# Hedging en derivaten 2000-2001

## opgaven

**P.J.C. Spreij**

versie 17 februari 2001

# Week 1

1. Veronderstel dat de stochasten $X_1, X_2, \dots$ zwak naar een standaard normale verdeling convergeren. Zij $(a_n)$ en $(b_n)$ convergerende rijen in $\mathbb{R}$ met limieten $a$ respectevelijk $b$. Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a_n < X_n \leq b_n) = \Phi(b) - \Phi(a)$.

2. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = -d_1(S,T)$, waarbij de notatie die is als in het bewijs van proposition 4.6.1 van Bingham & Kiesel. Laat zien dat het kennen van het limietgedrag van $\beta_n$ niet relevant is voor het bewijzen van (4.13). Laat ook zien dat $\lim_{n\to\infty} \Delta_n a_n = \frac{1}{2}T$.

3. Bewijs (analoog aan theorem 2.9.2) de volgende versie van de Centrale Limietstelling.

   Gegeven is een rij natuurlijke getallen $k_n$ met $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$ en een dubbelrij van stochasten $W_{n,i}$ $(i = 1, \dots, k_n)$. Voor elke $n$ zijn de stochasten $W_{n,i}$ voor $i = 1, \dots, k_n$ onafhankelijk en gelijk verdeeld. Definieer $S_n = \sum_{i=1}^{k_n} W_{n,i}$. Veronderstel verder dat $\mathbb{E}W_{n,i} = 0$ voor alle $n, i$ en dat $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}S_n^2 = \sigma^2$ met $\sigma^2 \leq \infty$.
   Dan geldt dat de verdeling van $S_n$ zwak naar de $N(0,\sigma^2)$ verdeling convergeert.

4. We volgen weer de notatie van het boek. Zij voorts $W_{n,i} = \log Z_{n,i}$ en definieer voor iedere $t \in [0,t]$ de stochastische variabele $Y_n(t) = \sum_{i \leq \frac{k_n t}{T}} W_{n,i}$. Zij $t_1, t_2, \dots$ een stijgend rijtje getallen in $[0,T]$.
   Laat zien dat voor vaste $n$ de aangroeiingen $\Delta Y_{n,i} := Y_n(t_i) - Y_n(t_{i-1})$ onafhankelijk zijn. Laat voorts zien dat $\Delta Y_{n,i}$ voor $n \to \infty$ in verdeling convergeert naar een stochast $\Delta Y_i$ met een $N((t_i - t_{i-1})(r - \frac{1}{2}\sigma^2), (t_i - t_{i-1})\sigma^2)$ verdeling. Bovendien zijn de stochasten $\Delta Y_i$ onafhankelijk.

5. Zij $Z$ een $N(\mu, \sigma^2)$ verdeelde stochast. Bepaal $m(u) = \mathbb{E}e^{uZ}$ ($m$ heet de *moment genererende functie* van $Z$). Schrijf daartoe de verwachting als integraal in de integratievariabele $z$ en pas de substitutie $y = \frac{z - \mu - u\sigma^2}{\sigma}$ toe.
   Een positieve stochast $Z$ heet *lognormaal* verdeeld met parameters $\mu$ en $\sigma^2$ als $\log Z$ normaal $N(\mu, \sigma^2)$ verdeeld is. Wat is nu de verwachting van een lognormaal verdeelde stochast met parameters $\mu$ en $\sigma^2$?

## Week 2

1. Laat m.b.v. een berekening zien dat de dichtheid van een niet-ontaarde multivariaat normale verdeling inderdaad integraal 1 heeft.

2. Zij $B$ een standaard Brownse beweging en zij $t > s > 0$. Wat is de verdeling van de vector $(B(\frac{1}{2}(s+t), B(s), B(t))$? Bepaal de voorwaardelijke verdeling van $B(\frac{1}{2}(s+t))$ gegeven $B(s) = x$ en $B(t) = z$.

3. Bewijs (een deel van) het Borel-Cantelli lemma:

   Als $(A_k)$ een rij gebeurtenissen is waarvoor geldt dat $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) < \infty$, dan geldt $\mathbb{P}(\limsup A_k) = 0$.
   *Aanwijzing:* Definieer $V_m = \bigcup_{k \geq m} A_k$, dan geldt dat de rij $(V_m)$ dalend is en voor elke $N$ geldt dat $\mathbb{P}(\limsup A_k) \leq \mathbb{P}(\bigcap_{m=1}^{N} V_m)$.

