Opgaven Voortgezette kansrekening
2000-2001

P.J.C. Spreij

versie 9 oktober 2000

Week 1

1. Zij $\mathcal{C}$ een klasse stochastische variabelen. Laat zien dat $\mathcal{C}$ uniform integreerbaar is als en alleen als voldaan is aan de volgende twee condities:

   (a) $\mathcal{C}$ is begrensd in $\mathcal{L}^1$

   (b) Voor elke $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zodanig dat voor elke $F \in \mathcal{F}$ met $\mathbb{P}(F) < \delta$ en voor alle $X \in \mathcal{C}$ geldt $\mathbb{E}1_F|X| < \varepsilon$.

2. Zij $\mathcal{C}$ een verzameling uniform integreerbare stochastische variabelen.

   (a) Zij $\bar{\mathcal{C}}$ de afsluiting van $\mathcal{C}$ in $\mathcal{L}^1$. Laat nu m.b.v. opgave 1 zien dat ook $\bar{\mathcal{C}}$ uniform integreerbaar is.

   (b) Zij $\mathcal{D}$ het convexe omhulsel van $\mathcal{C}$. Dan is $\mathcal{D}$ uniform integreerbaar evenals zijn afsluiting in $\mathcal{L}^1$.

3. Bewering: Een collectie $\mathcal{C}$ is uniform integreerbaar als en alleen als voldaan is aan de volgende eis:
   Er bestaat een functie $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ met de eigenschap $\lim_{t\to\infty} \frac{G(t)}{t} = \infty$ zodanig dat $M := \sup\{G(|X|) : X \in \mathcal{C}\} < \infty$.

   Ga om de noodzaak van deze conditie te bewijzen als volgt te werk. Zij $\varepsilon > 0$ en kies $a = M/\varepsilon$ en vervolgens c zodanig dat $\frac{G(t)}{t} \geq a$ voor alle $t > c$. Om uniform integreerbaarheid van $\mathcal{C}$ te bewijzen gebruik je nu dat $|X| \leq \frac{G(|X|)}{a}$ op de verzameling $\{|X| \geq c\}$.
   Dat de eis voldoende is, is minder eenvoudig. Loop de volgende stappen af. Veronderstel dat we een niet-dalend rijtje (g_n) tot onze beschikking hebben met $g_0 = 0$ en $\lim_{n\to\infty} g_n = \infty$. Definieer nu $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[n,n+1)}(t)g_n$ en $G(t) = \int_0^t g(s)ds$. Ga na dat $\lim_{t\to\infty} \frac{G(t)}{t} = \infty$.
   Definieer nu $a_n(X) = \mathbb{P}(|X| > n)$, dan geldt $\mathbb{E}G(|X|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} g_n a_n(|X|)$. Verder geldt voor elke $k \in \mathbb{N}$ dat$\int_{|X|\geq k} |X|\, d\mathbb{P} \geq \sum_{m=k}^{\infty} a_m(X)$. Kies nu voor elke n een constante $c_n \in \mathbb{N}$ zodat $\int_{|X|\geq c_n} |X|\, d\mathbb{P} \leq 2^{-n}$. Dan geldt $\sum_{m=c_n}^{\infty} a_m(X) \leq 2^{-n}$ en dus $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=c_n}^{\infty} a_m(X) \leq 1$. Kies nu de rij (g_n) als de 'inverse' van de rij (c_n), d.w.z. $g_n = \#\{k : c_k \leq n\}$. Knoop tot slot alle stappen aan elkaar.

4. Bewijs nu ook: een collectie $\mathcal{C}$ is uniform integreerbaar als en alleen als er een *stijgende en convexe* functie $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ met de eigenschap $\lim_{t\to\infty} \frac{G(t)}{t} = \infty$ bestaat, zodanig dat $M := \sup\{G(|X|) : X \in \mathcal{C}\} < \infty$.
   Zij nu $\mathcal{D}$ de afsluiting van het convexe omhulsel van een uniform integreerbare collectie $\mathcal{C}$ in $\mathcal{L}^1$. Dan geldt voor de hierboven bedoelde functie G dat $\sup\{G(|X|) : X \in \mathcal{D}\} = M$, waaruit volgt dat ook $\mathcal{D}$ uniform integreerbaar is.

5. Zij $p \geq 1$ en $X, X_1, X_2, \ldots$ stochastische variabelen. Dan convergeert X_n naar X in $\mathcal{L}^p$ als en alleen als voldaan is aan de twee volgende beweringen:

   (a) $X_n \to X$ in kans,

(b) De familie $\{|X_n|^p : n \in \mathbb{N}\}$ is uniform integreerbaar.

