Inleiding Optietheorie
Mastercourse
Financiële Wiskunde
7 april 2000

Peter Spreij
Universiteit van Amsterdam
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam
spreij@science.uva.nl

April 2000

Eenvoudige discrete markt

Twee produkten worden op een markt verhandeld, een aandeel (stock) en een obligatie (bond). De obligatieprijs verloopt langs een vast (deterministisch) patroon, terwijl de prijs van het aandeel ‘onvoorspelbaar’ kan fluctueren.
We bekijken een twee-perioden model, dus een model met alleen een begintijd ($t = 0$) en een eindtijd ($t = 1$).

Notatie:
B_t is de prijs van de obligatie op tijdstip t en S_t is de prijs van het aandeel op tijdstip t.

Dynamisch model:

Obligatie:

$B_1 = (1 + r)B_0$ en $B_0 = 1$. Het getal r heet de rentevoet.

Aandeel:

$S_0 = s$ (vast) en voor S_1 zijn er twee mogelijkheden; $S_1 = su$ en $S_1 = sd$.
Anders gezegd:

$$S_1 = S_0 Z_1,$$

waarbij Z_1 de waarden u (up) en d (down) kan aannemen.

Een portefeuille is een pair (x, y) met x het aantal obligaties en y het aantal aandelen. De waarde van de portefeuille op tijdstip $t = 0, 1$ geven we aan met $V_t = xB_t + yS_t$.

Definitie. *Een portefeuille heet een arbitrage mogelijkheid als geldt dat $V_1 > V_0$ (met kans 1).*

We werken ook met verdisconteerde prijzen en waarden, deze worden altijd met een streep boven de variabelen aangegeven. Voorbeelden: $\bar{S}_t = S_t/B_t$ en $\bar{V}_t = V_t/B_t$.
In een *genormaliseerde* markt worden per definitie alle geldbedragen verdisconteerd. Indien er geen rente is, is de markt genormaliseerd.

We zullen aannemen dat de markt vrij van arbitrage is. Wiskundig gezien vertaalt zich dat in

Propositie. *De twee toestanden markt zonder rente is arbitragevrij als en alleen als $d \leq 1 \leq u$.*

Bewijs. Merk op dat $V_1 - V_0 = ys(Z_1 - 1)$.
Stel er is arbitrage mogelijk. Als $y > 0$, dan moet wel $d > 1$. Evenzo levert $y < 0$ en de mogelijkheid van arbitrage $u < 1$.
Omgekeerd, stel dat $d > 1$. Kies $x = -s$ en $y = 1$. Dan is $V_1 - V_0 = V_1 = s(Z_1 - 1) > 0$, ongeacht wat Z_1 is. De portefeuille $(-s, 1)$ is dus een arbitrage mogelijkheid als $d > 1$. Eenzelfde redenering is mogelijk als $u < 1$.

Propositie. *Veronderstel $r = 0$ en $d \leq 1 \leq u$ en $d < u$. Zij $q_u = \frac{1-d}{u-d}$ en $q_d = \frac{u-1}{u-d}$.
Dan $q_u, q_d \in [0, 1]$ en $q_u + q_d = 1$. Definieer nu een kansverdeling $\mathbb{Q}$ voor Z_1 door $\mathbb{Q}(Z_1 = u) = q_u$. Er geldt $E_{\mathbb{Q}} S_1 = S_0 = s$.*

$\mathbb{Q}$ wordt wel de equivalente martingaalmaat of risico-neutrale kansmaat genoemd. Merk op dat voor elke portefeuille nu geldt dat $E_{\mathbb{Q}} V_1 = V_0$, mits $r = 0$.