4. Laat zien dat $C[0,1]$ onder de sup norm volledig is. (Gebruik de volledigheid van $\mathbb{R}$.)

5. De Haarfuncties vormen een volledig orthonormaal stelsel van $L^2[0,1]$. Ga eerst na dat het stelsel orthonormaal is. Voor het bewijzen van de volledigheid redeneren we langs de volgende stappen. Zij $f$ orthogonaal op alle $H_{k,n}$ en zij $F = \int_0^{\cdot} f(u)du$. Laat zien dat $F$ nul is in alle $t = k2^{-n}$, en daardoor nul op het hele interval. Concludeer nu dat $f = 0$.

6. Zij $(X_n)$ een rij stochastische $k$-vectoren die in $L^2$-zin naar een stochastische vector $X$ convergeren. Laat zien dat $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X$ en $\mathrm{Cov}(X_n) \to \mathrm{Cov}(X)$.
   Veronderstel dat alle $X_n$ (multivariaat) normaal verdeeld zijn. Ga na dat dan ook $X$ (multivariaat) normaal verdeeld is. Met welke parameters?

7. Bekijk de processen $B^{(n)}$ uit Karatzas & Shreve. Zij $t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$. Laat zien dat de rij van stochastische vectoren $(B_{t_1}^{(n)}, \ldots, B_{t_k}^{(n)})$ in $L^2$-zin naar $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_k})$ convergeert. (*Aanwijzing:* Deze rij is Cauchy in $L^2$, heeft dus een limiet. Identificeer nu de limiet.)

# Week 3

1. De $p$-de orde variatie van een functie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ over een partitie $\Pi = \{t_0, \ldots, t_n\}$ van $[0,1]$ met $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ is definieerd als $V^p(f;\Pi) = \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p$. Definieer voorts

$$V^p(f) = \lim V^p(f;\Pi),$$

waarbij de limiet genomen wordt over partities met maaswijdte naderend naar nul.

Bewijs: als $f \in C[0,1]$ en voor zekere $p > 0$ is $V^p(f)$ positief en eindig, dan is voor elke $p' < p$ de variatie $V^{p'}(f) = \infty$ en voor elke $p' > p$ is $V^{p'}(f) = 0$.

2. Beschouw de situatie van Bingham & Kiesel sectie 4.6.2 en laat $W_{n,i} = Z_{n,i} - 1$. Laat met de $p_n^*$ van pagina 113 zien dat $\sum_{i=1}^{k_n}(W_{n,i} - r\Delta_n)$ zwak convergeert naar een normale verdeling met verwachting nul en variantie $\sigma^2 T$. Concludeer dat in de limiet $Y_n := \sum_{i=1}^{k_n} W_{n,i}$ een normale verdeling heeft met verwachting $rT$ en variantie $\sigma^2 T$.
Wat voor verdeling zouden we krijgen als we in de laatste sommatie de index laten lopen over de gehele waarden die tussen $\frac{sk_n}{T}$ en $\frac{tk_n}{T}$ liggen met $0 < s < t$?
*Commentaar*: De stochastisch variabele $Y_n$ is het cumulatieve (relatieve) rendement van het aandeel met prijs $S$:

$$Y_n = \sum_{i=0}^{k_n - 1} \frac{S_n(t_{n,i+1}) - S_n(t_{n,i})}{S_n(t_{n,i})}.$$

3. Bewijs de (overige) beweringen in lemma 9.4 uit Karatzas & Shreve (pagina 104).

4. Zij $p : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ gedefinieerd door

$$p(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t}).$$

Laat zien dat $p$ voldoet aan de *warmtevergelijking*:

$$p_t - \frac{1}{2} p_{xx} = 0.$$

# Week 4

1. (a) Bekijk de afbeelding $x \mapsto p(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2 t})$ en laat zien dat $p$ een oplossing is van de *warmtevergelijking*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

   (b) Andere oplossingen van de warmtevergelijking zijn van de vorm

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) p(t, x-y) dy$$

   en hebben de eigenschap dat $u(0,x) = f(x)$. Laat dit zien.
   Merk op dat $u(t,x)$ gelijk is aan de verwachting van $f(Z)$ als $Z$ een normale $N(x, \sigma^2 t)$ verdeling heeft.

