Voorbereiding Kansrekening

1. Kansruimte

1.1 Verzamelingenleer

Voor het begrip kansruimte moeten we iets van de verzamelingentheorie weten. De moderne wiskunde is gebaseerd op de verzamelingentheorie. Een aantal begrippen die daarin voorkomen zijn:

verzameling, element, deelverzameling, vereniging, doorsnede, complement, verschil.

We gebruiken de notatie:
$\omega \in \Omega$ betekent ω *is element van de verzameling* Ω;
$A \subset \Omega$ betekent A is een *deelverzameling van* Ω; we schrijven $A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$ voor de verzameling die bestaat uit alle elementen $\omega \in \Omega$ die niet in A liggen. De verzameling A^c is het *complement* van A.

Opgave Ga na dat A zelf weer het complement is van A^c.

$A \cap B$ is de *doorsnede* van A en B. Dit is de verzameling van alle elementen die zowel in A als B liggen. Analoog geldt

$$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$$

D is de verzameling van alle elementen die in elk van de verzamelingen A_n liggen. Dus $\omega \in D$ dan en alleen dan als $\omega \in A_1$ en $\omega \in A_2$ en $\omega \in A_3$ en etc.

$A \cup B$ is de *vereniging* van A en B. Dit is de verzameling van alle punten die in A liggen of in B. Op dezelfde wijze is de vereniging

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots$$

de verzameling van alle elementen ω die in tenminste één van de verzamelingen A_n liggen.

$A \setminus B = \{\omega \in A \mid \omega \notin B\}$ is het *verschil* van B in A. Dus $A \setminus B = A \cap (B^c)$.

Voorbeeld 0. De *lege verzameling* is de verzameling $\emptyset$. Deze verzameling bevat geen enkel element. Er is maar één lege verzameling. Twee verzamelingen A en B zijn *disjunct* als $A \cap B = \emptyset$.

Voorbeeld 1. Zij $A_n = (n, \infty)$ voor $n = 1, 2, \ldots$ Dan geldt

$$D = A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \emptyset \tag{1.1}$$

Bewijs We bewijzen (1.1) in twee stappen:
a) Het is duidelijk dat $\emptyset \subset D$ want $\emptyset$ is deelverzameling van elke verzameling.
b) Stel $x \in D$. Ga na dat $x > 1$. Zij $n = [x]$ het grootste gehele getal kleiner-gelijk x. Dus

$$[x] = \sup\{k \in \mathbf{Z} \mid k \leq x\}.$$

Er geldt $n \geq 1$ daar $x > 1$. Uit $x < n+1$ volgt dat x niet in A_{n+1} ligt. Dus x ligt niet in D. Tegenspraak. Dus er is geen element $x \in D$. ¶

Voorbeeld 2. Stel $\Omega = \mathbf{R}$. Het complement van het open interval $(0, 1)$ is de vereniging van twee gesloten halfrechten:

$$(0, 1)^c = (-\infty, 0] \cup [1, \infty).$$

Als voorbeeld van een verzameling nemen we gewoonlijk een deelverzameling van $\mathbf{R}$. De elementen van een verzameling hoeven echter geen getallen te zijn.

Voorbeeld 3. Zij $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Definieer nu W als de verzameling

$$W = \{A \mid A \subset \mathbf{N}\}.$$

Dit is de verzameling van alle deelverzamelingen van $\mathbf{N}$. Elementen van W zijn bijvoorbeeld $\{1, 3, 4\}$ of $\{2, 4, 6, \ldots\} = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Een voorbeeld van een deelverzameling van W is

$$\{\{1, 3, 4\}, \{2, 4, 6, \ldots\}\}$$

Dit is een deelverzameling van W die twee elementen van W bevat. Een ander voorbeeld is de verzameling W_0 van alle eindige deelverzamelingen van $\mathbf{N}$, of het complement, $W_0^c = W \setminus W_0$, de collectie van alle oneindige deelverzamelingen van $\mathbf{N}$.

Opgave 1. Bepaal de vereniging van de verzamelingen $A_n = (1/n, n)$, $n \geq 1$.

Opgave 2. Zij $A_n = [-1/n, n]$ als n even is en $A_n = [-n, 1/n]$ als n oneven is. Bepaal de doorsnee $A_1 \cap A_2 \cap \cdots$.

De eerste wet van De Morgan Zij gegeven een rij verzamelingen. Als een punt in geen van deze verzamelingen ligt, dan ligt het in het complement van elk van deze verzamelingen. Als een punt ligt in het complement van elk van de verzamelingen, dan ligt het niet in de vereniging van de verzamelingen. In formule:

$$(\bigcup A_n)^c = \bigcap (A_n^c).$$

Opgave Verwoord de tweede wet van De Morgan:

$$(\bigcap A_n)^c = \bigcup (A_n^c).$$

1.2 Uitkomstenruimte, uitkomst en gebeurtenis

We doen tien onafhankelijke worpen met een zuivere dobbelsteen. De *uitkomstenruimte* Ω is de verzameling van alle mogelijke uitkomsten. De mogelijke *uitkomsten* zijn hier de vectoren $(x_1, \ldots, x_{10})$ met $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De uitkomstenruimte bevat dus 6^{10} punten. Dat is een flink aantal

$$6^{10} \approx 6.10^7.$$

Gebeurtenissen zijn deelverzamelingen van Ω. Voorbeelden zijn
$\{X_1 = 3\}$,
$\{X_1 + \cdots + X_{10} = 30\}$,
$\{X_1 = 3, X_2 = 4\} = \{X_1 = 3\} \cap \{X_2 = 4\}$,
$\{X_2 = 8\} = \emptyset$.
Hierbij is X_k de uitkomst van de $k$de worp van de tien. Hoeveel gebeurtenissen zijn er? We hebben te maken met het aantal deelverzamelingen van een verzameling Ω met $M \approx 6.10^7$ punten. Een deelverzameling A is bepaald als we van elk van de punten ω weten of die in A ligt of niet. We maken deelverzamelingen van Ω door voor elk van de M punten ω te kiezen of dat punt erin ligt of niet. Dit levert 2^M mogelijkheden. Hier is $M = 6^{10}$. Het aantal gebeurtenissen bij tien worpen met een zuivere dobbelsteen is dus

$$2^{(6^{10})}.$$

Dat is een groot getal. Het heeft ongeveer 2.10^7 cijfers. Als we op een bladzij veertig regels hebben met per regel vijftig cijfers hebben we twintig boeken van elk vijfhonderd paginas nodig om dit getal op te schrijven.

Opgave 1. Bepaal de uitkomstenruimte Ω bij twee worpen met een munt. Bereken hoeveel gebeurtenissen er in deze uitkomstenruimte zijn. Maak een lijst van alle gebeurtenissen.

Zij weer Ω de uitkomstenruimte bij tien onafhankelijke worpen met een zuivere dobbelsteen. Dus Ω is de verzameling van alle vectoren

$$\omega = (x_1, \ldots, x_{10}) \qquad x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad i = 1, \ldots, 10.$$

In woorden: Ω is de verzameling van alle vectoren in $\mathbf{R}^{10}$ waarvan de componenten gehele getallen zijn met waarden in $\{1, \ldots, 6\}$.

Vraag: Welke gebeurtenissen kunnen uitgedrukt worden in termen van de eerste drie worpen, de stochasten X_1, X_2, X_3? Dit zijn de deelverzamelingen van Ω die gedefinieerd kunnen worden in termen van de eerste drie componenten van de vectoren. Bijvoorbeeld de verzameling $\{X_1 = X_2 + X_3\}$ of de verzameling $\{X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 6\}$. Hoeveel gebeurtenissen zijn er die uitgedrukt kunnen worden in termen van de drie stochasten X_1, X_2, X_3? De collectie van al deze gebeurtenissen geven we aan met

$$\sigma(X_1, X_2, X_3).$$

Er zijn $216 = 6 \times 6 \times 6$ gebeurtenissen van de vorm

$$\{X_1 = a, X_2 = b, X_3 = c\} \qquad a, b, c \in \{1, \ldots, 6\}.$$

Dit zijn de atomen. Deze gebeurtenissen kunnen niet opgesplitst worden in kleinere gebeurtenissen. Deze 216 gebeurtenissen zijn disjunct en elke gebeurtenis die is uit te drukken in de drie stochasten X_1, X_2, X_3 is vereniging van een stel van deze 216 atomen.

Opgave Laat zien dat de collectie $\sigma(X_1, X_2, X_3)$ precies 2^{216} gebeurtenissen bevat. Dit is (volgens Maple)

$$2^{216} = 105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536.$$

1.3 Rudimentaire kansruimten

Gebeurtenissen zijn deelverzamelingen van de uitkomstenruimte Ω. Men kan spreken van de kans op een gebeurtenis A. De kans pA op de gebeurtenis A is een getal in het interval $[0, 1]$. Het is intuïtief duidelijk dat de kansmaat p moet voldoen aan de volgende twee eisen:

p1) $p(\Omega) = 1$;
p2) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ als A en B disjuncte gebeurtenissen zijn.

Het ligt voor de hand te eisen dat de doorsnede en de vereniging van een eindig stel gebeurtenissen weer een gebeurtenis is. Als $A = \{X_1 = 3\}$ en $B = \{X_2 = 2\}$ en $C = \{X_3 = 5\}$ dan is

$$\{X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 5\} = A \cap B \cap C$$

de gebeurtenis dat de eerste worp een drie oplevert, de tweede een twee en de derde een vijf. Analoog is

$$E = \{X_4 = 1\} \cup \{X_5 = 6\}$$

de gebeurtenis dat de vierde worp een één oplevert of de vijfde een zes. Bij onafhankelijke worpen met een zuivere dobbelsteen geldt $p(E) = 11/36$. (Ga na.)

We leggen een en ander nu formeel vast met een aantal afspraken.

Definitie Zij $\mathcal{A}$ een collectie deelverzamelingen van de verzameling Ω. De collectie $\mathcal{A}$ is een *algebra* als geldt:
A1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
A2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
A3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Definitie Een *rudimentaire kansruimte* is een drietal $(\Omega, \mathcal{A}, p)$. Hierbij is Ω een verzameling, $\mathcal{A}$ is een collectie deelverzamelingen van Ω, en p is een functie, $p : \mathcal{A} \to [0, 1]$. De verzameling Ω heet *uitkomstenverzameling* of *universum*. De deelverzamelingen $A \subset \Omega$ in $\mathcal{A}$ heten *gebeurtenissen*. We eisen dat de collectie $\mathcal{A}$ een algebra is en de functie p een *eindig additieve kans* op de collectie $\mathcal{A}$ van gebeurtenissen: Voor p gelden de twee axiomas p1) en p2) hieronder:

p1) $p(\Omega) = 1$;
p2) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ als A en B disjuncte gebeurtenissen zijn.

We zullen straks een sterker axioma invoeren, maar gaan nu eerst eens onderzoeken wat we met deze eenvoudige axiomas kunnen doen.

Opgave 1. Als $A_1, \ldots, A_n$ gebeurtenissen zijn dan is ook $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ een gebeurtenis. (Gebruik volledige inductie.)

Opgave 2. Als A en B gebeurtenissen zijn dan is ook $A \cap B$ een gebeurtenis.

Opgave 3. Als A en B gebeurtenissen zijn dan is ook $A \setminus B$ een gebeurtenis.

Opgave 4. Als $A_1, \ldots, A_{10}$ gebeurtenissen zijn dan ook

$$E = A_1 \cap ((A_2 \setminus (A_3 \cap \cdots \cap A_7)) \cup (A_8 \setminus (A_1 \cap A_9)) \cup A_{10}^c).$$

Als we uitgaan van een eindig stel gebeurtenissen, dan levert iedere formule met deze gebeurtenissen en de tekens $\cap$, $\cup$, $\setminus$ en ^{c} weer een gebeurtenis op. Uitgaand van tien gebeurtenissen $A_1, \ldots, A_n$ kunnen we dus een heel stel nieuwe gebeurtenissen maken. Hoeveel? Denk bijvoorbeeld aan de situatie waarbij men tien onafhankelijke worpen doet met een zuivere munt, en laat A_i de gebeurtenis zijn dat de $i$de worp kruis oplevert.

Opgave 5. Zij $\mathcal{E}$ de kleinste algebra die de gebeurtenissen $A_1, \ldots, A_{10}$ bevat. Laat zien dat de algebra $\mathcal{E}$ niet meer dan 10^{400} gebeurtenissen bevat.

Als we de kans kennen op de gebeurtenissen $A_1, \ldots, A_{10}$ in opgave 4 hierboven dan levert dat ons nog niet de kans op de gebeurtenis E. Daarvoor moeten we E opdelen in disjuncte gebeurtenissen waarvan we de kansen kennen.

Opgave 6. Stel de uitkomstenverzameling Ω is eindig en elke eenpuntsverzameling $\{\omega\}$ is een gebeurtenis. Laat zien dat dan iedere deelverzameling van Ω een gebeurtenis is.

Opgave 7. Zij A een gebeurtenis. Bewijs dat $p(A^c) = 1 - pA$.

Opgave 8. Stel A, B en C zijn disjuncte gebeurtenissen. Bewijs dat $E = A \cup B \cup C$ een gebeurtenis is en dat $p(E) = p(A) + p(B) + p(C)$.
a) Laten $A_1, A_2, \ldots$ disjuncte gebeurtenissen zijn. Bewijs dat voor iedere $n \geq 2$ geldt

$$p(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = p(A_1) + \cdots + p(A_n).$$

b) Als de gebeurtenissen A_n niet disjunct zijn dan geldt:

$$p(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq p(A_1) + \cdots + p(A_n).$$

c) Als de gebeurtenissen disjunct zijn en $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ is een gebeurtenis, dan geldt

$$p(A_1) + p(A_2) + \cdots \leq p(A).$$

Opgave 9. Zij $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$ de verzameling der natuurlijke getallen. Zij $\mathcal{E}$ de collectie van alle deelverzamelingen $E \subset \Omega$ die eindig zijn of waarvan het complement eindig is. Merk op dat $\emptyset$ eindig is. Dus axioma A1 geldt.

1) Bewijs dat $\mathcal{E}$ een algebra is.
2) Bewijs dat de verzameling $\{2, 4, 6, \ldots\}$ niet in $\mathcal{E}$ ligt.

Zij X een stochast met een meetkundige verdeling met succeskans 1/2. Neem als uitkomstenruimte $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$ en als kans

$$p(n) = P\{X = n\} = 1/2^n \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Definieer nu $\mathcal{E}$ als in Opgave 9 als de collectie van alle deelverzamelingen van Ω die eindig zijn of die een eindig complement hebben. Noem deze verzamelingen gebeurtenissen. Voor gebeurtenissen kunnen we eenvoudig de kans berekenen. Dit levert een rudimentaire kansruimte $(\Omega, \mathcal{E}, p)$. Echter in deze kansruimte heeft de vraag: "Wat is de kans dat X even is?" geen zin. Immers de verzameling $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$ is geen gebeurtenis. (Zie Opgave 9.)

