bestaat zo dat

(3) $$\mathbf{N}' \models \mathbf{t}xy \ \&\ \mathbf{t}xyz \simeq xz(yz).$$

Stel dat $\mathbf{t}$ voldoet aan (3). Dan $\mathbf{N}' \models \mathbf{t}(k(s\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}))(k\boldsymbol{\omega})$. Neem drie variabelen x, y en z die niet tot Var$\mathbf{t}$ behoren. Uit (3) volgt, omdat $xz(yz)\downarrow$,

$$\mathbf{t}xyz \to^+ xz(yz);$$

substitutie van $k(s\boldsymbol{\omega}\mathbf{i})$ voor x en $k\boldsymbol{\omega}$ voor y in de herschrijving geeft

$$\mathbf{t}(k(s\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}))(k\boldsymbol{\omega})z \to^+ k(s\boldsymbol{\omega}\mathbf{i})z(k\boldsymbol{\omega}z).$$

Maar $k(s\boldsymbol{\omega}\mathbf{i})z(k\boldsymbol{\omega}z)$ reduceert tot $s\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}\boldsymbol{\omega}$, en heeft dus geen normaalvorm. Dus

$$(\mathbf{t}(k(s\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}))(k\boldsymbol{\omega}))^{\mathbf{N}'}_{X}(1_X) \notin L;$$

de normaalvorm van $\mathbf{t}(k(s\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}))(k\boldsymbol{\omega})$ moet dus $\mathbf{d}$ zijn. We concluderen nu dat $\mathbf{t}(k(s\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}))(k\boldsymbol{\omega})z$ enerzijds reduceert tot $s\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}\boldsymbol{\omega}$, en anderzijds tot $\mathbf{d}z$, en a fortiori tot $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}$. Omdat CL confluent is, zouden $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}$ en $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}$ dan een gemeenschappelijk reduct moeten hebben. Dat hebben ze echter overduidelijk niet. ⊠

Voorbeeld 6

Turing beschreef in [Tu] een machinebegrip, en beredeneerde dat alle denkbare algoritmen daaronder vallen. Er zijn bijectieve nummeringen van de Turing-machines en hun berekeningen zo dat het predikaat $Texy$,

"met invoer x termineert Turing-machine e na berekening y",

primitief recursief is, en de functie U die uit het nummer van een berekening zo mogelijk het resultaat afleest berekenbaar. De berekenbare functie met index e definieert men dan door

$$\varphi_e(x) \simeq U(\mu y.Texy).$$

Volgens de recursiestelling zijn er totale berekenbare functies f en g zo dat voor alle $x, y, z \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{f(x)}(y) \simeq x \quad \text{en} \quad \varphi_{g(x,y)}(z) \simeq \varphi_{\varphi_x(z)}(\varphi_y(z));$$

en een totale berekenbare functie h zo dat voor alle x en y, $\varphi_{h(x)}(y) = g(x, y)$.

Laat nu s een index zijn van h, en k een index van f. Definieer een productoperatie over $\mathbb{N}$ door

$$x \cdot y \simeq \varphi_x(y).$$

Dan geldt

$$k \cdot x = f(x) \quad \text{en} \quad s \cdot x \cdot y = g(x, y);$$

a fortiori gelden de wetten (1) en (2). Dus $\langle \mathbb{N}, \cdot, s, k\rangle$ is een partiële combinatorische algebra.

§5. Conclusie

Het bovenstaande illustreert, allicht ten overvloede, de verraderlijkheid van partiële operaties.

De definitie van polynomen is naar mijn mening de algemeenst mogelijke. Een minder algemene definitie vermeerdert overigens de combinatorisch volledige pargoïden, en dus de tegenvoorbeelden bij (†) boven Voorbeeld 5.

Op de rekentheoretische pargoïden die Shafer en Terwijn bestuderen in [ST] — Voorbeeld 6 is de eenvoudigste — is de redenering van Feferman van toepassing. Zo transformeert de functie g in Voorbeeld 6 twee getallen in een algoritmische code, en als we van de codes niet te veel verwachten, is een dergelijke transformatie altijd mogelijk. Er is echter geen intrinsieke reden waarom een combinatorisch volledige pargoïde een onderverdeling in enerzijds coderingen en anderzijds risocovolle berekeningen zou moeten kennen.

Erkentelijkheid. Discussie met Henk Barendregt over een vroege versie van dit betoog heeft geleid tot een aanzienlijke verbetering van de presentatie.

Verwijzingen

[ALV] Ralph N. McKenzie, George F. McNulty & Walter F. Taylor: *Algebras, lattices, varieties*. Deel I. Belmont 1987.

[B] Ingemarie Bethke: On the existence of extensional partial combinatory algebras. *Journal of Symbolic Logic* LII:3 (1987), 819-33.

[D] René Descartes: *Discours de la Méthode pour bien conduire la raison, et chercher la verité dans les sciences*. Leiden 1637.

[F] Solomon Feferman: A language and axioms for explicit mathematics. In *Algebra and Logic*, ed. J.N. Crossley (1975), pp. 87-139.

[LE] E.S. Ljapin & A.E. Evseev: *The theory of partial algebraic operations*. Dordrecht 1997.

[RT] Gerard Renardel de Lavalette en Anne Troelstra: Bespreking van [F]. *Journal of Symbolic Logic* IL:1 (1984), 308-311.

[S] Robert I. Soare: *Turing Computability*. Berlijn 2016.

[ST] Paul Shafer & Sebastiaan A. Terwijn: Ordinal analysis of partial combinatory algebras. *Journal of Symbolic Logic* LXXXVI (2021), 1154-1188.

[Te] Terese: *Term rewriting systems*. Cambridge UP, 2003.

[Tu] A.M. Turing: On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2e reeks, 42 (1936) 230-265.