   (c) Definiëren we nu $v(t,x) = u(T-t, x)$, dan is $v$ een oplossing van de *achterwaartse* warmtevergelijking $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$ met *eindwaarde* $v(T,x) = f(x)$. Toon dit aan.

   (d) Laat zien dat geldt $v(t,x) = Ef(Z)$, met $Z$ normaal verdeeld met verwachting $x$ en variantie $\sigma^2(T-t)$.

2. Beschouw twee functies $u$ en $v$ in twee variabelen, die gerelateerd zijn door

$$u(t,x) = v(t, e^{x - \frac{1}{2}\sigma^2 t}).$$

   Onder de veronderstelling dat de partiële afgeleiden hieronder bestaan geldt dat $v$ voldoet aan de *Black-Scholes* partiële differentiaalvergelijking bij een rentevoet van nul, d.w.z. aan

$$v_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) = 0$$

   als en alleen als $u$ voldoet aan de (achterwaartse) warmtevergelijking

$$u_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 u_{xx}(t,x) = 0.$$

   Toon dit aan.
   *Commentaar*: Om bovenstaande Black-Scholes vergelijking op te lossen is het dus voldoende oplossingen van de warmtevergelijking te kennen.

3. Veronderstel dat de functie $\bar{v}$ voldoet aan

$$\bar{v}_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \bar{v}_{xx}(t,x) = 0$$

   Zij nu

$$v(t,x) = \bar{v}(t, xe^{-rt})e^{rt}.$$

Laat zien dat $v$ voldoet aan de vergelijking

$$v_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) + rxv_x(t,x) - rv(t,x) = 0.$$

*Commentaar*: Deze laatste vergelijking is wat de echte Black-Scholes vergelijking genoemd wordt. Het is dus voor de Black-Scholes opzet voldoende als we de eerste vergelijking kunnen oplossen (met de geschikte randvoorwaarden) en via opgave 2 is het dus voldoende als we de warmtevergelijking kunnen oplossen.

# Week 5

1. Beschouw de discrete tijd markt met één aandeel en één obligatie. Beschouw een portefeuille proces $(x_t, y_t)$ ($x_t$ het aantal aandelen op tijdstip $t$ en $y_t$ het aantal obligaties op tijdstip $t$) en veronderstel dat de portefeuille zelf-financierend is. Zij $\bar{S}$ het verdisconteerde prijsproces ($\bar{S}_t = S_t/B_t$) en $\bar{V}$ het verdisconteerde waardeproces. Laat zien dat voor alle $t$ geldt dat $\Delta\bar{V}_t = x_t \Delta\bar{S}_t$. Beargumenteer dat $\bar{V}$ een martingaal is, als $\bar{S}$ dat is.

2. Laat zien dat de discrete tijd markt over een tijdsinterval $\{0, \dots, T\}$ met één aandeel en één obligatie arbitragevrij is als en alleen als $d < 1+r < u$. *Aanwijzing:* De veronderstelling dat (bijvoorbeeld) $d \geq 1 + r$ leidt als in het één periode model tot een arbitrage mogelijkheid. Omgekeerd: veronderstel dat er een (potentiele) arbitrage portefeuille is. Laat zien dat voor deze portefeuille geldt dat zijn waarde op $t = 0$ nul moet zijn.

# Week 6

1. Zij $Z$ een $N(0,\tau^2)$ verdeelde stochast. Laat zien dat voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt dat $\mathbb{E}Z\exp(\alpha Z) = \alpha\tau^2\exp(\frac{1}{2}\alpha^2\tau^2)$.

2. Zij $W$ een standaard Brownse beweging op een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ en zij voor elke $t \in \mathbb{R}$ $\mathcal{F}_t$ de $\sigma$-algebra voortgebracht door $W_s$ met $s \leq t$. Zij $Z = \exp(-aW_T - \frac{1}{2}a^2T)$ voor zekere $T > 0$. Zij $\mathbb{Q}$ de kansmaat op $\mathcal{F}_T$ gedefinieerd door $\mathrm{d}\mathbb{Q}/\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathrm{Z}$.
   Laat zien dat $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}W_t = at$ voor $t \leq T$ en dat $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[W_T|\mathcal{F}_t] = W_t + a(T-t)$.