Om dit te verhelpen breiden we de algebra $\mathcal{E}$ uit tot de collectie $\mathcal{A}$ van alle deelverzamelingen van Ω. Er rijst nu een nieuw probleem. Wat is de kans dat X even is? Het ligt voor de hand te definiëren

$$p(E) = p(2) + p(4) + p(6) + \cdots$$

Dit levert op

$$p(E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{3}.$$

Merk echter op dat we hier buiten ons boekje zijn gegaan. Nergens wordt beweerd dat we een kans mogen berekenen door oneindig veel kansen op te tellen. Definieer nu voor $A \subset \Omega$

$$p(A) = \sum_{n \in A} p(n).$$

We hebben nu voor iedere deelverzameling $A \subset \Omega$ de kans op A, $p(A)$, gedefinieerd. Is $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ een rudimentaire kansruimte? Daarvoor moeten we laten zien dat de axiomas p1) en p2) gelden. Het is duidelijk dat $p(\Omega) = 1$. Immers $1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots = 1$. Voor het tweede axioma moeten we laten zien dat geldt $p(A) + p(B) = p(A \cup B)$ als A en B disjuncte deelverzamelingen zijn van Ω. Dit is niet moeilijk te bewijzen. Men kan zelfs meer doen. Als $A_1, A_2, \ldots$ disjuncte deelverzamelingen zijn van Ω dan geldt

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots$$

Bewijs Zij $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$. Dan geldt $p(A_1) + p(A_2) + \cdots \leq p(A)$ per definitie van de som van een reeks, zie Opgave 8c. Het is voldoende te bewijzen dat

$$p(E) \leq p(A_1) + p(A_2) + \cdots \qquad E \subset A,\ E \text{ eindig}.$$

Dit is duidelijk. ¶

De theorie van rudimentaire kansruimten is voor onze doeleinden te eenvoudig. We willen graag dat ook de vereniging van een hele rij gebeurtenissen weer een gebeurtenis is, en dat we voor de vereniging van een rij disjuncte gebeurtenissen de kans kunnen uitrekenen met de formule hierboven. We voeren daarom nu het begrip kansruimte in waarbij ook aftelbaar oneindige verenigingen en sommen worden toegelaten.

1.5 Kansruimte

Definitie Een *kansruimte* is een drietal $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Hierbij is Ω een verzameling, het *universum*, $\mathcal{A}$ is een collectie van deelverzamelingen van Ω, de collectie van de *gebeurtenissen*, en $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ is een *kansmaat* op $\mathcal{A}$. De volgende axiomas gelden:

G1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
G2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;
G3) Als $A_1, A_2, \dots$ in $\mathcal{A}$ dan ligt ook $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ in $\mathcal{A}$.
P1) $P\Omega = 1$;
P2) Als $A_1, A_2, \dots$ disjuncte gebeurtenissen zijn met vereniging A dan geldt

$$PA = PA_1 + PA_2 + \cdots$$

Een collectie $\mathcal{A}$ van deelverzamelingen van een verzameling Ω die voldoet aan de axiomas G1), G2) en G3) heet een *σ-algebra*. Het voorvoegsel σ duidt erop dat ook aftelbaar oneindige verenigingen zijn toegestaan. Gebeurtenissen heten ook wel *meetbare* deelverzamelingen van Ω. Immers dit zijn precies de verzamelingen waarvan men de kans kan meten.

Definitie Een *stochast* is een functie $X : \Omega \to \mathbf{R}$ met de eigenschap dat voor iedere $c \in \mathbf{R}$ de verzameling

$$\{X \le c\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le c\} \tag{1.5.1}$$

een gebeurtenis is.

1.6 Een voorbeeld

Neem als universum de reële rechte, $\Omega = \mathbf{R}$, en eis dat iedere halfrechte $(-\infty, c]$ een gebeurtenis is. Laat $\mathcal{B}$ de kleinste collectie deelverzamelingen zijn van $\mathbf{R}$ die aan de axiomas G1, G2, G3 voldoet en die de gesloten linker halfrechten $(-\infty, c]$ bevat. Laat X een standaard normaal verdeelde stochast zijn. Definieer nu

$$P(-\infty, c] = P\{X \le c\} = \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Algemener definiëren we de kans op de gebeurtenis $B \in \mathcal{B}$ met dezelfde integraal:

$$P(B) = P\{X \in B\} = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

waarbij de B onder aan de integraal betekent dat we alleen over de verzameling B integreren. Wat dat precies betekent zal later duidelijker worden. We hebben nu een kansruimte $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

Op het ogenblik gaat het erom te onderzoeken welke deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ gebeurtenissen zijn.

We noemen er een aantal op:

(c, ∞) is een gebeurtenis als complement van de gebeurtenis $(-\infty, c]$;
$(a, b]$ is gebeurtenis als doorsnede van $(-\infty, b]$ en (a, ∞);
$(-\infty, a)$ is gebeurtenis als vereniging van de rij gebeurtenissen $(-\infty, a - 1/n]$;
$[a, \infty)$ is gebeurtenis als complement van $(-\infty, a)$;
alle halfrechten zijn gebeurtenissen;
(a, b) is een gebeurtenis als doorsnede van de halfrechten $(-\infty, b)$ en (a, ∞);
iedere open deelverzameling $O \subset \mathbf{R}$ is een gebeurtenis (als vereniging van een rij open intervallen);
iedere gesloten deelverzameling van $\mathbf{R}$ is een gebeurtenis (want het complement van gesloten is open);
$[a, b]$ is een gebeurtenis als doorsnede van de halfrechten $(-\infty, b]$ en $[a, \infty)$;
$\{c\}$ is de gebeurtenis $[c, c]$;
$\{1, 2, 3, \dots\}$ is een gebeurtenis als vereniging van de éénpunts-gebeurtenissen $\{n\}$;

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ is een gebeurtenis als aftelbare vereniging van éénpunts-gebeurtenissen
$$\mathbf{Z} = \{0\} \cup \{1\} \cup \{-1\} \cup \{2\} \cup \{-2\} \cup \{3\} \cup \cdots,$$
men kan ook gewoon opmerken dat $\mathbf{Z}$ gesloten is;

$\mathbf{Q}$, de verzameling van alle rationale getallen (breuken), is een gebeurtenis als vereniging van de rij gebeurtenissen
$$A_n = \{\ldots, -2/n, -1/n, 0, 1/n, 2/n, 3/n, \ldots\}$$
Merk op dat iedere verzameling A_n gebeurtenis is als vereniging van een rij éénpunts-gebeurtenissen: $A_n = \{0\} \cup \{1/n\} \cup \{-1/n\} \cup \{2/n\} \cup \cdots$;

De verzameling $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ van de irrationale getallen is een gebeurtenis.

Definitie Als Ω een topologische ruimte is dan is de *Borel σ-algebra* op Ω de kleinste σ-algebra die de open verzamelingen van Ω bevat. De verzamelingen $B \in \mathcal{B}$ heten *Borelverzamelingen* van Ω.

Opgave 1. De σ-algebra $\mathcal{B}$ op $\mathbf{R}$ die hierboven is ingevoerd is de Borel σ-algebra. Bewijs dit.

Opgave 2. Als $\mathcal{A}_t$, $t \in T$, σ-algebras zijn op X, dan is ook de doorsnede van deze collecties een σ-algebra op X. Bewijs dat de collectie
$$\mathcal{A} = \bigcap t \in T \mathcal{A}_t$$
voldoet aan de drie axiomas G1) – G3).

Zij $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ een kansruimte en zij $X : \Omega \to \mathbf{R}$ een stochast. Dan is de verzameling $\{X \leq c\} \subset \Omega$ voor iedere $c \in \mathbf{R}$ een gebeurtenis, zie (1.5.1).

Voor een willekeurige deelverzameling $E \subset \mathbf{R}$ definiëren we
$$\{X \in E\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in E\}.$$
Dit is een deelverzameling van Ω. Voor welke $E \subset \mathbf{R}$ is $\{X \in E\}$ een gebeurtenis?

Dit is het geval als $E = (-\infty, c]$. Immers $\{X \in (-\infty, c]\} = \{X \leq c\}$ is voor iedere $c \in \mathbf{R}$ een gebeurtenis. (Zie de definitie van stochast.) Maar dan is ook het complement $\{X > c\}$ een gebeurtenis. Net als hierboven volgt dan dat $\{a < X \leq b\}$, $\{X < a\}$, $\{X \geq a\}$, $\{a < X < b\}$, $\{X \in O\}$ met $O \subset \mathbf{R}$ open, $\{X \in F\}$ met $F \subset \mathbf{R}$ gesloten, $\{a \leq X \leq b\}$, $\{X = c\}$, $\{X \in \mathbf{Z}\}$, $\{X \in \mathbf{Q}\}$, $\{X \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}\}$ allemaal gebeurtenissen zijn. Men kan dus spreken van de gebeurtenis dat een stochast X irrationaal is.

Voorbeeld Stel dat X standaardnormaal verdeeld is. Wat is de kans dat X irrationaal is? Merk eerst op dat voor ieder getal $c \in \mathbf{R}$ geldt $P\{X = c\} = 0$. Hieruit volgt dat $P\{X \in A\} = 0$ voor iedere aftelbare verzameling A. In het bijzonder is $P\{X \in \mathbf{Q}\} = 0$. Dus de kans dat X irrationaal is is 1. Een standaardnormaal verdeelde stochast is bijna zeker irrationaal.

Definitie Een gebeurtenis A is *bijna zeker* (afgekort als *b.z.*) als $PA = 1$.

1.7 Informatie

Wat is de betekenis van een σ-algebra?

Een computerscherm met honderd *pixels* is niet veel waard. Het *onderscheidend vermogen* van zo'n scherm is klein. Op het scherm kan je niet veel *informatie* kwijt. Je kan er 1 letter op maken, maar in de meeste printers is de *resolutie* beter dan wat je op dit scherm ziet.

Een grote σ-algebra heeft een groot onderscheidend vermogen.

Als een arts een diagnose stelt, doet hij dat op grond van informatie over de patiënt. Hoe meer informatie, hoe beter in het algemeen de diagnose. Absoluut zeker is de diagnose nooit, maar de kans dat hij correct is wordt groter naarmate het onderscheidend vermogen groter is.

Hetzelfde gebeurt als men voorspellingen wil maken over de koers van Unilever volgende week. In de moderne kansrekening wordt veel gewerkt met een hele collectie σ-algebras $\mathcal{A}_t$, $t \geq 0$, die groeien in de tijd doordat er steeds meer informatie beschikbaar komt.

2. Stochasten en verwachting

2.1 Stochasten

Een stochast X is een afbeelding van een kansruimte $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ naar $\mathbf{R}$ die *meetbar* is in de zin dat voor iedere $c \in \mathbf{R}$ de verzameling $\{X \leq c\}$ een gebeurtenis is. In dit hoofdstuk nemen we een vaste kansruimte $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Opgave 1. Als A een gebeurtenis is dan is 1_A een stochast.

Stelling 1. Als X een stochast is dan ook $-X$.

Bewijs Zij $c \in \mathbf{R}$. Dan geldt $\{-X \leq c\} = \{X \geq -c\}$, en dit is een gebeurtenis, zie paragraaf 1.6. ¶

Stelling 2. Stel X en Y zijn stochasten. Dan is $X \vee Y = \max(X, Y)$ een stochast.

Bewijs Zij $c \in \mathbf{R}$. Er geldt: $\{X \vee Y \leq c\} = \{X \leq c\} \cap \{Y \leq c\}$. Rechts staat de doorsnede van twee gebeurtenissen, en dat is een gebeurtenis. ¶

Stelling 3. Stel $X_1, X_2, \ldots$ zijn stochasten en

$$X(\omega) = \sup_{n=1}^{\infty} X_n(\omega)$$

is eindig voor iedere $\omega \in \Omega$. Dan is X een stochast.

Bewijs Zij $c \in \mathbf{R}$. Dan geldt

$$\{X > c\} = \{X_1 > c\} \cap \{X_2 > c\} \cap \{X_3 > c\} \cap \cdots$$

Rechts staat de vereniging van een rij gebeurtenissen. Dit is een gebeurtenis wegens axioma G3. Dan is ook het complement $\{X \leq c\}$ een gebeurtenis. ¶

Stelling 4. Stel $X_1, X_2, \ldots$ zijn stochasten en $X = \inf_n X_n$ is eindig. Dan is X een stochast.

Bewijs $X = -\sup_n(-X_n)$. ¶

Stelling 5. Stel $X_1, X_2, \ldots$ zijn stochasten en $X_n(\omega) \to X(\omega)$ voor elke ω. Dan is X een stochast.

Bewijs Definieer $S_m = \inf_{n \geq m} X_n$. Dan is S_m een stochast voor iedere m, en ook $S = \sup S_n$ is een stochast. Er geldt $S = \liminf_n X_n$. Omdat de rij $X_n(\omega)$ voor iedere ω convergeert naar $X(\omega)$ geldt $S = X$. Dus X is een stochast. ¶

Opgave Stel $x_n \to x \in \mathbf{R}$. Zij $s_m = \inf_{n \geq m} x_n$. Bewijs dat $x = \sup s_n$.

Stelling 6. Zij $\varphi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ continu en laten $X_1, \ldots, X_d$ stochasten zijn. Dan is $Y = \varphi(X_1, \ldots, X_d)$ een stochast.

Bewijs Zij $O = \{x \in \mathbf{R}^d \mid \varphi(x) > c\}$. Dan is $\{Y > c\} = (X_1, \ldots, X_d) \in O\}$. Het is voldoende te laten zien dat hier een gebeurtenis staat. De verzameling O is open omdat φ continu is. Dus O is de vereniging van een rij open blokken B_n van de gedaante

$$B = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d) \subset \mathbf{R}^d.$$

Voor zo'n blok B geldt

$$\{(X_1, \ldots, X_d) \in B\} = \{a_1 < X_1 < b_1\} \cap \cdots \cap \{a_d < X_d < b_d\}.$$

Hier staat rechts een gebeurtenis, en dus is ook

$$\{(X_1,\ldots,x_d)\in O\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(X_1,\ldots,X_d)\in B_n\}$$

een gebeurtenis. ¶

Gevolg Als X en Y stochasten zijn dan ook $X+Y$ en XY.

Bewijs De functies $\varphi(x,y)=x+y$ en $\varphi(x,y)=xy$ zijn continu op $\mathbf{R}^2$. ¶

Opgave 2 (Reeksen). Als $X_1, X_2, \ldots$ stochasten zijn en

$$S(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(\omega)$$

bestaat voor iedere ω dan is S een stochast.

Opgave 3 (Knippen en plakken). Laten $X_0, X_1, X_2, \ldots$ stochasten zijn, en $A_1, A_2, \ldots$ disjuncte gebeurtenissen. Definieer nu

$$A_0=(A_1\cup A_2\cup\cdots)^c.$$

Dan is Ω de vereniging van de disjuncte gebeurtenissen A_n. Definieer nu een functie $X:\Omega\to\mathbf{R}$ die op A_n gelijk is aan X_n, dus

$$\omega\in A_n \Rightarrow X(\omega)=X_n(\omega) \qquad n=0,1,2,\ldots$$

Dan is X een stochast.

Opgave 4. Op 31 december 1998 krijg je een aandeel Unilever. Laten $X_1, X_2, \ldots$ stochasten zijn, de koers van Unilever op de $n$de beursdag na 1 januari 1999. Laat $N\geq 1$ de dag zijn waarop je het aandeel verkoopt. (Bijvoorbeeld de eerste dag dat de koers boven f100 ligt, of als je meer dan f250 rood staat.) Dan is de functie

$$X(\omega)=X_{N(\omega)}(\omega) \qquad \omega\in\Omega$$

een stochast.