6. Zij $(X_n)_{n\geq 0}$ een bij een filtratie $\mathbb{F}$ passend process. Zij $a < b$ en definieer $S_1 = \inf\{n \geq 0 : X_n < a\}$, $T_1 = \inf\{n \geq T_1 : X_n > b\}$, $S_2 = \inf\{n > T_1 : X_n < a\}$, etc. Laat zien dat de S_k en de T_k $\mathbb{F}$-stoptijden zijn.

7. Laat zien dat voor een supermartingaal X de conditie $\sup\{\mathbb{E}|X_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ equivalent is met de conditie $\sup\{\mathbb{E}X_n^- : n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

8. Zij (X_n) een positieve supermartingaal m.b.t. een filtratie $(\mathcal{F}_n)$. Laat zien dat er een X_∞ bestaat zodat $\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n] \leq X_n$ a.s. voor alle n.

9. Beschouw de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ met $\Omega = [0,1)$, $\mathcal{F}$ de Borel verzamelingen van $[0,1)$ en P de Lebesgue maat. Zij $I^n = [0, 2^{-n})$ voor $k = 0, \ldots, 2^n - 1$ en $\mathcal{F}_n$ de σ-algebra voort gebracht door de I^k met $k \leq n$. Definieer $X_n = 1_{I^n} 2^n$. Laat zien dat X_n een martingaal is en dat aan de voorwaarden van stelling 11.5 voldaan is. Wat is X_∞ hier? Geldt $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X_\infty$? (Deze vraag slaat op 11.6).

Week 2

1. Geef het bewijs van stelling 14.1 uit Williams voor supermartingalen.

2. Laat zien: als $Y \in \mathcal{L}^p$ en als voor iedere $c \in \mathbb{R}$ geldt $c\mathbb{P}(X \geq c) \leq \mathbb{E}1_{X \geq c}Y$, dan ook $X \in \mathcal{L}^p$.

3. Als (a_n) een rij getallen is in $(0,1)$, dan geldt $\prod a_n > 0 \Leftrightarrow \sum(1-a_n) < \infty$.

4. Bewijs het lemma van Hunt:

   Zij (X_n) een rij stochastische variabelen met eindige bijna zekere limiet X. Veronderstel dat er een stochastische variabele $Y \geq 0$ met $\mathbb{E}Y < \infty$ is zodanig dat voor alle n en ω geldt dat $X_n(\omega) \leq Y(\omega)$. Zij voorts $(\mathcal{F}_n)$ een willekeurige filtratie. Dan geldt

   $$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n] \stackrel{a.s.}{\to} \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty].$$

   Aanwijzing: Zij $Z_m = \sup_{k \geq m} |X_k - X|$. Laat zien dat Z_m zowel bijna zeker als in $\mathcal{L}^1$ naar 0 convergeert. Toon de volgende ongelijkheid aan voor $n \geq m$:

   $$|\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty]| \leq |\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty]| + |\mathbb{E}[Z_m|\mathcal{F}_n]|$$

   Voltooi nu het bewijs.

5. Zij M een martingaal met $M_0 = 0$ en veronderstel dat er een rij van constanten c_k bestaat met voor alle k de begrenzing $|M_k - M_{k-1}| \leq c_k$. Zij $x > 0$. De Azuma-Hoeffding (twee verschillende personen) ongelijkheid is

   $$\mathbb{P}(\sup_{k \leq n} M_k \geq x) \leq \exp(-\frac{x^2}{2\sum_{i=1}^n c_k^2}).$$

   Bewijs deze ongelijkheid aan de hand van de volgende twee stappen.

   (a) Zij $c > 0$ en Y een stochastische variabele met $\mathbb{P}(|Y| \leq c) = 1$ en $\mathbb{E}Y = 0$. Zij $f(y) = e^{\theta y}$. Omdat f convex is geldt voor $y \in [-c, c]$ dat

   $$f(y) \leq \frac{c-y}{2c} f(-c) + \frac{c+y}{2c} f(c).$$

   Leid nu af dat geldt $\mathbb{E}f(Y) \leq \cosh \theta c \leq \exp(\frac{1}{2}\theta^2 c^2)$.

   (b) Pas de submartingaalongelijkheid van Doob (Williams theorem 14.6) toe op $Z_n = \exp(\theta M_n)$.

6. Bewijs de dichotomie van Kakutani:

   Zij $X_1, X_2, \ldots$ meetbare functies op een meetbare ruimte $(\Omega, \mathcal{F})$ met waarden in $\mathbb{R}$. Laten P en Q kansmaten op $(\Omega, \mathcal{F})$ zijn, zó dat onder zowel P als Q de rij onafhankelijk is en gelijk verdeeld. Veronderstel dat de X_i een strikt positive dichtheid f onder P hebben en een strikt positieve dichtheid g onder Q. Laat zien dat P en Q ofwel samenvallen, ofwel orthogonaal zijn. Ga hiertoe als volgt te werk.

