Extra opgaven
Voorbereiding Kansrekening

Week 3

1. De voor de hand liggende tegenhanger van het Lemma van Fatou is de volgende uitspraak:

   Zij $X_1, X_2, \ldots$ een rij niet-negatieve stochasten. Dan geldt

   $$E \limsup_{n\to\infty} X_n \geq \limsup_{n\to\infty} EX_n. \tag{1}$$

   Een paar vragen rijzen:
   Is $\limsup_{n\to\infty} X_n$ een stochast?
   Als dit zo is, geldt de ongelijkheid (1)?

   Laat aan de hand van tegenvoorbeelden zien, dat beide vragen in het algemeen ontkennend beantwoord moet worden. Verzin een conditie waaronder beide vragen bevestigend beantwoord kunnen worden en waaronder bovendien (1) waar is.

2. Tevens hebben we gezien dat de Monotone Convergentiestelling voor dalende rijen i.h.a. niet opgaat. Verzin ook een conditie waaronder dit wel het geval is.

Week 4

1. Zij (x_n) een rij getallen in $\mathbb{R}$. Laat zien dat $\liminf(-x^n) = -\limsup x_n$.

2. Zij X een stochast waarvan de verwachting bestaat. Laat zien dat $|\mathbb{E}X| \leq \mathbb{E}|X|$.

3. Bewijs dat karakteristieke functies *uniform* continu zijn.

4. Laat zien dat de integraal op pagina 22 voor simpele functies s niet van de gekozen representatie van s afhangt.

Week 5

1. Zij $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continu. Definieer de functies f_n $(n \in \mathbb{N})$ door $f_n(t) = \sum_{k=1}^{2^n} f(t_{k-1}^n) 1_{(t_{k-1}^n, t_k^n]}(t)$ met $t_k^n = k2^{-n}$. Laat zien dat de rij f_n uniform naar f convergeert.

2. Beschouw de dichtheden f_n op $\mathbb{R}$ gedefinieerd door

   $$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\sqrt{n}\lambda^n (x\sqrt{n} + \frac{n}{\lambda})^{n-1} 1_{[-\frac{\sqrt{n}}{\lambda}, \infty)}(x),$$

voor $n \in \mathbb{N}$ en $\lambda > 0$. Laat zien dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $f_n(x) \to f(x)$ met $f(x) = \frac{\lambda}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}\lambda^2 x^2)$. (Hint: bewijs eerst dat $((1+\frac{a}{\sqrt{n}})e^{-\frac{a}{\sqrt{n}}})^n \to e^{-\frac{1}{2}a^2}$ en gebruik bovendien de formule van Stirling.)
Concludeer uit de stelling van Scheffé dat de Centrale limietstelling van toepassing is op een rij $(Y)_n$ van onderling onafhankelijke en identiek exponentieel met parameter λ verdeelde stochasten via $X_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - \frac{1}{\lambda})$.

Week 6

1. Zij X homogeen op $[0,1]$ verdeeld en Y Poisson verdeeld met parameter λ. Veronderstel dat X en Y onafhankelijk zijn. Bepaal de verdelingsfunctie van $X+Y$. Bepaal ook (zie de opgave op pagina 29) hoe in de daar gebruikte notatie π_{ac}, π_s eruit zien en tevens de functie f die voldoet aan $d\pi_{ac} = f d\lambda$.

Week 8

1. Bewijs de stelling van Fubini (versie pagina 37) ook voor niet noodzakelijk begrensde maar wel niet-negatieve f (meetbaar t.o.v. de product σ-algebra).

2. Maak het bewijs van het gevolg op pagina 37 af (pas dus de monotoneklassestelling toe).

3. Zij f een begrensde functie die meetbaar is t.o.v. de product σ-algebra, context als in de syllabus. Definieer g en h als in de syllabus. Laat zien dat uit de stelling van Fubini volgt dat

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\rho) = \int_X g\,d\mu = \int_Y h\,d\rho.$$