Opgave 5. Als X een stochast is en c een getal dan is cX een stochast.

2.2 Simpele stochasten

Een stochast X die slechts eindig veel waarden aanneemt, zeg de waarden $a_1,\ldots,a_m$ in $\mathbf{R}$, heeft de gedaante

$$X=a_1 1_{A_1}+\cdots+a_m 1_{A_m} \tag{2.1}$$

waarbij A_i de gebeurtenis is $A_i=\{X=a_i\}$. Zo'n stochast heet een *simpele stochast.*

Voorbeeld 1. Een voorbeeld van een simpele stochast is de Bernoulli stochast. Die neemt slechts de waarden 0 en 1 aan. Een Bernoulli stochast is de indicatorfunctie 1_A van een gebeurtenis. Zie Opgave 2.1.1.

Voor een stochast X definiëren we de *verwachting* EX als het entree-bedrag dat een gokspel met uitbetaling X eerlijk maakt. Dit is een redelijke omschrijving van onze intuïtie. Hier volgt uit dat de verwachting aan zekere eisen moet voldoen:

Als X en Y stochasten zijn en $c \in \mathbf{R}$ dan moet gelden:

$$\begin{aligned} E(X+Y) =& EX + EY \\ E(cX) =& cEX \\ X \leq Y \Rightarrow& EX \leq EY \\ X = 1_A \Rightarrow& EX = PA. \end{aligned}$$

De eerste twee eisen zeggen dat de verwachting lineair is, de derde zegt dat dat de verwachting monotoon is, en kan ook geformuleerd worden als

$$X \geq 0 \Rightarrow EX \geq 0.$$

De laatste eis legt een verband tussen verwachting en kans.

Stelling Voor een simpele stochast $X = c_1 1_{A_1} + \cdots + C_m 1_{A_m}$ met $A_1, \ldots, A_m$ disjunct geldt $EX = c_1 p_1 + \cdots + c_m p_m$ met $p_i = PA_i$.

Bewijs Lineariteit geeft $EX = c_1 E1_{A_1} + \cdots + c_m E1_{A_m}$. Gebruik nu de eigenschap $E1_A = PA$. ¶

In het bewijs hierboven zit nog een lacune. Stel de stochast X heeft twee verschillende schrijfwijzen

$$X = a_1 1_{A_1} + \cdots + a_m 1_{A_m} = b_1 1_{B_1} + \cdots + b_k 1_{B_k}.$$

Geeft de formule hierboven dan in beide gevallen hetzelfde antwoord? Om deze vraag te beantwoorden schrijven we

$$X = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} c_{ij} 1_{C_{ij}} \qquad C_{ij} = A_i \cap B_j.$$

Als $A_i \cap B_j$ niet leeg is geldt $c_{ij} = a_i = b_j = X(\omega)$ waarbij ω een willekeurig element is uit $A_i \cap B_j$. Door het samennemen van termen geldt

$$\sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1^k} c_{ij} P(A_i \cap B_j) \Big) = \sum_{i=1}^{m} a_i PA_i.$$

Op dezelfde wijze ziet men dat de som links gelijk is aan $\sum_j b_j PB_j$. ¶

We zullen nu laten zien hoe je stochasten met simpele stochasten kunt benaderen. We beperken ons tot niet-negatieve stochasten.

Zij X een begrensde niet-negatieve stochast. Definieer

$$X_0 = [X].$$

Dat betekent dat $X_0 = 0$ als $0 \leq X < 1$, $X_0 = 1$ als $1 \leq X < 2$, $X_0 = 2$ als $2 \leq X < 3$, etc. De stochast X_0 neemt slechts de waarden $0, 1, 2, \ldots$ aan. Omdat X begrensd is, is ook X_0 begrensd, (immers $0 \leq X_0 \leq X$). Dus X_0 is een simpele stochast:

$$X_0 = 1_{A_1} + 21_{A_2} + 31_{A_3} + \cdots + m1_{A_m}.$$

Hierbij is $A_k = \{k \leq X < k+1\}$ en m is zo groot dat $X(\omega) < m+1$ voor alle $\omega \in \Omega$.

Definieer nu $X_1 = [2X]/2$. Dit is weer een simpele stochast met treden ter hoogte $1/2$ en $X_1 = k/2$ als $k/2 \leq X < (k+1)/2$.

Definieer algemeen $X_n = [2^n X]/2^n$. Voor vaste ω is $X_n(\omega)$ het grootste veelvoud van $1/2^n$ dat kleiner-gelijk is aan getal $X(\omega)$.

Het is duidelijk dat

$$(*) \qquad X_n(\omega) \le X(\omega) < X_n(\omega) + 1/2^n$$

en dat

$$X_0(\omega) \le X_1(\omega) \le \cdots \le X(\omega).$$

Voor iedere n is X_n een simpele stochast (die slechts eindig veel waarden aanneemt: $k/2^n$ met $0 \le k/2^n < m+1$).

Uit (*) volgt

$$EX_n \le EX \le EX_n + 1/2^n.$$

Met behulp van deze benadering van X met simpele stochasten zijn we in staat de verwachting van X willekeurig goed te benaderen.

Opgave Maak een duidelijke schets van de stochast X en de benaderingen X_0, X_1 en X_2.

Ook onbegrensde stochasten kunnen we met simpele functies benaderen. Als $X \ge 0$ onbegrensd is dan heeft de stochast $[X]$ oneindig veel treden en is dus geen simpele stochast. We kappen de stochast $[2^n X]/2^n$ af op hoogte n en krijgen zo de stochast

$$X_n = n \wedge [2^n X]/2^n.$$

Deze heeft $n2^n$ treden.

De operatie $Y \wedge m$ met

$$(Y \wedge m)(\omega) = \min(Y(\omega), m) \qquad \omega \in \Omega$$

maakt van een niet-negatieve stochast Y een begrensde stochast. Immers $Y \wedge m \le m$. Dit is een trucje dat vaak gebruikt wordt om van een stochast een begrensde stochast te maken.

Opgave Zij X een stochast, en zij $t > 0$. Definieer nu

$$X_t(\omega) = \begin{cases} t & \text{als } X(\omega) > t \\ X(\omega) & \text{als } |X(\omega)| \le t \\ -t & \text{als } X(\omega) < -t. \end{cases}$$

Bewijs dat X_t een stochast is en dat X_t begrensd is.

2.3 De verwachting

De volgende definitie is de basis van de integratietheorie.

Definitie Voor een niet-negatieve stochast X definiëren we de *verwachting* EX door

$$EX = \sup\{EY \mid 0 \le Y \le X,\ Y \text{ simpel.}\}$$

De verwachting kan oneindig zijn! De verwachting *bestaat* als hij eindig is.

Stelling Laten X en Y niet-negatieve stochasten zijn. Dan geldt:

$$\begin{gathered} E(X+Y) = EX + EY \\ E(cX) = cEX \qquad c > 0 \\ X \le Y \Rightarrow EX \le EY. \end{gathered}$$

Bewijs De somformule zullen we later bewijzen. De andere twee formules volgen uit de definitie. Denk hierover na. ¶

Opmerking Deze formules gelden ook als de verwachting oneindig is.

Een reële stochast X is te schrijven als het verschil van twee niet-negatieve stochasten:

$$X = X_+ - X_- \qquad X_+ = X \vee 0 = \max(X, 0),\ \ X_- = (-X) \vee 0 \geq 0.$$

Opgave a) Bewijs dat $|X| = X_+ + X_-$.
b) Als $E|X|$ eindig is dan zijn EX_+ en EX_- beide eindig.

Definitie De *verwachting* van een reële stochast X is alleen gedefinieerd als $E|X|$ eindig is. In dat geval zeggen we dat de verwachting *bestaat*. De verwachting is

$$(*) \qquad EX = EX_+ - EX_-.$$

Stelling Laten X en Y stochasten zijn waarvan de verwachting bestaat. Dan geldt

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= EX + EY \\ E(cX) &= cEX \qquad c \in \mathbf{R} \\ X \leq Y &\Rightarrow EX \leq EY. \end{aligned}$$

In het bijzonder bestaat de verwachting van de som $X + Y$ en van cX voor elk getal $c \in \mathbf{R}$.

Bewijs We bewijzen de somregel. De andere twee regels volgen uit een plaatje.
Merk eerst op dat het positieve deel van $X + Y$ niet gelijk hoeft te zijn aan de som $X_+ + Y_+$. (Neem maar $Y = -X$.) Wel geldt

$$\begin{aligned} X_+ + Y_+ &= (X+Y)_+ + U \\ X_- + Y_- &= (X+Y)_- + V \end{aligned}$$

met $U \geq 0$ en $V \geq 0$. Als we de tweede gelijkheid van de eerste aftrekken vinden we:

$$X + Y = (X+Y) + U - V.$$

Hieruit blijkt dat $V = U$. Schrijf nu de verwachtingen op van de twee gelijkheden hierboven. Uit de somregel voor niet-negatieve stochasten volgt:

$$\begin{aligned} EX_+ + EY_+ &= E(X+Y)_+ + EU \\ EX_- + EY_- &= E(X+Y)_- + EU. \end{aligned}$$

Aftrekken levert wegens de definitie (*)

$$EX + EY = E(X+Y) + 0.$$

Hiermee is de somregel bewezen. ¶

Opmerking We weten dat de Riemann-integraal $\int_a^b f(x)dx$ bestaat als f een continue functie is op het interval $[a, b]$, en ook als f begrensd is en maar eindig veel discontinuiteiten heeft. Er zijn echter begrensde functies waarvan de Riemann-integraal niet bestaat, bijvoorbeeld de functie $f = 1_A$ waarbij A de verzameling is van de rationale getallen in het interval $[0, 1]$. Dit probleem bestaat bij de verwachting niet.

De verwachting van een begrensde stochast bestaat altijd!

Voor onbegrensde stochasten is de situatie ook duidelijk: Als de stochast X niet-negatief is dan is EX altijd gedefinieerd, maar kan oneindig zijn. Voor reële stochasten X kunnen we alleen spreken over de verwachting als de verwachting van het positieve deel en het negatieve deel beide eindig zijn.

Blijft het probleem om de verwachting te bepalen. Voor simpele stochasten is dat geen probleem, voor discrete stochasten (met oneindig veel waarden) moeten we de reeks $\sum x_n p_n$ sommeren waarbij $x_1, x_2, \ldots$ de mogelijke waarden zijn van X en $p_n = P\{X = x_n\}$. Voor continu verdeelde stochasten kunnen we de verwachting berekenen met behulp van de dichtheid $EX = \int x f(x) dx$. Het bepalen van zo'n integraal of het sommeren van een reeks kan lastig zijn, maar dat is een technisch probleem. Tegenwoordig bestaan er allerlei programmas (zoals Maple en Mathematica) die je in staat stellen veel integralen en reeksen uit te rekenen.

2.4 Voorbeelden

Voorbeeld 1. Neem $\Omega = (0,1]$ en laat $\mathcal{A}$ de algebra zijn die bestaat uit eindige verenigingen van disjuncte spelden. Hierbij is een speld een interval van de vorm $(a,b]$ met $0 \le a < b \le 1$.

De collectie $\mathcal{A}$ is een algebra: Merk op dat Ω een speld is, dat het complement van een eindige vereniging van disjuncte spelden weer een eindige vereniging is van disjuncte spelden, en dat een eindige vereniging van spelden altijd te schrijven is als eindige vereniging van disjuncte spelden. Hieruit volgt dat $\mathcal{A}$ gesloten is voor eindige verenigingen.

Neem als rudimentaire kansmaat de lengtemaat: $p(a,b] = b - a$.

Ga na dat $((0,1], \mathcal{A}, p)$ een rudimentaire kansruimte is.

We willen eigenlijk een echte kansruimte hebben. De kleinste σ-algebra die de spelden bevat is de Borel σ-algebra $\mathcal{B}$. Kunnen we onze eindig additieve kansmaat p uitbreiden tot een echte kansmaat P op $\mathcal{B}$?

Stelling Er bestaat een unieke kansmaat P op de Borel σ-algebra $\mathcal{B}$ op $(0,1]$ zo dat $P(a,b] = b - a$ voor elke speld $(a,b]$.

Bewijs Zie het college Maattheorie. ¶

Er geldt $P\{b\} = 0$ voor elke eenpuntsgebeurtenis $\{b\} \in \mathcal{B}$. Immers $P\{b\} \le P(b-1/n, b] = p(b-1/n, b] = 1/n$ voor elke n. Er geldt $P(a,b) = b - a$ voor $0 \le a < b \le 1$. Immers $(a,b) \cup \{b\} = (a,b]$. Je kan ook redeneren $(a, b - 1/n] \subset (a,b) \subset (a,b] \Rightarrow b - a - 1/n \le P(a,b) \le b - a$. Er geldt $P(\mathbf{Q} \cap (0,1]) = 0$. Immers:

$$\mathbf{Q} \cap (0,1] = \{1\} \cup \{1/2\} \cup \{1/3\} \cup \{2/3\} \cup \{1/4\} \cup \{3/4\} \cup \{1/5\} \cup \{2/5\} \cup \cdots$$

De verzameling $\mathbf{Q} \cap (0,1]$ is een aftelbare vereniging van nulverzamelingen, dus zelf ook een verzameling met kansmaat nul.

Definitie Een gebeurtenis E is een *nulverzameling* als $PE = 0$.

Opgave Definieer $U : \Omega \to \mathbf{R}$ op de kansruimte uit de Stelling hierboven door $U(\omega) = \omega$. Bewijs dat U een stochast is . Laat zien dat U homogeen-$(0,1)$ verdeeld is.

3. Limietstellingen

We hebben gezien dat de limiet X van een rij stochasten X_n weer een stochast is, tenminste als de rij $X_n(\omega)$ voor iedere ω convergeert. Een belangrijke vraag is:

Geldt voor een convergente rij stochasten ook $EX_n \to EX$?

Dat hoeft niet!

3.1 De monotone convergentiestelling

In deze paragraaf werken we met niet-negatieve stochasten. De verwachting is dan gedefinieerd maar kan oneindig zijn. We laten dat toe.

Stelling (De monotone convergentiestelling). Laat gegeven zijn de niet-negatieve stochasten

$$0 \le X_1 \le X_2 \le \cdots$$

Veronderstel dat voor iedere ω de rij $X_n(\omega)$ een eindige limiet heeft, $X(\omega)$. Dan is X een stochast en

$$EX_n \to EX \qquad n \to \infty.$$

Bewijs Er geldt $X = \sup X_n$. Uit stelling 2.1.3 volgt dat X een stochast is.

Uit $0 \le X_1 \le X_2 \le X_3 \le \cdots$ volgt dat $0 \le EX_1 \le EX_2 \le EX_3 \le \cdots$. De rij (EX_n) heeft dus een limiet, die eventueel oneidig is. Er geldt $\lim EX_n \le EX$ daar $EX_n \le EX$ voor elke n. (Ga na.)