Definitie. *(i) Een claim is een functie van S_1 (of, equivalent, een functie van Z_1).
(ii) Een portefeuille (x, y) heet replicerend voor een claim $X = F(S_1)$ als $V_1 = F(S_1)$.
(iii) De markt is volledig als er voor elke claim een replicerende portefeuille te vinden is.*

Propositie. *Als $u > d$, dan is de twee toestanden markt volledig.*

Bewijs. Voor het gemak veronderstellen we weer $r = 0$. Zij $f_u = F(su)$ en $f_d = F(sd)$. Het stelsel

$$\begin{cases} x + ysu &= f_u \\ x + ysd &= f_d \end{cases}$$

heeft de unieke oplossing

$$\begin{aligned} x^F &= \frac{uf_d - df_u}{u - d} \\ y^F &= \frac{f_u - f_d}{s(u - d)}. \end{aligned}$$

Gevolg. *Veronderstel $r = 0$ en $d < 1 < u$. De eerlijke (rationele) prijs van een claim $F(S_1)$ wordt gegeven door V_0^F, de waarde van de replicerende portefeuille (x^F, y^F) op tijdstip 0. Deze prijs hangt niet af van het werkelijke onderliggende kansmechanisme.
Wel geldt dat de rationele prijs een verwachting is: $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} F(S_1)$.*

Meer perioden, binomiale boom

Het voortgaande wordt uitgebreid door op nieuwe tijdstippen $t = 1$ het aandeel te laten springen naar weer twee toestanden, met opnieuw de relatieve veranderingen u en d. De obligatie neemt steeds met de rentevoet r toe. Preciezer hebben we het volgende model:

De begintoestanden zijn $S_0 = s$ en $B_0 = 1$. Verder hebben we een rij $Z_1, Z_2, \ldots$ van onafhankelijke variabelen, gelijk verdeeld, die alle de waarden u en d aannemen, met

$$0 < \mathbb{P}(Z_t = u) < 1.$$

De dynamica wordt beschreven door

$$\begin{aligned} B_{t+1} &= (1 + r)B_t & (1) \\ S_{t+1} &= S_t Z_{t+1}. & (2) \end{aligned}$$

Een portefeuille wordt nu een rij stochastische vectoren (x_t, y_t), zodat elke x_t en elke y_t een functie is van $S_0, \dots, S_{t-1}$.
Het waardeproces wordt weer aangegeven met V en $V_t = x_t B_t + y_t S_t$. Verder geven we aangroeiingen aan met Δ, bijvoorbeeld $\Delta V_t = V_t - V_{t-1}$.

Definitie. *Een portefeuille heet* zelf-financierend *als voor alle t*

$$x_t B_t + y_t S_t = x_{t+1} B_t + y_{t+1} S_t.$$

Propositie. *Een portefeuille is zelf-financierend als voor alle t geldt dat*

$$\Delta V_t = x_t \Delta B_t + y_t \Delta S_t.$$

Definitie. *Een zelf-financierende portefeuille heet een arbitrage portefeuille over $[0, T]$ als geldt dat $V_T - V_0 \geq 0$ met kans 1 en $\mathbb{P}(V_T - V_0 > 0) > 0$.*

Een (simpele) claim X (op het eindtijdstip T) is een functie van S_T.

Definitie. *Een claim X heet bereikbaar als er een zelf-financierende portefeuille bestaat met de eigenschap dat $V_T = X$ (met kans 1).*
Als elke claim bereikbaar is, is de markt volledig.

Principe. *De eerlijke prijs van een claim die bereikbaar is met een zelf-financierende portefeuille (x_t, y_t) wordt op tijdstip t gegeven door de corresponderende waarde V_t.*

Propositie. *Het meer-perioden model beschrijft een volledige markt.*

Voor het bewijs hiervan verwijzen we naar de opgaven.

Stelling. *Beschouw een claim $X = F(S_T)$. Als op tijdstip t de aandeelprijs S_t is, wordt de eerlijke prijs van de claim gegeven door $\Pi(t, S_t)$, waarbij voor elke waarde s van S_t de functie $\Pi(t, s)$ gelijk is aan de verwachte waarde van $F(S_T)$ onder $\mathbb{Q}$ uitgaande van $S(t) = s$ gedeeld door $(1 + r)^{T-t}$.*
In formule:

$$\Pi(t, s) = \frac{1}{(1 + r)^{T-t}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X | S_t = s].$$

Bovendien geldt voor de replicerende porteuille

$$x_t = \bar{V}_t - y_t \bar{S}_t.$$

Deze stelling wordt in de opgaven geïllustreerd.