3. Zij $W$ een standaard Brownse beweging op een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ en zij voor elke $t \in \mathbb{R}$ $\mathcal{F}_t$ de $\sigma$-algebra voortgebracht door $W_s$ met $s \leq t$. Zij $Z_T = \exp(-aW_T - \frac{1}{2}a^2T)$ voor zekere $T > 0$. Zij $\mathbb{Q}$ de kansmaat op $\mathcal{F}_T$ gedefinieerd door $\mathrm{d}\mathbb{Q}/\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathrm{Z_T}$.
   Op soortgelijke wijze kunnen we voor $t < T$ een kansmaat $\tilde{\mathbb{Q}}$ op $\mathcal{F}_t$ definiëren via $\tilde{\mathbb{Q}}(F) = \mathbb{E}1_F Z_t$ met $Z_t = \exp(-aW_t - \frac{1}{2}a^2t)$. Laat zien dat $\mathbb{Q}$ beperkt tot $\mathcal{F}_t$ overeenstemt met $\tilde{\mathbb{Q}}$.
   *Aanwijzing:* Schrijf $Z_T = Z_t\exp(-a(W_T - W_t) - \frac{1}{2}a^2(T-t))$ en gebruik de onafhankelijkheid (onder $\mathbb{P}$) van de aangroeiingen van $W$.

4. Beschouw het Black-Scholes model en een zelf-financierende portefeuille die een (niet-negatieve) claim op tijdstip $T$ repliceert. Laat zien dat de waarde van deze portefeuille voor elke $t < T$ niet-negatief is.

# Week 7

1. Zij $W$ een standaard Brownse beweging op een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $a \in \mathbb{R}$ en zij het proces $X$ gedefinieerd door $X_t = at + W_t$. Zij voorts $f$ een (meetbare) functie op $\mathbb{R}$ zó dat $u(t,x) := \mathbb{E}f(x + X_t)$ bestaat en eindig is voor alle $t$. Laat zien dat $u$ voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking

$$u_t = au_x + \frac{1}{2}u_{xx}.$$

2. In het Black-Scholes model met $r = 0$ geldt onder de risico-neutrale maat $\mathbb{Q}$ dat $S_t = S_0 \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$ met $W$ een $\mathbb{Q}$-Brownse beweging. Veronderstel dat de claim $\Phi(S_T)$ integreerbaar is m.b.t. $\mathbb{Q}$. Bekend is dat $v(t,x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Phi(S_T)|S_t = x]$ voldoet aan

$$v_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx}(t,x) = 0$$

met randwaarde $v(T,x) = \Phi(x)$.
Bekijken we het model met $r \neq 0$, dan geldt dat

$$S_t = S_0 \exp(\sigma W_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t)$$

met $W$ een $\mathbb{Q}$-Brownse beweging. Zij nu

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Phi(S_T)|S_t = x].$$

Laat m.b.v. bovenstaande zien dat deze $v$ nu voldoet aan

$$v_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) + rxv_x(t,x) - rv(t,x) = 0.$$

## Week 8

1. Beschouw het Black-Scholes model en bepaal de hedgestrategieën alsmede de waardefuncties voor de volgende enkelvoudige claims.

   (a) $\Phi(S_T) = S_T - K$.

   (b) $\Phi(S_T) = (S_T - K)^2$.
   *Aanwijzing:* Herleid de waardefunctie tot een verwachting van een stochast die van $S_T/S_t$ afhangt. Bepaal deze verwachting met behulp van opgave 5 van week 1.

   (c) $\Phi(S_T) = (\log S_T - K)^+$.

   (d) $\Phi(S_T) = (S_T - K)^+$. Ga hierbij uit van de formule voor het geval $r = 0$. De prijs $C_t$ voor deze claim wordt bij $r = 0$ gegeven door

   $$C_t = S_t \Phi(\frac{\log \frac{S_t}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}) - K\Phi(\frac{\log \frac{S_t}{K} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}).$$

   (N.B. In deze formule wordt met $\Phi$ de cumulatieve verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling bedoeld.)

2. Bereken m.b.v. de Itô regel $dZ_t$ in de volgende gevallen.

   (a) $Z_t = e^{aW_t}$. Wat is nu $\mathbb{E}e^{aW_t}$?

   (b) $Z_t = e^{aW_t - bt}$. Kijk ook naar het bijzondere geval $a = \sigma$, $b = \frac{1}{2}\sigma^2$.

   (c) $Z_t = X_t^2$, als $X_t = W_t^2 - t$.