We moeten dus nog bewijzen dat $\lim EX_n \ge EX$. Hiervoor is het voldoende te laten zien dat voor iedere simpele stochast Z met $0 \le Z \le X$ en elke $\alpha \in (0,1)$ geldt $\lim_n EX_n > \alpha EZ$.

We behandelen nu eerst een belangrijk speciaal geval:

Stelling Laat $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ een stijgende rij gebeurtenissen zijn met vereniging

$$(*) \qquad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Dan geldt $PA_n \uparrow PA$.

Bewijs Zie Opgave. ¶

Opmerking Dit is een speciaal geval van de monotone convergentiestelling, het geval dat de stochasten X_n Bernoulli-stochasten zijn. Met behulp van dit speciale geval kunnen we de monotone convergentiestelling bewijzen.

Neem aan dat $X > \alpha 1_A$ en $X_n \uparrow X$. Zij $A_n = \{X_n > \alpha\} \cap A$. Uit de monotonie $X_1 \le X_2 \le \cdots$ volgt $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$. Dus de rij gebeurtenissen (A_n) is stijgend. Voor iedere $\omega \in A$ geldt $X(\omega) > \alpha$ en $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$. Hieruit volgt dat $X_n(\omega) > \alpha$ op den duur. Dus $\omega \in A_n$ op den duur, d.w.z. $A = \bigcup A_n$. Er geldt

$$EX_n \ge \alpha PA_n \uparrow \alpha PA \Rightarrow \lim EX_n \ge \alpha PA.$$

We hebben nu het geval bewezen waar $Z = 1_A$. In het geval dat Z een willekeurige simpele stochast is, wordt het bewijs ingewikkelder, maar het idee is hetzelfde. ¶

Stelling Laat $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ een dalende rij gebeurtenissen zijn met doorsnede

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Dan geldt $PE_n \downarrow PE$.

Bewijs Zij $A_n = E_n^c$ en $A = E^c$. Dan geldt $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ en $A = \bigcup A_n$. Uit de vorige stelling volgt $PA_n \uparrow PA$. Dus

$$PE_n = 1 - PA_n \downarrow 1 - PA = PE.$$

De monotone convergentiestelling geldt niet voor dalende rijen.

Voorbeeld Zij $X \geq 0$ met verwachting $EX = \infty$ en zij $A_n = \{X > n\}$. Definieer nu

$$X_n = X1_{A_n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Dan geldt $\bigcap A_n = \emptyset$ daar voor iedere ω de waarde $X(\omega)$ eindig is, en dus geldt voor deze ω dat $X(\omega) \leq n$ op den duur. Hieruit volgt $X_n(\omega) \downarrow 0$ voor elke $\omega \in \Omega$. Merk op dat

$$EX = EX_n + EX1_{\{X \leq n\}}$$

en dus $EX_n = \infty$ daar $EX1_{\{X \leq n\}} \leq n$ eindig is.

We zien dus dat $EX_n = \infty$ voor elke n terwijl $X_n(\omega) \downarrow 0$ voor elke $\omega \in \Omega$.

Propositie (Som). Voor niet-negatieve stochasten X en Y geldt

$$(*) \qquad EX + EY = E(X + Y).$$

Bewijs Kies niet-negatieve simpele stochasten $X_n \uparrow X$ en $Y_n \uparrow Y$. Dan geldt $X_n + Y_n \uparrow X + Y$. We weten

$$EX_n + EY_n = E(X_n + Y_n) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Uit de monotone convergentie stelling volgt nu (*). ¶

Stelling (Reeksen 1). Laten $Y_1, Y_2, \ldots$ niet-negatieve stochasten zijn. Veronderstel dat $\sum Y_n(\omega)$ eindig is voor iedere $\omega \in \Omega$. Dan is $S = \sum Y_n$ een stochast en $ES = \sum EY_n$.

Bewijs Zij $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Dit is een stijgende rij niet-negatieve stochasten met limiet S. Pas nu de monotone convergentiestelling toe. ¶

3.2 Het lemma van Fatou

De mooiste stellingen zijn stellingen waarin de voorwaarden minimaal zijn, en waar het resultaat toch verrassend is.

Stelling (Lemma van Fatou). Laten X_n niet-negatieve stochasten zijn. Dan geldt

$$(*) \qquad E \liminf_{n\to\infty} X_n \leq \liminf_{n\to\infty} EX_n.$$

Opmerking We zullen eerst proberen uit te leggen wat de stelling zegt.

Voor iedere rij getallen x_n is $x_* = \liminf x_n$ gedefinieerd, maar kan oneindig zijn. De definitie is

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\geq 1}(\inf_{k\geq n} x_k).$$

Uit de definitie volgt dat de liminf van een rij stochasten weer een stochast is, mits de liminf in elk punt ω eindig is. Immers $\liminf X_n = \sup Y_n$ met $Y_n = \inf_{k\geq n} X_k$. Uit Stelling 2.1.3 en 2.1.4 volgt dat Y_n een stochast is voor elke n en dan ook $X_* = \sup Y_n$.

Veronderstel dat $x_* = \liminf x_n$ eindig is. Dan geldt:

1) Voor elk getal $c < x_*$ liggen maar eindig veel termen x_n onder c. (Immers anders zou $y_n = \inf_{k\geq n} x_k$ steeds kleiner dan c zijn, en dus ook $x_* \leq c$.)

2) Voor elk getal $c > x_*$ liggen er oneindig veel termen x_n onder c. (Immers anders zou $y_n = \inf_{k\geq n} x_k$ op den duur groter-gelijk zijn aan c, en dan ook $x_* = \sup y_n$.)

3) Elk interval (a,b) dat het punt $x_* = \liminf x_n$ bevat, bevat oneindig veel termen uit de rij (x_n). Dit volgt uit de zin hierboven.

Voorbeeld 1. Laat A_n een dalende rij gebeurtenissen zijn met lege doorsnede. Veronderstel dat $PA_n = 1/n > 0$ voor elke n. Zij

$$X_n = n1_{A_n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Ga na dat voor iedere $\omega \in \Omega$ geldt dat $X_n(\omega) = 0$ op den duur daar $\bigcap A_n = 0$. Tevens geldt $EX_n = nPA_n = 1$ voor iedere n. ¶

Het lemma van Fatou wordt vaak toegepast als de rij stochasten X_n convergeert naar een stochast X in de zin dat $X_n(\omega) \to X(\omega)$ voor iedere $\omega \in \Omega$. In dat geval geldt $\liminf X_n = \lim X_n$ en zegt het lemma van Fatou:

$$EX \leq \liminf_{n\to\infty} EX_n.$$

Hierboven hebben we gezien dat het mogelijk is dat een rij stochasten met verwachting 1 convergeert naar de stochast $X \equiv 0$. In dat geval wordt de ongelijkheid in het lemma van Fatou:

$$E0 \leq \liminf_{n\to\infty} 1.$$

Voorbeeld 2. Laten A en B twee gebeurtenissen zijn. Zij $X_n = 1_A$ als n oneven is en $X_n = 1_B$ als n even is. Dan geldt $\liminf X_n = 1_{A\cap B}$. Er geldt $EX_n = PA$ als n oneven is en $EX_n = PB$ als n even is. Dus $\liminf EX_n$ is het minimum van PA en PB. Het Lemma van Fatou zegt nu

$$P(A\cap B) \leq \min(PA, PB).$$

Bewijs (van het Lemma van Fatou) Zij $Y_n = \inf_{k\geq n} X_k$. Dit is voor iedere n een stochast en $0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \cdots$ daar we het infimum nemen over steeds minder stochasten. Per definitie van "liminf" geldt

$$\liminf_{n\to\inf} X_n = \sup_{n\geq 1}(\inf_{k\geq n} X_k) = \sup_{n\geq 1} Y_n.$$

Er geldt $EY_n \leq \inf_{k\geq n} EX_k$ daar $EY_n \leq EX_k$ voor elke $k \geq n$. Uit de monotone convergentiestelling volgt nu

$$E\liminf_{n\to\infty} X_n = \sup_{n\geq 1} EY_n \leq \sup_{n\geq 1}(\inf_{k\geq n} EX_k) = \liminf_{n\to\infty} EX_n.$$

3.3 Bijna zeker

Een gebeurtenis A is bijna zeker als $PA = 1$.

Opgave Laat zien dat de doosnee van twee bijna zekere gebeurtenissen weer bijna zeker is. Als elk van de gebeurtenissen A_n bijna zeker is dan geldt dit ook voor de gebeurtenis

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Kansrekenaars zijn over het algemeen niet geïnteresseerd in gebeurtenissen die bijna zeker niet optreden, zoals een rij drieën bij onafhankelijke worpen met een zuivere dobbelsteen, of een rij uitkomsten waarin geen enkele drie optreedt.

Stelling Als twee niet-negatieve stochasten X en Y bijna zeker gelijk zijn dan hebben ze dezelfde verwachting.

Bewijs Zij $A = \{X \neq Y\}$. Er geldt $EX1_A = 0$ daar $EZ = 0$ voor iedere simpele stochast Z met $0 \leq Z \leq X1_A$. Immers

$$EZ = z_1 P\{Z = z_1\} + \cdots + z_m P\{Z = z_m\}.$$

(Als $z_i = 0$ dan is $z_i P\{Z = z_i\} = 0$ en als $z_i > 0$ dan is $\{Z = z_i\} \subset A$, en dus $P\{Z = z_i\} = 0$. Dus rechts staat een som van nullen. Dus $EZ = 0$.) Dit geldt voor elke simpele stochast Z met $0 \leq Z \leq X1_A$. Dus $EX1_A = 0$. Dus $EX = EX1_{A^c}$. Zo geldt ook $EY = EY1_{A^c}$. Uit $X \equiv Y$ op A^c volgt $EX1_{A^c} = EY1_{A^c}$. Dus $EX = EY$. ¶

Stelling Als X en Y bijna zeker gelijk zijn en als EX bestaat, dan bestaat EY en $EY = EX$.

Bewijs Ga na dat de positieve delen X_+ en Y_+ bijna zeker gelijk zijn, en ook de negatieve delen, en dat dus $EX_+ = EY_+$ en $EX_- = EY_-$. Aftrekken geeft $EX = EY$. ¶

Definitie Een rij stochasten X_n *convergeert bijna zeker (b.z.)* naar de stochast X als er een gebeurtenis E is met $PE = 1$ zo dat $X_n(\omega) \to X(\omega)$ voor elke $\omega \in E$.

Voorbeeld Laten A_n gebeurtenissen zijn met $PA_n = p_n$. Zij $Z_n = 1_{A_n}$. Als $\sum p_n$ eindig is dan is $\sum Z_n$ bijna zeker eindig.

Bewijs De gebeurtenis $B = \{\sum Z_n = \infty\}$ is bevat in $E_n = \{\sum Z_n \geq n\}$ en E_n is bevat in de vereniging $U_n = A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \cdots$. Nu geldt

$$PU_n \leq PA_n + PA_{n+1} + \cdots = p_n + p_{n+1} + \cdots = r_n$$

Dus $PB \leq r_n$. Uit convergentie van de reeks $\sum p_n$ volgt dat $r_n \to 0$ en dus $PB = 0$.

De reeks $\sum Z_n$ convergeert bijna zeker. Definieer nu $S = \sum Z_n 1_B^c$. Dan geldt $S = \sum Z_n$ b.z. en $ES = \sum EZ_n$. ¶

Stelling Als $X \geq 0$ en $EX = 0$ dan is $X = 0$ b.z.

Bewijs Ga na dat $P\{X > 1/n\} = 0$ daar anders $EX > 0$. Dit geldt voor iedere n. Dus de gebeurtenis $\{X > 0\}$ is de vereniging van een rij nulgebeurtenissen:

$$\{X > 0\} = \bigcup \{X > 1/n\} \Rightarrow P\{X > 0\} \leq \sum P\{X > 1/n\} = \sum 0 = 0.$$

3.4 De stelling van Lebesgue

De stelling van Lebesgue geeft een eenvoudige voorwaarde waarmee men in veel gevallen kan beslissen of verwachting en limiet verwisseld mogen worden.

Stelling (Lebesge, gemajoreerde convergentie). Laten $X_0, X_1, \ldots$ stochasten zijn en stel dat $X_n \to X_0$ b.z. Veronderstel dat er een niet-negatieve stochast Z bestaat , de majorant, met eindige verwachting zo dat

$$|X_n| \leq Z \text{ b.z.} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Dan geldt

$$EX_n \to EX_0 \tag{1}$$

en zelfs

$$E|X_n - X_0| \to 0. \tag{2}$$

Bewijs We nemen eerst aan dat $X_n(\omega) \to X_0(\omega)$ voor elke ω en ook dat $|X_n(\omega)| \leq Z(\omega)$ voor $n \geq 1$ geldt voor elke $\omega \in \Omega$. Dan geldt de ongelijkheid ook voor de limiet: $|X_0(\omega)| \leq Z(\omega)$. Dus $|X_n - X_0| \leq 2Z$, en $E|X_n - X_0| \leq 2EZ$ is eindig. We moeten laten zien dat $E|X_n - X_0| \to 0$. We passen het lemma van Fatou toe op de niet-negatieve stochasten

$$Y_n = 2Z_n - |X_n - X_0| \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Merk op dat $Y_n \to 2Z$ daar $X_n - X_0 \to 0$ gegeven is. Het lemma van Fatou zegt

$$E \liminf_{n\to\infty} Y_n \leq \liminf_{n\to\infty} EY_n.$$

Links staat $E2Z$ daar $Y_n \to 2Z$. Rechts staat

$$\liminf_{n\to\infty}(E2Z - E|X_n - X_0|) = E2Z - \limsup_{n\to\infty} E|X_n - X_0|.$$

(Ga na dat $\liminf(-a_n) = -\limsup a_n$.) Fatou zegt dus:

$$E2Z \leq E2Z - \limsup_{n\to\infty} E|X_n - X_0|.$$

Hier staat

$$\limsup_{n\to\infty} E|X_n - X_0| \leq 0.$$

Omdat $E|X_n - X_0|$ niet-negatieve getallen zijn kan de limsup alleen nul zijn als de rij naar nul convergeert, d.w.z.

$$\lim_{n\to\infty} E|X_n - X_0| = 0.$$

Hiermee is (2) bewezen voor het geval dat de convergentie en de ongelijkheden puntsgewijs gelden.

In het algemene geval bestaat er een bijna zeker gebeurtenis A_0 zo dat $X_n(\omega) \to X_0(\omega)$ voor alle $\omega \in A_0$ en er bestaat voor iedere $n \geq 1$ een bijna zeker gebeurtenis A_n zo dat $|X_n(\omega)| \leq Z(\omega)$ voor $\omega \in A_n$. Dan is $A = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots$ een bijna zeker gebeurtenis. Definieer nu

$$X'_n = X_n 1_A \qquad n \geq 0.$$

Dan geldt $X'_n(\omega) \to X'_0(\omega)$ voor iedere $\omega \in \Omega$ en $|X'_n(\omega)| \leq Z(\omega)$ voor $n = 1, 2, \ldots$ en iedere ω. Dus uit het verhaal hierboven volgt dat $E|X'_n - X'_0| \to 0$. Echter de stochasten $|X_n - X_0|$ en $|X'_n - X'_0|$ zijn bijna zeker gelijk, en hebben dan ook dezelfde verwachting. Gevolg:

$$E|X_n - X_0| \to 0.$$

Hiermee is (2) in het algemene geval bewezen.