Propositie. *Als $d < 1 + r < u$ is de markt arbitragevrij.*

Asymptotiek van het meer-perioden model

We kiezen als tijdshorizon nu het reële interval $[0, T]$ en verdelen dit in stukjes ter lengte $\Delta = \Delta_N = \frac{T}{N}$. Op de tijdstippen $k\Delta$ bouwen we de binomiale boom als in het voorgaande met dit verschil dat we de rentevoet en de relatieve veranderingen van de aandelenkoers ook van N gaan laten afhangen. We specificeren dit als volgt. De rentevoet wordt nu $r\Delta$ i.p.v. r en verder

$$\begin{aligned} u_N &= 1 + \sigma\sqrt{\Delta_N} + a\Delta_N \\ d_N &= 1 - \sigma\sqrt{\Delta_N} - b\Delta_N. \end{aligned}$$

De prijzen laten we nu constant op de intervallen $[k\Delta, (k+1)\Delta)$, dus voor $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta)$. Voor de waarde van een obligatie krijgen we dan $B_t = B_{[kT/N]} = (1 + r\Delta)^k \approx e^t$. Voor de prijs van het aandeel ligt het wat ingewikkelder.

Schrijf nu q_N voor de risco neutrale kans op een opwaartse sprong. Enig rekenewerk leert

$$q_N \approx \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta_N}),$$

met $\mu = \frac{1}{2}(a-b) - r$. We zouden ook andere kansen kunnen gebruiken, wel van het zelfde type. Dus bijvoorbeeld $p_N = \frac{1}{2}(1 + \frac{\gamma}{\sigma}\sqrt{\Delta_N})$ voor de kans op een opwaartse sprong, al hebben we hier voor het waarderen van opties niet zoveel aan.

Herinner dat $S_N = sZ_1 \cdots Z_N$, en dus dat

$$Y_N := \log \frac{S_N}{s} = \sum_1^N X_k,$$

met $X_k = \log Z_k$. Deze neemt de twee waarden $\log u_N$ en $\log d_N$ aan, bij benadering $\sigma\sqrt{\Delta_N} + (a - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta_N$ en $-\sigma\sqrt{\Delta_N} - (b + \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta_N$.

Eenvoudig vallen verwachting en variantie van Y_N voor de verschillende kansmechanismen te berekenen:

Bij gebruik van p_N geldt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} Y_N &\approx (\gamma + \frac{1}{2}(a-b) - \frac{1}{2}\sigma^2) N \Delta_N \\ \mathrm{Var}_{\mathbb{P}} Y_N &\approx \sigma^2 N \Delta_N \end{aligned}$$

terwijl bij gebruik van q_N geldt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} Y_N &\approx (r - \frac{1}{2}\sigma^2) N \Delta_N \\ \mathrm{Var}_{\mathbb{Q}} Y_N &\approx \sigma^2 N \Delta_N \end{aligned}$$

Schrijf nu $S(T)$ voor S_N en $Y(T)$ voor Y_N, dan zien we (wegens de centrale limietstelling) dat bij benadering geldt dat $\log \frac{S(T)}{s}$ een normale verdeling heeft met verwachtingen $E_{\mathbb{P}} Y(T) = (\gamma + \frac{1}{2}(a-b) - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ en $E_{\mathbb{Q}} Y(T) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T$, terwijl de varianties in beide gevallen gelijk zijn aan $\sigma^2 T$.

Zouden we in bovenstaande uiteenzetting s door $S(t)$ (met $S(t) = S_{[\frac{t}{\Delta}]}$) vervangen, dan moeten we in de formules voor verwachting en variantie T vervangen door $T - t$.

Het cumulatieve rendement proces R

Definieer

$$R_N = \sum_{k \le N} \frac{\Delta S_k}{S_{k-1}} = \sum_{k \le N} (Z_k - 1). \qquad (3)$$

Ook hiervoor kijken we naar wat er met de verdeling gebeurt voor grote waarden van N. We berekenen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} R_N &\approx (\gamma + \frac{1}{2}(a-b)) N \Delta_N \\ \mathrm{Var}_{\mathbb{P}} Y_N &\approx \sigma^2 N \Delta_N \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} Y_N &\approx r N \Delta_N \\ \mathrm{Var}_{\mathbb{Q}} Y_N &\approx \sigma^2 N \Delta_N. \end{aligned}$$

Hieruit volgt(!) dat met $R(T)$ i.p.v. R_N geldt (in de zin van een zekere limiet) dat

$$R(T) = \alpha T + \sigma W_T,$$

waarbij de waarde van α afhangt van de gekozen kansmaat ($\alpha = r$ als we werken met $\mathbb{Q}$) en waarbij W een hierbij behorende Brownse beweging voorstelt.