3. Zij $W$ een standaard Brownse beweging en $(\mathcal{F}_t)$ de filtratie gegenereerd door $W$. Beschouw een simpel proces $g \in \mathcal{L}^2$. Laat zien dat

   $$\mathbb{E}[\int_s^t g_u \, dW_u | \mathcal{F}_s] = 0.$$

4. Beschouw een Brownse beweging op het interval $[0, t]$ en een partitie $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_n^n = t$ van dat interval. Definieer voor $0 \le \alpha \le 1$ de stochastische variabele

   $$S_n(\alpha) = \sum_{i=1}^n W_{(1-\alpha)t_{i-1}^n + \alpha t_i^n}(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n}).$$

   Laat zien dat voor partitities waarvan de maaswijdte $\max\{t_i^n - t_{i-1}^n : 1 = 1, \ldots n\}$ naar 0 convergeert, geldt dat $S_n(\alpha)$ in $L^2$-zin convergeert naar $I(\alpha)$ met

   $$I(\alpha) = \frac{1}{2}W_t^2 + (\alpha - \frac{1}{2})t.$$

   (*Opmerking*: voor $\alpha = 0$ is $I(\alpha)$ de Itô integraal $\int_0^t W_s \, dW_s$ en voor $\alpha = \frac{1}{2}$ krijgen we de zogenaamde Stratonovich integraal, aangeduid met

$(S)\int_0^t W_s\, dW_s$.)

Definieer verder

$$S_n'(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha W_{t_i^n} + (1-\alpha) W_{t_{i-1}^n})(W_{t_i^n} - W_{t_{i-1}^n}).$$

Laat zien dat ook $S_n(\alpha)'$ in $L^2$-zin naar $I(\alpha)$ convergeert.

# Week 9

1. Bekijk de Black-Scholes markt met daarin de claim $\int_0^T S_u\,du$. Laat zien dat de rationele prijs voor deze claim op tijdstip $t$ gegeven wordt door $V_t$ met $V_t = e^{r(t-T)}Z_t + S_t\frac{1-e^{r(t-T)}}{r}$, waarbij $Z_t = \int_0^t S_u\,du$ en $r \neq 0$ de rentevoet. Wat wordt $V_t$ als $r = 0$?
   Schrijf $V_t = F(t, S_t, Z_t)$ en stel een partiële differentiaalvergelijking voor $F$ op. Bepaal ook de hedge strategie voor deze claim.

2. Beschouw in het Black-Scholes kader een Europese call optie en een Europese put optie. Duid met $C_t$ de rationele prijs op tijdstip $t \leq T$ van de eerste aan en met $P_t$ de prijs van de tweede. Leid de put-call pariteit af: $C_t - P_t = S_t - e^{r(t-T)}K$.

3. Beschouw het Black-Scholes model. Als een portefeuille $(x, y)$ met waardeproces $V$ voldoet aan

$$dV_t = x_t dB_t + y_t dS_t,$$

   dan voldoet de verdisconteerde waarde $\bar{V}$ aan

$$d\bar{V}_t = y_t d\bar{S}_t,$$

   waar $\bar{S}$ het verdisconteerde prijsproces van het aandeel is. Laat dit ziet m.b.v. (een van) de Itô-formule(s).

4. Beschouw het Black-Scholes model.

   (a) Veronderstel dat het prijsproces $S$ onder een kansmaat $\mathbb{P}$ voldoet aan $S_t = s_0 \exp(\sigma W_t - \mu t)$ (met $W$ een Brownse beweging onder $\mathbb{P}$). Zij $\mathbb{Q}$ de equivalente martingaalmaat. Laat zien dat onder $\mathbb{Q}$ het proces $S$ te schrijven is als $S_t = s_0 \exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t^{\mathbb{Q}})$ met $W^{\mathbb{Q}}$ een Brownse beweging onder $\mathbb{Q}$. Laat ook zien dat de stochastische differentiaal van $S$ te schrijven is als

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

   (b) Zij $(V_t)$ het waardeproces van een enkelvoudige claim. Laat zien dat er een proces $g$ bestaat zodanig dat $V$ voldoet aan

$$dV_t = rV_t dt + g_t dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

5. Beschouw in het Black-Scholes raamwerk de claim $\Phi(S_T) = K1_{(a,b)}(S_T)$ (deze heet een binaire optie). Bepaal de eerlijke prijs van deze claim op elk tijdstip $t \leq T$.