Met behulp van de driehoeksongelijkheid

$$|EX - EY| \leq E|X - Y|$$

volgt nu (1). ¶

3.5 Voorbeelden

De *karakteristieke functie* van een stochast Y is de functie

$$\varphi(t) = Ee^{itY} = E\cos(tY) + iE\sin(tY) \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Hier gebruiken we de bekende formule

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \theta \in \mathbf{R}.$$

Stelling De karakteristieke functie is continu.

Bewijs Zij $t_0 \in \mathbf{R}$ en laat $t_n \to t_0$. We moeten bewijzen dat $\varphi(t_n) \to \varphi(t_0)$. Hiervoor is het voldoende te bewijzen

$$E\cos t_nY \to E\cos t_0Y \qquad E\sin t_nY \to E\sin t_0Y.$$

We passen de stelling van Lebesgue toe met $X_n = \cos t_nY$ en met majorant $Z \equiv 1$. Dan zijn alle voorwaarden vervuld. Immers voor iedere $\omega \in \Omega$ geldt

$$t_n \to t_0 \Rightarrow t_nY(\omega) \to t_0Y(\omega) \Rightarrow \cos t_nY(\omega) \to \cos t_0Y(\omega)$$

wegens continuïteit van de cosinus. Uit de stelling van Lebesgue volgt nu

$$E\cos t_nY \to E\cos t_0Y.$$

Op dezelfde wijze geldt

$$E\sin t_nY \to E\sin t_0Y.$$

Hiermee is de continuïteit bewezen. ¶

Opgave Laten X_n stochasten zijn met waarden in het interval $[a, b]$. Dus $a \le X_n(\omega) \le b$ voor alle ω en alle $n \ge 1$. Veronderstel dat $X_n \to X$ b.z. . Bewijs dat $EX_n \to EX$.

Stelling Stel $0 \le Y_1 \le Y_2 \le \cdots$ is een stijgende rij niet-negatieve stochasten. Stel $EY_n = \mu_n \to \mu < \infty$. Dan convergeert de rij Y_n bijna zeker naar een stochast Y met verwachting $EY = \mu$.

Bewijs Zij $m \ge 1$ vast, en zij A_m de gebeurtenis

$$A_m = \{\sup_{n\ge1} Y_n > m\}.$$

Dit is de vereniging van de stijgende rij gebeurtenissen $\{Y_1 > m\}, \{Y_2 > m\}, \ldots$. De ongelijkheid van Markov (zie Opgave) geeft

$$P\{Y_n > m\} \le \frac{\mu_n}{m} \le \frac{\mu}{m}.$$

Uit deze ongelijkheden volgt $PA_m \le \mu/m$. De rij $Y_n(\omega)$ convergeert voor alle ω buiten de gebeurtenis A_m, want daar is hij begrensd.

De gebeurtenis dat de rij Y_n niet convergeert is te schrijven als

$$A = \{\sup_{n\ge1} Y_n = \infty\}.$$

De gebeurtenis A is bevat in A_m. Dus $PA \le \mu/m$. Dit geldt voor iedere m. Dus $PA = 0$, ofwel de rij (Y_n) convergeert bijna zeker naar de stochast

$$Y = (\sup Y_n)1_{A^c}.$$

Uit de monotone convergentie stelling volgt $EY_n = EY_n1_{A^c} \to EY$. ¶

Stelling (Reeksen 1). Laten $X_1, X_2, \dots$ niet-negatieve stochasten zijn met eindige verwachting $\mu_n = EX_n$. Als $\sum \mu_n < \infty$ dan convergeert de reeks $\sum X_n$ bijna zeker naar een stochast S met verwachting $ES = \sum \mu_n$.

Bewijs Zij $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Zij $\sigma = \sum \mu_n$. Dan geldt $ES_n = \sigma_n \leq \sigma$. Uit de vorige stelling volgt dat S_n bijna zeker convergeert naar een stochast S. Uit de monotone convergentiestelling volgt dat

$$\mu_1 + \cdots + \mu_n = ES_n \to ES.$$

Stelling (Reeksen 2). Zij X_n een stochast voor $n = 1, 2, \dots$ Stel dat $\sum E|X_n| < \infty$. Dan bestaat er een stochast T zo dat $\sum X_n = T$ b.z. en $ET = \sum EX_n$. Verder geldt

$$(*) \qquad E|X_1 + \cdots + X_n - T| \to 0.$$

Bewijs Uit de vorige stelling is er een stochast S met eindige verwachting $\sum E|X_n|$ zo dat $\sum |X_n| = S$ b.z. . Zij A een bijna zeker gebeurtenis zo dat $\sum |X_n(\omega)| = S(\omega)$ voor $\omega \in A$. Voor iedere ω waarvoor de reeks $\sum |X_n(\omega)|$ convergeert convergeert de reeks $\sum X_n(\omega)$. Zij $T = \sum X_n 1_A$. Zij ook $T_n = X_1 + \cdots + X_n$. Dan geldt $T_n(\omega) \to T(\omega)$ voor $\omega \in A$. Dus $\sum X_n = T$ b.z. .

We passen nu de stelling van Lebesgue toe op de rij T_n met majorant S en vinden (*) en

$$EX_1 + \cdots + EX_n = ET_n \to ET \qquad n \to \infty.$$

4. Integratietheorie

Met stochasten kan je de oppervlakte bepalen van een ingewikkelde deelverzameling van het eenheidsvierkant.

Laten U en V onafhankelijke homogeen-$(0,1)$ verdeelde stochasten zijn gedefinieerd op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Definieer nu voor een Borelverzameling $B \subset [0,1] \times [0,1]$

$$\lambda B = P\{(U,V) \in B\}.$$

Voor rechthoeken $B = (u_1, u_2] \times (v_1, v_2]$ met $0 \le u_1 < u_2 \le 1$ en $0 \le v_1 < v_2 \le 1$ geldt

$$\begin{aligned} \lambda B &= P\{u_1 < U \le u_2, v_1 < V \le v_2\} \\ &= P\{u_1 < U \le u_2\} P\{v_1 < V \le v_2\} = (u_2 - u_1)(v_2 - v_1). \end{aligned}$$

Dus voor een rechthoek B is λB de gebruikelijke oppervlaktemaat: Het product van de lengten van de zijden. (Hier gebruiken we de onafhankelijkheid.)

We zullen later (Stelling 6.3.1) zien dat λ een maat is, en (Voorbeeld 7.1.2) dat deze maat vastligt door zijn waarden op de rechthoeken.

Kunnen we nu de kansrekening gebruiken om de oppervlakte te meten van een Borelverzameling in het vierkant?

Dat kan, en wordt ook veel gedaan. Als we de oppervlaktemaat p willen weten van de verzameling punten $(x,y) \in (0,1)^2$ waarvoor geldt

$$\sin(\pi/xy) > x^2 - y^2$$

dan genereren we op de computer een groot aantal homogeen-$(0,1)$ verdeelde stochasten U_i en V_i, $i = 1, \ldots, n$, en tellen de punten (U_i, V_i) waarvoor de ongelijkheid geldt. Noem dit aantal N. Onder de aanname dat de punten (U_i, V_i) onafhankelijke gelijkverdeelde trekkingen zijn uit de homogene verdeling op het vierkant volgt dat N binomiaal verdeeld is met verwachting $EN = pn$ en variantie $\mathrm{var}(N) = np(1-p)$. De normale benadering geeft $P\{|N/n - p| > 2\sigma\} < 1/20$ voor grote n, met $\sigma^2 = p(1-p)/n \le 1/4n$. De kans op een fout $|N/n - p| > 1/1000$ is kleiner dan $1/20$ voor $n = 250\ 0000$.

4.1 Oppervlaktemaat op het vlak

We veranderen nu ons gezichtspunt en gaan over op een globalere aanpak. Laat $\mathcal{B}$ de Borel σ-algebra zijn op het vlak $\mathbf{R}^2$. Deze σ-algebra wordt voortgebracht door gesloten kwadranten van de vorm

$$(-\infty, a] \times (-\infty, b] \qquad a, b \in \mathbf{R}.$$

Opgave 1. Laat zien dat $\mathcal{B}$ de rechthoeken bevat van de vorm

$$(a_1, a_2] \times (b_1, b_2] \qquad a_1 < a_2,\ b_1 < b_2.$$

De Borel σ-algebra bevat alle open rechthoeken. Immers

$$(a_0, a) \times (b_0, b) = \bigcup (a_0, a_n] \times (b_0, b_n] \qquad a_n = a - \frac{1}{n},\ b_n = b - \frac{1}{n}, n \ge 1.$$

Hieruit volgt weer dat $\mathcal{B}$ alle open verzamelingen van het vlak bevat. Immers iedere open verzameling is te schrijven als aftelbare vereniging van open rechthoekjes.

De verzamelingen $B \in \mathcal{B}$ heten *Borelverzamelingen*.

We hebben hierboven gezien dat iedere open verzameling een Borelverzameling is. Het complement van een open verzameling is een gesloten verzameling. Dus iedere gesloten verzameling is een Borelverzameling.

Een rechte in het vlak is gesloten, en zo ook ieder punt en iedere cirkel. Iedere aftelbare vereniging van rechten, punten en cirkels is een Borelverzameling in $\mathbf{R}^2$, en het complement ook.

Niet iedere deelverzameling van het vlak is een Borelverzameling, maar wel alle deelverzamelingen die men kan maken uit de open en gesloten verzamelingen door complementen te nemen, verschillen, en aftelbare verenigingen en doorsneden.

Definitie Een *maat* op een σ-algebra $\mathcal{E}$ op een verzameling W is een functie $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ met de eigenschappen:

M1) $\mu(\emptyset) = 0$;
M2) Voor disjuncte $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{E}$ geldt

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n.$$

Stelling Er bestaat precies één maat λ op de Borel σ-algebra $\mathcal{B}$ op $\mathbf{R}^2$ zo dat

$$\lambda((a_1, a_2] \times (b_1, b_2]) = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \qquad a_1 < a_2,\ b_1 < b_2.$$

Deze maat heet de *Lebesguemaat* op $\mathbf{R}^2$.

Bewijs Zie een boek over de maattheorie, bijvoorbeeld Billingsley of Cohn voor een bewijs van de existentie. De uniciteit wordt in Stelling 7.1.2 bewezen. ¶

Definitie Een functie $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ is een *Borelfunctie* als voor iedere $c \in \mathbf{R}$ geldt:

$$\{f \leq c\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) \leq c\} \in \mathcal{B}. \tag{1}$$

Net als stochasten vormen Borelfuncties een lineaire ruimte, is de puntsgewijze limiet van een rij Borelfuncties weer een Borelfunctie, en als $f_1, \ldots, f_d$ Borelfuncties zijn, en $\varphi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ is continu, dan is ook $f = \varphi(f_1, \ldots, f_d)$ een Borelfunctie. Verder kan men Borelfuncties maken met knippen en plakken.

Stelling Iedere continue functie $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ is een Borelfunctie.

Bewijs We moeten (1) controleren. Zij $c \in \mathbf{R}$. Dan is $\{f > c\}$ een open deelverzameling van $\mathbf{R}^2$. (Immers als $f(x_0, y_0) > c$ dan is $f > c$ op een omgeving van dit punt (x_0, y_0) wegens continuïteit van f in (x_0, y_0).) Dus $\{f > c\}$ is een Borelverzameling. Dan ook het complement $\{f \leq c\}$. ¶

We gaan nu de integraal invoeren. Dit doen we eerst voor simpele functies. Om problemen met oneindig te voorkomen beperken we ons tot niet-negatieve simpele functies

$$s = c_1 1_{B_1} + \cdots + c_m 1_{B_m}$$

met $m \geq 1$ en $c_i > 0$ voor $i = 1, \ldots, m$. Voor de simpele functie s hierboven definiëren we de integraal

$$\int s d\lambda = c_1 \lambda B_1 + \cdots + c_m \lambda B_m.$$

Merk op dat de integraal oneindig is als een van de Borelverzamelingen B_i oneindige maat heeft. De integraal hangt alleen af van de functie s en niet van de representatie.

Voor niet-negatieve simpele functies s en t gelden de drie regels

$$(*)\qquad \begin{aligned} \int (s+t)d\lambda &= \int s d\lambda + \int t d\lambda \\ \int c s d\lambda &= c \int s d\lambda \qquad c > 0 \\ s \le t \Rightarrow \int s d\lambda &\le \int t d\lambda. \end{aligned}$$

We breiden de integraal nu uit tot willekeurige niet-negatieve Borelfuncties $f : \mathbf{R}^2 \to [0, \infty]$ met de definitie

$$\int f d\lambda = \sup\{\int s d\lambda \mid 0 \le s \le f, s \text{ simpel}\}.$$

Het is gebruikelijk bij niet-negatieve functies de waarde ∞ toe te laten. Een functie $f : \mathbf{R}^2 \to [0, \infty]$ is Borelmeetbaar als (1) geldt voor elke $c \in \mathbf{R}$.

Opgave Laat $f_n : \mathbf{R}^2 \to [0, \infty]$ een Borelfunctie zijn voor $n = 1, 2, \ldots$ Laat zien dat de volgende functies dan Borelmeetbaar zijn:

$$\sup_{n\ge1} f_n,\ \inf_{n\ge1} f_n,\ \limsup_{n\to\infty} f_n,\ \liminf_{n\to\infty} f_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Voor Borelfuncties met waarden in $[0, \infty]$ gelden de volgende resultaten (met hetzelfde bewijs als bij stochasten):

Stelling (Monotone Convergentiestelling). Laten $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots$ Borelfuncties zijn met waarden in $[0, \infty]$. Dan is $f := \lim f_n$ een Borelfunctie en

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda.$$

Lemma (van Fatou). Laten $f_1, f_2, \ldots$ Borelfuncties zijn met waarden in $[0, \infty]$. Dan geldt

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\lambda \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\lambda.$$

De integraal voor Borelfuncties in $[0, \infty]$ voldoet net als de verwachting van niet-negatieve stochasten aan de drie regels (*)

$$(**)\qquad \begin{aligned} \int (f+g)d\lambda &= \int f d\lambda + \int f d\lambda \\ \int c f d\lambda &= c \int f d\lambda \qquad c > 0 \\ f \le g \Rightarrow \int f d\lambda &\le \int g d\lambda. \end{aligned}$$

Definitie Een Borelfunctie $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ heet *integreerbaar* als

$$\int |f| d\lambda < \infty.$$

Voor integreerbare functies kan de integraal gedefinieerd worden:

$$\int f d\lambda = \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda.$$

Hierbij is f^+ het positieve deel van f en f^- het negatieve deel, dus $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ en $f^-(x) = \max(0, -f(x))$. We zeggen dat de integraal van f *bestaat* als f integreerbaar is.

Voor integreerbare functies gelden de drie regels (*) in de volgende vorm: Als f en g integreerbaar zijn en $c \in \mathbf{R}$ dan geldt

$$(***) \qquad \begin{aligned} \int (f+g) d\lambda &= \int f d\lambda + \int g d\lambda \\ \int c f d\lambda &= c \int f d\lambda \\ f \leq g \Rightarrow \int f d\lambda &\leq \int g d\lambda. \end{aligned}$$

Een *nulverzameling* B is een Borelverzameling met maat nul, $\lambda B = 0$. De ongelijkheid $f \leq g$ geldt *bijna overal* als er een nulverzameling B bestaat zodat $f(x,y) \leq g(x,y)$ voor alle punten $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus B$. Op dezelfde manier spreken we van $f_n \to f$ b.o. of $f = 0$ b.o.