Het mooie van dit alles is dat alle principes die ten grondslag liggen aan het waarderen van opties en andere claims in de binomiale markt ook ‘in de limiet’ geldig zijn. In de limiet hebben we te maken met een continue markt, d.w.z. prijzen zijn willekeurig in $\mathbb{R}^+$, hoeveelheden willekeurig in $\mathbb{R}$ en de tijd verloopt continu.

In het bijzonder is (in dit geval) de continue markt ook weer volledig en arbitragevrij. Dit wil zeggen dat alle voorgaande (abstracte) formules nu nog steeds geldig zijn, of althans hun limiet versies.

Continue markt

De prijs $B(t)$ van de obligatie verloopt volgens

$$dB(t) = rB(t)dt. \qquad (4)$$

De prijs $S(t)$ van het aandeel wordt beschreven door de *stochastische differentiaalvergelijking*

$$dS(t) = b(t)S(t)dt + \sigma S(t)dW_t \qquad (5)$$

Hier is $b(t)$ de verwachte rendementsvoet en σ de volatiliteit.

W is een standaard Brownse beweging op een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ en de kansmaat $\mathbb{P}$ stelt hier de objectieve ('werkelijke') kansmaat voor.

Voor het waarderen van financiële derivaten hebben we alleen de risico-neutrale kansmaat $\mathbb{Q}$ nodig. Aangetoond kan worden dat deze ook in dit geval bestaat.

Onder de risico-neutrale kansmaat $\mathbb{Q}$ wordt de dynamica van S beschreven door

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW_t, \qquad (6)$$

waarbij W nu een Brownse beweging onder $\mathbb{Q}$ voorstelt. Hieruit volgt dat $\log \frac{S(T)}{S(t)}$ een normale verdeling heeft (onder $\mathbb{Q}$!) met verwachting $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)$ en variantie $\sigma^2(T-t)$. Het ruilen van $\mathbb{P}$ voor $\mathbb{Q}$ heeft dus geresulteerd in het vervangen van $b(t)$ door r!

I.p.v. een willekeurig derivaat beschouwen we nu een *Europese call optie* die afloopt op tijdstip T met *uitoefenprijs* K. De waarde van de optie op tijdstip T is dan $f_T = (S(T) - K)^+$. (Meer in het algemeen zouden kunnen kijken naar een min of meer willekeurige functie van $S(T)$).

Black-Scholes PDV en formule

Propositie. *De eerlijke rationele prijs f_t van de optie op tijdstip $t \leq T$ is $f_t = v(t, S(t))$, $t \leq T$, waar v voldoet aan de PDV*

$$v_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) + rxv_x(t,x) - rv(t,x) = 0$$

met eindwaarde $v(T,x) = (x-K)^+$.

Merk op dat het verwachte rendement niet in deze formule voorkomt.

De oplossing van dit eindwaarde probleem is weer te geven met behulp van de expliciete formule

$$\begin{aligned} f_t \;=\; & S(t)\Phi\Big(\frac{\log\frac{S(t)}{K} + (T-t)(r+\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) + \\ & -e^{-r(T-t)}K\Phi\Big(\frac{\log\frac{S(t)}{K} + (T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big). \end{aligned}$$

Ook is het nu mogelijk de replicerende portefeuille aan te geven. Van het aandeel moet gekocht worden

$$x_t = \bar{f}_t - y_t\bar{S}(t)$$

en van de obligatie

$$y_t = v_x(t, S(t)),$$

waarbij een streepje weer de genormeerde waarde weergeeft, bijvoorbeeld is $\bar{f}(t) = f_t e^{-rt}$ en $f_t = v(t, S(t))$ als hierboven en v de functie is die de PDV oplost.