Opgave Laten f en g Borelfuncties zijn. Stel f is integreerbaar en $g = f$ b.o. Dan is g integreeerbaar en $\int g d\lambda = \int f d\lambda$.

Stelling (Lebesgue, gemajoreerde convergentie). Laten $f_1, f_2, \ldots$ Borelfuncties zijn op $\mathbf{R}^2$ die bijna overal convergeren naar de Borelfunctie f. Stel er bestaat een integreerbare functie $h \geq 0$ zo dat

$$|f_n| \leq h \text{ b.o.} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Dan is f integreerbaar en geldt

$$\int f_n d\lambda \to \int f d\lambda$$

en zelfs

$$\int |f_n - f| d\lambda \to 0.$$

Opmerking Voor iedere niet-negatieve Borelfunctie f op $\mathbf{R}^2$ kunnen we de integraal bepalen. De functie f mag zelfs de waarde $+\infty$ aannemen. Verder bestaat de Lebesgue-integraal voor iedere Borelfunctie $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ waarvoor $\int |f| d\lambda$ eindig is.

De Lebesgue-integraal wordt altijd genomen over de hele ruimte. Wil men een functie f slechts integreren over een Borelverzameling $B \subset \mathbf{R}^2$, schrijf dan

$$\int_B f d\lambda = \int f 1_B d\lambda.$$

4.2 Integratietheorie

We hebben hierboven de integraal ingevoerd voor de maatruimte $(\mathbf{R}^2, \mathcal{B}, \lambda)$. We kunnen dit doen voor iedere maatruimte. De stelling van Lebesgue geldt op elke maatruimte, zo ook de monotone convergentiestelling en het Lemma van Fatou.

Definitie Een *maatruimte* is een drietal $(W, \mathcal{A}, \mu)$. Hierbij is W een verzameling, $\mathcal{A}$ is een σ-algebra van deelverzamelingen van W, de *meetbare* verzamelingen, en μ een maat op $\mathcal{A}$.

Voor iedere $d \geq 1$ bestaat er een unieke maat $\lambda = \lambda_d$, de *Lebesguemaat*, op de Borel σ-algebra $\mathcal{B}$ op $\mathbf{R}^d$ met de eigenschap

$$\lambda((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d) \qquad a_i < b_i, i = 1, \dots, d.$$

In het bijzonder is op $\mathbf{R}$ de Lebesguemaat van een interval niks anders dan de lengte van dit interval. Op $\mathbf{R}$ hebben we nu twee integralen, de Riemann-integraal $\int_a^b f(x)dx$ en de Lebesgue-integraal $\int_{[a,b]} f d\lambda$. Deze integralen zijn gelijk voor trapfuncties

$$t = c_1 1_{[b_0,b_1]} + c_2 1_{(b_1,b_2]} + \cdots + c_m 1_{(b_{m-1},b_m]}$$

met $a = b_0 < b_1 < \cdots < b_m = b$. Daarvoor geldt immers

$$\int_a^b t(x)dx = c_1(b_1 - b_0) + \cdots + c_m(b_m - b_{m-1}) = \int t d\lambda.$$

Stelling Zij f een continue functie op het interval $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Dan geldt

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

Bewijs Er is een rij trapfuncties t_n zo dat $t_n(x) \to f(x)$ voor alle $x \in [a, b]$, zelfs uniform op $[a, b]$. Omdat een continue functie op een gesloten begrensd interval begrensd is, bestaat er een M zodat $|f(x)| \leq M$ voor elke $x \in [a, b]$. We kunnen de trapfunctie t_n zo kiezen dat $|t_n(x)| \leq M$ voor alle $x \in [a, b]$. Dan geldt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)dx$$

per definitie van de Riemannintegraal, en

$$\int f 1_{[a,b]} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int t_n d\lambda$$

wegens de stelling van Lebesgue met majorant $M 1_{[a,b]}$. De trapfuncties hebben dezelfde integraal dus dit geldt ook voor de functie f. Daarmee is (2) bewezen. ¶

Een mooie toepassing van de Stelling van Lebesgue is:

Stelling (van Scheffé). Voor $n = 0, 1, 2, \dots$ is gegeven een stochast X_n met verdelingsfunctie F_n en kansdichtheid f_n. Stel $f_n(x) \to f_0(x)$ b.o. Dan geldt

$$F_n(x) \to F_0(x) \qquad x \in \mathbf{R}.$$

De convergentie van de vdf's is zelfs uniform

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |F_n(x) - F_0(x)| \to 0.$$

Bewijs Omdat

$$F_n(x) - F_0(x) = \int (f_n - f_0) 1_{(-\infty,x]} d\lambda.$$

is het voldoende te bewijzen dat

$$\int |f_n - f_0| d\lambda \to 0.$$

De gearceerde delen vallen tegen elkaar weg

Daar f_n en f_0 beide kansdichtheid zijn is het vertikaal gearceerde stuk even groot als het horizontaal gearceerde stuk. Dus als we schrijven $g_n = \min(f_0, f_n)$ dan is

$$\int |f_n - f_0| d\lambda = 2 \int (f_0 - g_n) d\lambda.$$

Nu geldt $g_n \to f_0$ b.o. en voor de rij (g_n) hebben we een integreerbare majorant, de functie f_0. De Stelling van Lebesgue toegepast op de rij (g_n) met majorant f_0 geeft

$$\int (f_0 - g_n) d\lambda \to 0.$$

5. Dichtheden

5.1 Voorbeeld van een kansdichtheid op het vlak

We beginnen met een voorbeeld van een kansdichtheid g op $\mathbf{R}^2$ die oneindig is in oneindig veel punten.

Voorbeeld We zullen een Borelfunctie $f : \mathbf{R}^2 \to [0, \infty]$ construeren met de eigenschap dat iedere cirkelschijf in het vlak oneindig veel punten bevat waar de functie f oneindig is. Voor iedere $m \geq 1$ is de verzameling

$$O_m = \{f > m\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) > m\}$$

een open verzameling die alle punten bevat waarvan beide coordinaten rationaal zijn.

Constructie De functie

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-r}}{r} & \text{als } r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \infty & \text{als } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is integreerbaar met integraal

$$\int \varphi d\lambda = \int_0^\infty \frac{e^{-r}}{r} 2\pi r dr = 2\pi.$$

(De functie φ is constant op cirkels. De ring tussen de cirkels met straal $r - \delta/2$ en $r + \delta/2$ heeft oppervlakte $2\pi r\delta$. Dit stelt ons in staat de integraal over een cirkelschijf met straal m goed te benaderen met een Riemannsom. Laat nu $m \to \infty$.)

Merk op dat φ een Borelfunctie is daar $\{\varphi > c\}$ voor iedere $c > 0$ een open cirkelschijfje is om de oorsprong, en voor $c \leq 0$ het hele vlak.

Laat $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots$ een aftelling zijn van de punten in $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$. Definieer

$$f_n(\vec{x}) = \varphi(\vec{x} - \vec{p}_n)/2^n.$$

De functie f_n heeft de waarde $+\infty$ in het punt $\vec{p}_n$ en $\{f_n > c\}$ is een open cirkelschijfje om het punt $\vec{p}_n$ voor $c > 0$.

Definieer nu

$$f = \sup f_n.$$

Dit is een Borelfunctie met waarden in $[0, \infty]$. Neem $c > 0$. Dan is

$$O_c = \{f > c\} = \{f_1 > c\} \cup \{f_2 > c\} \cup \{f_3 > c\} \cup \cdots$$

een vereniging van open cirkelschijfjes, dus open. Deze open verzameling bevat alle punten $\vec{p}_n$. Immers $\vec{p}_n$ is het middelpunt van het open cirkelschijfje $\{f_n > c\}$. Dus $O_c \supset \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$.

Toch is f integreerbaar. Immers $\sup f_n \leq \sum f_n$ en verwisselen van som en integraal geeft

$$\int \sum f_n d\lambda = \sum \int f_n d\lambda = \sum \frac{2\pi}{2^n} = 2\pi.$$

Uit $f \geq f_1$ en $\int f_1 d\lambda = \pi$ volgt

$$\pi < c := \int f d\lambda < 2\pi.$$

Definieer nu $g = f/c$. Dan is g een kansdichtheid op $\mathbf{R}^2$ die strikt positief is en die oneindig is in alle punten van $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$. ¶

Opgave Zij $f : \mathbf{R}^2 \to [0, \infty]$ integreerbaar. Bewijs dat f bijna overal eindig is.

5.2 Dichtheden

De Borel σ-algebra op $\mathbf{R}^d$ is de kleinste σ-algebra die alle open verzamelingen bevat. Zie \$1.6.

Stelling 1. Zij $f : \mathbf{R}^d \to [0, \infty)$ een Borelfunctie met integraal $\int f d\lambda = 1$. Laat $\mathcal{B}$ de Borel σ-algebra zijn op $\mathbf{R}^d$. Definieer

$$\pi B = \int_B f d\lambda \qquad B \in \mathcal{B}.$$

a) Dan is π een kansmaat op $\mathcal{B}$.
b) Voor iedere Borelfunctie $\varphi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ geldt

$$\int |\varphi| d\pi = \int |\varphi| f d\lambda. \tag{1}$$

c) Als de integraal in (1) eindig is dan geldt

$$\int \varphi d\pi = \int \varphi f d\lambda.$$

Bewijs a) Het is duidelijk dat $0 \leq \pi B \leq 1$ en dat $\pi(\mathbf{R}^d) = 1$. We moeten axioma P2 bewijzen.
Stel $B_1, B_2, \ldots$ zijn disjuncte Borelverzamelingen in $\mathbf{R}^d$ met vereniging B. Dan geldt

$$\pi B = \int_B f d\lambda = \int f 1_B d\lambda = \int \sum f 1_{B_n} d\lambda = \sum \int f 1_{B_n} d\lambda = \sum \pi B_n.$$

b) Als φ een simpele functie is geldt (1). Ga na. Er is een stijgende rij simpele functies s_n met $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots$ die puntsgewijs convergeert naar $|\varphi|$. Dan convergeert $s_n f$ puntsgewijs naar $|\varphi| f$. Uit de gelijkheid

$$\int s_n d\pi = \int s_n f d\lambda \qquad n = 1, 2, \ldots$$

volgt met de Monotone Convergentie stelling de gelijkheid voor de limietfuncties

$$\int |\varphi| d\pi = \int |\varphi| f d\lambda.$$

c) De gelijkheid geldt voor φ^+ en voor φ^- dus ook voor het verschil φ. ¶

Notatie Voor de kansmaat π in Stelling 1 schrijven we

$$d\pi = f d\lambda$$

wat betekent dat

$$\int_B d\pi = \int_B f d\lambda \qquad B \in \mathcal{B}.$$

Definitie We noemen f de *dichtheid* van π.

5.3 Singuliere en absoluut continue kansmaten

Voorbeeld (Een kansverdeling op het vlak die niet discreet is en geen dichtheid heeft). Laat U homogeen verdeeld zijn op het interval $[0, 2\pi)$. Definieer $(X, Y) = (\cos U, \sin U)$. Dan is de vector (X, Y) uniform verdeeld over de eenheidscirkel $S = \{x^2 + y^2 = 1\}$ in het vlak. Het is duidelijk dat $P\{(X, Y) = (x, y)\} = 0$ voor elk punt (x, y) in het vlak. Stel de vector (X, Y) heeft een dichtheid f. De cirkel S is een nulverzameling voor de Lebesgue-maat, dus

$$\int_S f d\lambda = 0.$$

Omdat $P\{X^2 + Y^2 \neq 1\} = 0$ geldt

$$\int_{S^c} f d\lambda = P\{(X, Y) \notin S\} = 0.$$

Optellen levert $\int f d\lambda = 0$. Dus f kan geen kansdichtheid zijn. ¶

We zien dat een kansmaat π die leeft op een nulverzameling S geen dichtheid heeft. De verzameling S hierboven is een Borelverzameling met de volgende eigenschappen:

$$\lambda S = 0 \qquad \pi S^c = 0.$$

De maten λ en π leven op disjuncte verzamelingen. Dergelijke maten heten *singulier* t.o.v. elkaar en we schrijven

(5.3.1) $$\pi \perp \lambda.$$

Als een kansmaat π een dichtheid heeft, $d\pi = f d\lambda$, dan geldt:

$$\lambda A = 0 \Rightarrow \pi A = \int_A f d\lambda = 0.$$

We zeggen dan dat π *absoluut continu* is t.o.v. de Lebesguemaat λ op $\mathbf{R}^d$ en schrijven

(5.3.2) $$\pi << \lambda.$$

5.4 De stelling van Radon-Nikodym

Stelling (Radon-Nikodym). Zij μ een kansmaat op $\mathbf{R}^d$ die absoluut continu is t.o.v. de Lebesguemaat. Dan is er een Borelfunctie $f : \mathbf{R}^d \to [0, \infty)$ zo dat $d\mu(x) = f(x) d\lambda(x)$.

Absoluut continu en singulier zijn twee uitersten. Nemen we een mengsel van de kansmaat op de cirkel en een standaardnormale verdeling dan hebben we een kansmaat die bestaat uit een singulier deel en een absoluut continu deel.

Stelling (Radon-Nikodym). Zij μ een kansmaat op $\mathbf{R}^d$. Dan is er een Borelfunctie $f : \mathbf{R}^d \to [0, \infty)$ en een Borelverzameling S met $\lambda S = 0$ zo dat voor elke Borelverzameling $B \subset \mathbf{R}^d$ geldt

$$\mu B = \mu(B \cap N) + \int_B f d\lambda.$$

Opgave Zij π de kansmaat op $\mathcal{B}$ uit de stelling hierboven. Definieer $\pi_s : \mathcal{B} \to [0, \infty)$ door

$$\pi_s(B) = \pi(S \cap B) \qquad b \in \mathcal{B}.$$

Bewijs dat π_s een maat is, dat $\pi_s \mathbf{R}^d \leq 1$, en dat $\pi_s \perp \lambda$. Bewijs dat $\pi_{ac} = \pi - \pi_s$ een maat is, dat $\pi_{ac} \mathbf{R}^d \leq 1$, en dat $\pi_{ac} << \lambda$.

5.5 De kettingregel

Definitie Een maat μ op W is *σ-eindig* als de ruimte W overdekt kan worden met een rij meetbare verzamelingen met eindige maat.

De Stelling van Radon-Nikodym en stelling 5.2.1 gelden ook als we de Lebesguemaat λ vervangen door een σ-eindige maat ρ.

Stelling 1. Laat ρ een σ-eindige maat zijn op de σ-algebra $\mathcal{A}$ op W. Laten $f : W \to [0,\infty)$ en $g : W \to [0,\infty)$ meetbaar zijn. Stel

$$d\mu = fd\rho \qquad d\pi = gd\mu.$$

Dan geldt

$$d\pi = fgd\rho.$$

Bewijs Zij $A \in \mathcal{A}$. Dan geldt

$$\pi A = \int g1_A d\mu \overset{(*)}{=} \int g1_A f d\rho = \int_A fgd\rho.$$

In (*) gebruiken we Stelling 5.1.1. ¶

Stelling 2. Als $(W, \mathcal{A}, \rho)$ een σ-eindige maatruimte is en $f : W \to (0,\infty)$ meetbaar, en $d\mu = fd\rho$, dan geldt $d\rho = (1/f)d\mu$.

Bewijs Zij $A \in \mathcal{A}$. Dan geldt met Stelling 5.1.1 bij de gelijkheid (*)

$$\int_A \frac{1}{f} d\rho \overset{(*)}{=} \int_A \frac{1}{f}(fd\mu) = \int_A d\mu = \mu A.$$

5.6 Een toepassing in de statistiek

In de statistiek werkt men vaak met families van kansmaten π_t, $\tau \in T$, op $\mathbf{R}$ of $\mathbf{R}^d$, die allemaal absoluut continu zijn t.o.v. een gegeven σ-eindige maat μ. Vaak is μ de Lebesgue maat, maar dat hoeft niet. We zullen aantonen dat de maat μ vervangen mag worden door een convexe combinatie van een rij kansmaten p_{t_n}.

Lemma Laten $E(t)$, $t \in T$, een collectie gebeurtenissen zijn. Dan is er een rij $t_1, t_2, \ldots$ zo dat de vereniging

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(t_n) \tag{8.1}$$

zo groot is dat

$$P(E(t) \setminus E) = 0 \qquad t \in T. \tag{8.2}$$

Bewijs We construeren de rij $t_1, t_2, \ldots$ door de gebeurtenissen $E(t_n)$ handig te kiezen. Definieer

$$r_0 = \sup_t PE(t).$$

We veronderstellen $r_0 > 0$. (Anders geldt $PE(t) = 0$ voor elke t en mogen we iedere rij t_n nemen.) Er hoeft geen gebeurtenis $E(t)$ te zijn met $PE(t) = r_0$, maar we kunnen wel t_1 kiezen zo dat $PE(t_1) > r_0/2$. Zij $A_1 = \Omega \setminus E(t_1)$ en definieer

$$r_1 = \sup_t P(A_1 \cap E(t)).$$

We kunnen t_2 vinden zo dat $P(A_1 \cap E(t_2)) > r_1/2$. Zij $A_2 = A_1 \setminus E(t_2)$ en definieer

$$r_2 = \sup_t P(A_2 \cap E(t)).$$

Kies t_3 zo dat $P(A_2 \cap E(t_3)) > r_2/2$, en ga zo voort. We vinden een rij $t_n \in T$, een dalende rij gebeurtenissen A_n, en een dalende rij r_n. Als $r_n = 0$ voor zekere n dan zijn we klaar. (Ga na.) We nemen dus aan dat $r_n > 0$ voor alle n. Uit $PA_{n+1} < PA_n - r_n/2$ volgt (met inductie) $PA_n < 1 - (r_0/2 + \cdots + r_{n-1}/2)$ en dus $\sum r_n < 2$. Hieruit volgt volgt dat $r_n \to 0$. Zij E de gebeurtenis in (8.1). Dan is $E^c = \bigcap A_n$.

We beweren dat (8.2) geldt. Als er een t is zo dat $P(E(t) \setminus E) = p > 0$, dan geldt $P(E(t) \cap A_n) \geq p$ voor alle n. Kies n zo groot dat $p > r_n$. Dan geldt $P(E(t) \cap A_n) > r_n = \sup_t P(A_n \cap E(t))$. Dat kan niet. Er is geen t waarvoor $P(E(t) \setminus E) > 0$. ¶

Stelling Zij μ een σ-eindige maat op $\mathbf{R}^d$ en π_t, $t \in T$, een collectie kansmaten zo dat $\pi_t << \mu$ voor elke $t \in T$. Dan bestaat er een rij $t_n \in T$ zo dat $\pi_t << \pi$ waarbij

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_{t_n}/2^n. \tag{8.3}$$

Bewijs Er bestaat een kansmaat ρ op $\mathbf{R}^d$ en een positieve functie h zo dat $d\mu = hd\rho$. (Opgave.) Schrijf $d\pi_t = f_t d\mu$ en zij $E(t) = \{f_t > 0\}$. Volgens het Lemma hierboven bestaat er een rij t_n zo dat $E = \bigcup E(t_n)$ voldoet aan $\rho(E(t) \setminus E) = 0$ voor elke t. Dan geldt ook $\mu(E(t) \setminus E) = 0$ voor elke $t \in T$. De kansmaat π in (8.3) heeft dichtheid $g = \sum f_{t_n}/2^n$ t.o.v. μ. Deze functie g is positief op E, dus $1_E d\mu = (1/g)1_E d\pi$, en

$$d\pi_t = f_t d\mu = f_t 1_E d\mu = f_t (1/g) 1_E d\pi \qquad t \in T.$$

Immers voor elke Borelverzameling B geldt $\pi_t B = \int (f_t h/g) 1_{E \cap B} d\pi$. ¶

6. Kansverdelingen

6.1 Kansverdeling en verdelingsfunctie

De *verdelingsfunctie* van een stochast X is de functie $F : \mathbf{R} \to [0, 1]$ gedefinieerd door:

$$F(x) = P\{X \le x\} \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Opgave Bewijs dat een verdelingsfunctie stijgend is:

$$x < y \Rightarrow F(x) \le F(y)$$

en dat geldt

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} F(x + \frac{1}{n} = F(x).$$

We kunnen ook spreken over de verdelingsfunctie van een stochastische vector $X = (X_1, \ldots, X_d)$. Dit is de functie $F : \mathbf{R}^d \to [0, 1]$ met

$$F(x_1, \ldots, x_d) = P\{X_1 \le x_1, \ldots, X_d \le x_d\} \qquad (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^d.$$

Met de *kansverdeling* van een stochast of een stochastische vector bedoelen we de kansmaat π die bij deze stochast of vector hoort:

$$(*) \qquad \pi B = P\{X \in B\} \qquad B \in \mathcal{B}.$$

Hierbij is $\mathcal{B}$ de Borel σ-algebra. Als X een stochast is dan is $\mathcal{B}$ de Borel σ-algebra op $\mathbf{R}$ en als X een vector is in $\mathbf{R}^d$ dan is $\mathcal{B}$ de Borel σ-algebra op $\mathbf{R}^d$.

6.2 Het meetbaarheidslemma

Lemma (Meetbaarheidslemma). Zij W een verzameling en $\mathcal{C}$ een collectie deelverzamelingen van W. Zij $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$ de kleinste σ-algebra op W die de collectie $\mathcal{C}$ omvat. Zij $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ een kansruimte en $T : \Omega \to W$ een afbeelding met waarden in W. Als

$$\{T \in C\} = \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \in C\}$$

een gebeurtenis is voor elke $C \in \mathcal{C}$, dan geldt

$$(1) \qquad \{T \in A\} \in \mathcal{E} \qquad A \in \mathcal{A}.$$

In dat geval noemen we T een stochastisch punt in W.

Bewijs Zij $\mathcal{A}_0$ de collectie van alle $A \in \mathcal{A}$ met de eigenschap dat $\{T \in A\}$ een gebeurtenis is. Dan geldt:
1) $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_0$ (gegeven);
2) $\mathcal{A}_0$ is een σ-algebra (ga na).
Daar $\mathcal{A}$ per definitie de kleinste σ-algebra is die $\mathcal{C}$ omvat, geldt $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$. Hiermee is (1) bewezen.

Voorbeeld 1. Zij $W = \mathbf{R}$ en $\mathcal{C}$ de collectie van alle halfrechten $(-\infty, c]$ met $c \in \mathbf{R}$. Dan is $\sigma(\mathcal{C})$ de Borel σ-algebra. Als een functie $T : \Omega \to \mathbf{R}$ de eigenschap heeft dat voor iedere $c \in \mathbf{R}$ de verzameling $\{T \le c\}$ een gebeurtenis is, dan is $\{T \in B\}$ een gebeurtenis voor iedere Borelverzameling $B \subset \mathbf{R}$.

Voorbeeld 2. Laten $X_1, \ldots, X_d$ stochasten zijn op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{E}, P)$. Zij $W = \mathbf{R}^d$ en $\mathcal{C}$ de collectie van alle halfruimten

$$C = C_c^i = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^d \mid x_i \leq c\}. \tag{2}$$

Dan bevat $\sigma(\mathcal{C})$ alle blokken van de vorm

$$(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] \qquad a_i < b_i,\ i = 1, \ldots, d.$$

We hebben eerder gezien dat $\sigma(\mathcal{C})$ dan ook alle open blokken en dus alle open verzxamelingen bevat. Dus $\sigma(\mathcal{C})$ is de Borel σ-algebra op $\mathbf{R}^d$. Beschouw nu de vector $X = (X_1, \ldots, X_d)$. Dan geldt voor iedere verzameling $C = C_c^i$ uit de collectie (2)

$$\{X \in C_c^i\} = \{X_i \leq c\}$$

en dit is een gebeurtenis. Uit het meetbaarheidslemma volgt nu dat voor iedere Borelverzameling $B \subset \mathbf{R}^d$ geldt dat

$$\{X \in B\}$$

een gebeurtenis is.

6.3 De kansverdeling van een stochastische vector

Stelling Zij $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ een kansruimte en laten $X_1, \ldots, X_d$ stochasten zijn op Ω. Definieer $\pi B = P\{X \in B\}$ als in (*) met $X = (X_1, \ldots, X_d)$. Dan is π een kansmaat op de Borel σ-algebra $\mathcal{B}$ op $\mathbf{R}^d$.

Bewijs We hebben gezien (Voorbeeld 2) dat de verzameling $\{X \in B\}$ een gebeurtenis is als $X_1, \ldots, X_d$ stochasten zijn. We moeten nog aantonen dat π een kansmaat is op $\mathcal{B}$. Duidelijk is

$$\{X \in \emptyset\} = \emptyset \Rightarrow \pi(\emptyset) = P\{X \in \emptyset\} = 0.$$

Axioma P2) geldt ook. Laten $B_1, B_2, \ldots$ disjuncte Borelverzamelingen zijn in $\mathbf{R}^d$ met vereniging B. Dan zijn de gebeurtenissen $A_n = \{X \in B_n\}$ disjunct met vereniging $\{X \in B\}$. Dat betekent

$$P\{X \in B\} = \sum P\{X \in B_n\}.$$

Hier staat precies $\pi B = \sum \pi B_n$.

Stelling Zij X een stochastische vector met kansverdeling π. Dan geldt voor iedere Borelfunctie $f : \mathbf{R}^d \to [0, \infty)$

$$Ef(X) = \int f d\pi. \tag{**}$$

Bewijs Als f de indicatorfunctie is van een Borelverzameling $B \subset \mathbf{R}^d$ dan geldt $Ef(X) = E1_B(X) = P\{X \in B\}$ en ook $\int f d\pi = \int 1_B d\pi = \pi B$. Dus dan geldt de formule (**). Dan geldt de formule ook als f simpel is,

$$f = c_1 1_{B_1} + \cdots + c_m 1_{B_m}.$$

Immers

$$Ef(X) = c_1 P\{X \in B_1\} + \cdots + c_m P\{X \in B_m\}$$

en

$$\int f d\pi = c_1 \pi B_1 + \cdots + c_m \pi B_m.$$

Laat nu $f : \mathbf{R}^d \to [0, \infty)$ een willekeurige Borelfunctie zijn. Dan is er een rij simpele functies $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ met $f_n(x) \uparrow f(x)$ voor alle $x \in \mathbf{R}$. Dan volgt uit de monotone convergentiestelling

$$Ef_n(X) \to Ef(X) \qquad \int f_n d\pi \to \int f d\pi.$$

Uit de gelijkheid $Ef_n(X) = \int f_n d\pi$ voor alle simpele functies f_n volgt dan (**) voor de limietfunctie f.

Opgave Zij X een stochastische vector in $\mathbf{R}^d$ en $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ een Borelfunctie. Laat zien dat $Y = f(X)$ een stochast is. Zij π de kansverdeling van X en ρ de kansverdeling van Y. Laat zien dat

$$\int y d\rho(y) = \int f d\pi.$$

6.4 De transformatiestelling

De transformatiestelling is nuttig voor het berekenen van dichtheden van stochastische vectoren.

Stelling (De transformatiestelling voor dichtheden). Laten U en V open deelverzamelingen zijn van $\mathbf{R}^d$ en zij $T : U \to V$ een bijectie met inverse $S : V \to U$. Stel T is continu differentieerbaar en $detT'(x) \neq 0$ voor $x \in U$. Dan geldt:
a) $S; V \to U$ is C^1 met afgeleide $S'(y) = (T'(x))^{-1}$, $x = S(y)$;
b) heeft X dichtheid f die nul is buiten U dan heeft $Y = T(X)$ dichtheid g die nul is buiten V en

$$g(y) = f(S(y))|\det S'(y)| \qquad y \in V.$$

Gevolg Zij $b \in \mathbf{R}^d$ en zij $A : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ een lineaire afbeelding met $\det A \neq 0$. Zij X een stochastische vector in $\mathbf{R}^d$ met dichtheid f. Dan heeft de vector $Y = A^{-1}(X - b)$ dichtheid g met

$$g(y) = |\det A| f(Ay + b) \qquad y \in \mathbf{R}^d.$$

7. Onafhankelijkheid

7.1 De monotone klasse stelling

Vaak is het voldoende om een bewering te controleren voor een kleine klasse van verzamelingen, bv. voor alle rechthoeken, of voor alle halfrechten van de vorm $(-\infty, c]$ met $c \in \mathbf{R}$. Men roept dan de monotone klasse stelling aan om te concluderen dat de bewering geldt voor alle Borelverzamelingen.

Voorbeeld 1. Laten X en Y stochasten zijn met dezelfde verdelingsfunctie F. Dan geldt $P\{X \leq c\} = P\{Y \leq c\}$ voor elke $c \in \mathbf{R}$. Uit de monotone klasse stelling volgt dan $P\{X \in B\} = P\{Y \in B\}$ voor elke Borelverzameling $B \subset \mathbf{R}$.

Voorbeeld 2. Laten X en Y stochastische vectoren zijn in $\mathbf{R}^2$. Stel dat geldt

$$P\{X \in C\} = P\{Y \in C\} \qquad C \in \mathcal{C}$$

waarbij $\mathcal{C}$ de collectie is van alle gesloten rechthoeken $C = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ met $a_1 < b_1$ en $a_2 < b_2$. Uit de monotone klasse stelling volgt dat

$$P\{X \in B\} = P\{Y \in B\} \qquad B \in \mathcal{B}.$$

Hierbij is $\mathcal{B}$ de Borel σ-algebra op $\mathbf{R}^2$.

Definitie Zij L een lineaire ruimte van begrensde functies $\varphi : X \to \mathbf{R}$. De ruimte L is *monotoon gesloten* als voor iedere rij φ_n in L met

(7.1.1) $$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \leq 1$$

geldt dat ook

$$\varphi = \sup_n \varphi_n \in L.$$

Stelling (Monotone klasse stelling). Laat $\mathcal{C}$ een collectie deelverzamelingen zijn van de verzameling V met de eigenschap:

(7.1.2) $$C_1 \in \mathcal{C},\ C_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}.$$

Laat $\mathcal{A}$ de σ-algebra zijn op V voortgebracht door $\mathcal{C}$. Laat L een verzameling begrensde $\mathcal{A}$-meetbare functies zijn op V. Stel dat geldt:
1) L is een lineaire ruimte;
2) L is monotoon gesloten;
3) $1 \in L$;
4) $1_C \in L$ voor elke $C \in \mathcal{C}$.
Dan bevat L alle begrensde $\mathcal{A}$-meetbare functies $\varphi : V \to \mathbf{R}$.

Bewijs van Voorbeeld 1. Neem $V = \mathbf{R}$ en voor $\mathcal{C}$ de collectie gesloten linker halfrechten $C = (-\infty, c]$ met $c \in \mathbf{R}$. Duidelijk is

$$(-\infty, a] \cap (-\infty, b] = (-\infty, c] \qquad c = \min(a, b).$$

Dus (7.1.2) geldt. We weten dat de collectie $\mathcal{C}$ de Borel σ-algebra op $\mathbf{R}$ voortbrengt.

Laat nu L de verzameling zijn van alle begrensde Borelfuncties $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ met de eigenschap

$$E\varphi(X) = E\varphi(Y).$$

We moeten dan 1) – 4) controleren. We laten zien hoe dat gaat met 2).

Stel de rij functies $\varphi_n \in L$ voldoet aan (7.1.1) in de definitie van monotoon gesloten. Dus $E\varphi_n(X) = E\varphi_n(Y)$ voor $n = 1, 2, \ldots$ We mogen nu kiezen of we de monotone convergentiestelling willen gebruiken of de stelling van Lebesgue met majorant 1. In beide gevallen vinden we $E\varphi(X) = E\varphi(Y)$ waarbij $\varphi = \sup_n \varphi_n = \lim_n \varphi_n$. Conclusie: $\varphi \in L$. Dit geldt voor elke rij (φ_n) in L die voldoet aan (7.1.1). Dus L is monotoon gesloten.

Uit de monotone klasse stelling volgt dat L alle begrensde Borelfuncties bevat. Dus $E\varphi(X) = E\varphi(Y)$ voor iedere begrensde Borelfunctie φ. Nemen we in het bijzonder voor φ de indicatorfunctie van de Borelverzameling B dan vinden we

$$P\{X \in B\} = E1_B(X) = E1_B(Y) = P\{Y \in B\}.$$

Daarmee is de bewering uit Voorbeeld 1 bewezen. ¶

Opgave Bewijs de bewering in Voorbeeld 2 met de monotone klasse stelling.

Stelling 2. Laten μ en ρ maten zijn op de Borel σ-algebra $\mathcal{B}$ op $\mathbf{R}^d$. Stel dat geldt

$$\mu C = \rho C < \infty \qquad C \in \mathcal{C}$$

waarbij $\mathcal{C}$ de collectie is van alle gesloten blokken

$$C = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \qquad a_i < b_i,\ i = 1, \ldots, d.$$

Dan geldt $\mu B = \rho B$ voor iedere Borelverzameling $B \subset \mathbf{R}^d$.

Bewijs Merk eerst op dat de collectie $\mathcal{C}$ van gesloten blokken voldoet aan (7.1.2) en de Borel σ-algebra voortbrengt. (Immers iedere open verzameling is aftelbare vereniging van open blokken, en elk open blok is de vereniging van een groeiende rij gesloten blokken.)

Zij $B \in \mathcal{B}$. Om te bewijzen dat $\mu B = \rho B$ is het voldoende te bewijzen dat $\mu B_n = \rho B_n$ voor alle $n \geq 1$ waar B_n de doorsnede is van B met de gesloten kubus $K_n = [-n, n]^d$.

Neem nu zo'n kubus K. Zij L de verzameling van alle begrensde Borelfuncties $\varphi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ waarvoor geldt dat

$$\int_K \varphi d\mu = \int_K \varphi d\rho.$$

Deze verzameling voldoet aan 1) – 4). Ga na. Dus L bevat alle begrensde Borelfuncties op $\mathbf{R}^d$. In het bijzonder kunnen we $\varphi = 1_B$ nemen. Dan geldt

$$\mu(B \cap K) = \int_K 1_B d\mu = \int_K 1_B d\rho = \rho(B \cap K).$$

Daarmee is bewezen dat $\mu B_n = \rho B_n$ voor iedere n. Dus $\mu B = \rho B$. ¶

7.2 Productmaten en de stelling van Fubini

Als $(X, \mathcal{A}, \mu)$ en $(Y, \mathcal{E}, \rho)$ σ-eindige maatruimten zijn dan kunnen we een nieuwe maatruimte maken, de *productruimte*

$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{E}, \mu \times \rho).$$

Hierbij is $X \times Y$ de verzameling van alle paren (x, y) met $x \in X$ en $y \in Y$, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{E}$ is de kleinste σ-algebra die de rechthoeken $A \times E$ bevat met $A \in \mathcal{A}$ en $E \in \mathcal{E}$ en μA en ρE eindig. We geven de collectie van al deze rechthoeken aan met

$$\mathcal{C} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, E \in \mathcal{E}, \mu A < \infty, \rho E < \infty\}.$$

De σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{E}$ heet de *product σ-algebra*. We zullen zo dadelijk zien dat er een unieke maat $\mu \times \rho$ bestaat, de *productmaat*, op de σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{E}$ zo dat

(7.2.1) $$(\mu \times \rho)(A \times E) = \mu A \rho E \qquad A \times E \in \mathcal{C}.$$

Propositie Zij $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ meetbaar t.o.v. de product σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{E}$. Dan geldt voor iedere vaste $y \in Y$ dat de functie

$$x \mapsto \varphi(x) = f(x, y)$$

een $\mathcal{A}$-meetbare functie is op X.

Bewijs De functie φ is de samenstelling van de afbeeldingen

$$x \mapsto (x, y) \mapsto f(x, y).$$

De afbeelding $x \mapsto T(x) = (x, y)$ is meetbaar wegens het meetbaarheidslemma. Voor iedere rechthoek $C = A \times E$ ligt $\{T \in C\}$ in $\mathcal{A}$. Immers

$$\{T \in A \times E\} = \begin{cases} A & \text{if } y \in E \\ \emptyset & \text{if } y \in E^c. \end{cases}$$

De samenstelling van twee meetbare afbeeldingen is weer meetbaar. Ga na. ¶

Opgave Formuleer dit resultaat voor de functie $y \mapsto f(x, y)$ bij vaste x.

Stelling (Fubini voor eindige maatruimten). Laten $(X, \mathcal{A}, \mu)$ en $(Y, \mathcal{E}, \rho)$ eindige maatruimten zijn. Zij $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ meetbaar t.o.v. de product σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{E}$ en begrensd. Definieer

$$g(x) = \int_Y f(x, y) d\rho(y) \tag{7.2.2}$$

$$h(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x). \tag{7.2.3}$$

De functie g is meetbaar t.o.v. $\mathcal{A}$ en begrensd, de functie h is meetbaar t.o.v. $\mathcal{E}$ en begrensd, en

$$\int_X g d\mu = \int_Y h d\rho.$$

Bewijs Dit volgt uit de monotone klasse stelling. Zij $\mathcal{C}$ de collectie van alle rechthoeken $C = A \times E$. Deze is gesloten voor doorsnede, zie (7.1.2), en brengt de product σ-algebra voort op $V = X \times Y$. Zij nu L de verzameling van alle begrensde $\mathcal{A} \otimes \mathcal{E}$-meetbare functies $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ waarvoor de drie uitspraken hierboven gelden. De verzameling L voldoet aan de vier eisen 1) – 4) uit de monotone klasse stelling. Hieruit volgt dat L alle begrensde $\mathcal{A} \otimes \mathcal{E}$-meetbare functies bevat. Daarmee is de stelling bewezen. ¶

Gevolg Er is een unieke maat $\mu \times \rho$ op $\mathcal{A} \otimes \mathcal{E}$ zo dat (7.2.1) geldt.

Bewijs Definieer voor $B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{E}$

$$(\mu \times \rho)B = \int_X \int_Y 1_B(x, y) d\mu(x) d\rho(y).$$

Voor rechthoeken geldt (7.2.1). Als $B = \emptyset$ dan geldt $(\mu \times \rho)B = 0$ en als B de vereniging is van een rij disjuncte meetbare verzamelingen B_n dan geldt

$$(\mu \times \rho)B = \sum (\mu \times \rho) B_n$$

daar $1_B = \sum 1_{B_n}$ en integratie en sommatie verwisseld mogen worden voor niet-negatieve functies. Ga na. Dus $\mu \times \rho$ is een eindige maat op $\mathcal{A} \otimes \mathcal{E}$. Met de monotone klasse stelling volgt dat deze maat uniek is. ¶

De stelling van Fubini geldt ook voor σ-eindige maten. Het bewijs is wat lastiger. We laten dat over aan de lezer.

Stelling (Fubini). Laten $(X, \mathcal{A}, \mu)$ en $(Y, \mathcal{E}, \rho)$ σ-eindige maatruimten zijn. Dan is er een unieke σ-eindige maat $\mu \times \rho$ op de product σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{E}$ zo dat

$$(\mu \times \rho)(A \times E) = \mu A \rho E \qquad A \in \mathcal{A}, E \in \mathcal{E}, \mu A < \infty, \rho E < \infty.$$

Zij $f : X \times Y \to [0, \infty]$ meetbaar op de product σ-algebra. Definieer $g(x)$ en $h(y)$ als in (7.2.2) en (7.2.3). Dan is g meetbaar op $\mathcal{A}$, h meetbaar op $\mathcal{E}$ en

$$\int_X g d\mu = \int_Y h d\rho = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \rho).$$

Opmerking Als $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ met f_1 meetbaar op $\mathcal{A}$ en f_2 meetbaar op $\mathcal{E}$ dan geldt

$$\int f d(\mu \times \rho) = \int f_1 d\mu \int f_2 d\rho.$$

Opgave Zij λ_d de Lebesgue maat op de Borel σ-algebra $\mathcal{B}_d$ op $\mathbf{R}^d$. Dan is $\mathcal{B}_m \otimes \mathcal{B}_n$ de Borel σ-algebra op $\mathbf{R}^{m+n}$ en $\lambda_n \times \lambda_m = \lambda_{m+n}$.

7.3 Onafhankelijkheid

De stochasten $X_1, \ldots, X_m$ zijn *onafhankelijk* als geldt

$$P(E_1 \cap \cdots \cap E_m) = PE_1 \cdots PE_m$$

voor elk stel gebeurtenissen $E_1, \ldots, E_m$ waarbij E_i bepaald wordt door de stochast X_i.

Dezelfde definitie geldt voor de onafhankelijkheid van m stochastische vectoren $X_1, \ldots, X_m$, of van m stochastische processen.

Laten X_1 en X_2 onafhankelijke stochasten zijn met kansverdelingen π_1 en π_2. Dan geldt voor iedere begrensde Borelfunctie $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$$E\varphi(X_1, X_2) = \int \int \varphi(x_1, x_2) d\pi_1(x_1) d\pi_2(x_2). \tag{7.3.1}$$

In de herhaalde integraal rechts kunnen we de variablele x_1 wegintegreren. Bij de verwachting links gaat dat niet. Er bestaat daar een andere methode, de voorwaardelijke verwachting, om een functie van X_1 en X_2 te transformeren in een functie van X_2. Die methode is heel krachting, maar werkt op een andere manier. We gaan daar niet op in. Voor ons is van belang het geval dat

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2).$$

Dan gaat (7.3.1) over in

$$E(\varphi_1(X_1)\varphi_2(X_2)) = \int \varphi_1 d\pi_1 \int \varphi_2 d\pi_2 = E\varphi_1(X_1) E\varphi_2(X_2).$$

We willen deze relatie nu algemeen bewijzen voor het geval van m onafhankelijke vectoren $X_1, \ldots, X_d$. Hierbij is X_i een stochastische vector in de vectorruimte R_i voor $i = 1, \ldots, m$. De vectorruimten R_i mogen verschillend zijn.

Stelling Laat X_i een stochastische vector zijn in de d_i-dimensionale vectorruimte R_i voor $i = 1, \ldots, m$ met kansverdeling π_i. Voor $i = 1, \ldots, m$ is $\mathcal{C}_i$ een collectie deelverzamelingen van R_i die de Borel σ-algebra op R_i voortbrengt, en die gesloten is voor doorsneden, zie (7.1.2). Als voor elke keuze van $C_i \in \mathcal{C}_i$, $i = 1, \ldots, m$

$$P\{X_1 \in C_1, \ldots, X_m \in C_m\} = P\{X_1 \in C_1\} \cdots P\{X_m \in C_m\}$$

dan zijn de m vectoren $X_1, \ldots, X_m$ onafhankelijk. Voorts geldt voor iedere begrende Borelfunctie $\varphi : R_1 \times \cdots \times R_m \to \mathbf{R}$ dat

$$E\varphi(X_1, \ldots, X_m) = \int \cdots \int \varphi(x_1, \ldots, x_m) d\pi_1(x_1) \ldots d\pi_m(x_m). \tag{7.3.2}$$

In het bijzonder geldt voor $\varphi(x_1, \ldots, x_m) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_m(x_m)$

$$E(\varphi_1(X_1) \cdots \varphi_m(X_m)) = E\varphi_1(X_1) \cdots E\varphi_m(X_m).$$

Bewijs Zij $\mathcal{C}$ de collectie van alle blokken

$$C_1 \times \cdots \times C_m \subset R = R_1 \times \cdots \times R_m \qquad C_i \in \mathcal{C}_i, \; i = 1, \ldots, m.$$

De collectie $\mathcal{C}$ brengt de Borel σ-algebra voort op R (zie opgave 7.2.1) en is gesloten voor doorsneden, zie (7.1.2).

Zij L de verzameling van alle begrensde Borelfuncties φ op R waarvoor (7.3.2) geldt. De verzameling L voldoet aan de vier eisen van de monotone klasse stelling. Ga na! Dus (7.3.2) geldt voor alle begrensde Borelfuncties op R.

Definitie Een collectie stochasten X_t, $t \in T$, is *onafhankelijk* als elk eindig deelstelsel onafhankelijk is.

Opgave 1. Laten $X_1, X_2, \ldots$ stochasten zijn zo dat X_2 en X_1 onafhankelijk zijn en algmener zijn X_{n+1} en $(X_1, \ldots, X_n)$ onafhankelijk voor elke $n > 1$. Dan is de hele rij onafhankelijk.

Opgave 2. Doe twee onafhankelijke worpen met een zuivere munt met uitkomsten 1 en -1 met kans $1/2$. Noem de uitkomsten X_1 en X_2 en zij $X_0 = X_1 X_2$. Bewijs dat X_0 en X_1 onafhankelijk zijn en ook X_0 en X_2. Zijn de drie stochasten X_0, X_1, X_2 onafhankelijk?

Opgave 3. De twee vectoren (X_1, X_2) en (X_3, X_4) zijn onafhankelijk. De twee componenten X_1 en X_2 zijn onafhankelijk, en ook de twee componenten X_3 en X_4. Zijn de vier stochasten X_1, X_2, X_3, X_4 onafhankelijk?