(a) Als $Z_1, Z_2, \ldots$ positieve stochasten op een kansruimte met verwachting 1 zijn, dan is M met $M_n = \prod_{i=1}^n Z_i$ een niet-negatieve martingaal. Dus bestaat M_∞ als b.z. limiet van de M_n.

(b) $\mathbb{E}M_{=}\infty = 1$ a.e.a.a. M uniform integreerbaar is.

(c) Als $\prod_{n=1}^\infty \mathbb{E}Z_n^{1/2} > 0$, dan is M uniform integreerbaar.

(d) Pas het voortgaande nu toe op $Z_n = \frac{f(X_n)}{g(X_n)}$.

Week 3

1. Zij $X = (X_n)_{n \leq 0}$ een (achterwaartse) supermartingaal in discrete tijd.

   (a) Laat zien dat de volgende eigenschappen equivalent zijn: $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$ en $\lim_{n \to -\infty} \mathbb{E}X_n < \infty$. (Gebruik dat $x \mapsto x^-$ convex en dalend is.)

   (b) Onder de conditie $\sup_n \mathbb{E}|X_n| =: A < \infty$ is X uniform integreerbaar. Om dit te bewijzen gaan we als volgt te werk. Zij $\varepsilon > 0$ en kies $K \in \mathbb{Z}$ zó dat voor alle $n < K$ geldt $0 \leq \mathbb{E}X_n - \mathbb{E}X_K < \varepsilon$. We hoeven alleen aan te tonen dat $(X_n)_{n \leq K}$ uniform integreerbaar is. Zij $c > 0$ willekeurig en zij $F_n = \{|X_n| > c\}$. Laat nu m.b.v. de supermartingaal ongeljkheid zien dat geldt

   $$\int_{F_n} |X_n| \, d\mathbb{P} \leq \int_{F_n} |X_K| \, d\mathbb{P} + \varepsilon.$$

   Omdat $\mathbb{P}(F_n) \leq \frac{A}{c}$ kunnen we het gestelde concluderen.

2. Zij X een bij een filtratie $\mathbb{F}$ passend proces in discrete tijd. Bewijs de Doob decompositie: Er bestaat een voorspelbaar proces A (d.w.z. voor alle k is A_k een $\mathcal{F}_{k-1}$-meetbare stochast) met $A_0 = 0$ en een martingaal M zodanig dat $X = A + M$. Bovendien is onder de conditie $A_0 = 0$ de decompositie $X = A + M$ uniek. Is X een submartingaal, dan is A b.z. stijgend.

3. Zij $X = (X_n)_{n \leq 0}$ een (achterwaartse) supermartingaal in discrete tijd en veronderstel dat $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$. Laat m.b.v. de Doob decompositie van X en de achterwaartse convergentiestelling voor martingalen (Williams 14.4) zien dat X_n b.z. en in $\mathcal{L}_1$ convergeert naar een integreerbare limiet l. Bovendien geldt dat $X_n \leq \mathbb{E}[l|\mathcal{F}_n]$.

4. Zij $\mathbb{F} = (\mathcal{F})_{t \geq 0}$ een filtratie in continue tijd en $\mathbb{F}_+$ zijn rechtscontinue versie. Laat zien dat een afbeelding $T : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ een $\mathbb{F}_+$-stoptijd is a.e.a.a. voor alle $t \geq 0$ geldt dat $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$. Concludeer dat voor een rechtscontinue filtratie geldt dat T een stoptijd is a.e.a.a. voor alle $t \geq 0$ geldt dat $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.

5. Zij X een bij een filtratie $\mathbb{F}$ passende supermartingaal in continue tijd en D een aftelbare dichte deelverzameling van $[0, \infty]$. Laat zien dat X_+ bij $\mathbb{F}_+$ past. ($X_+ = (X_{t+})_{t \geq 0}$ en $X_{t+} = \lim_{s \downarrow \downarrow t, s \in D} X_s$.)

6. Zij T een stoptijd. Laat zien dat $\mathcal{F}_T$ een σ-algebra is en dat T $\mathcal{F}_T$-meetbaar is. Is T deterministisch, zeg $T = t_0$ voor een of andere $t_0 > 0$, dan is $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{t_0}$.

Week 4

1. (a) Zij S een stoptijd. Laat zien dat S meetbaar is t.ov. $\mathcal{F}_S$ en dat $S \wedge t$ meetbaar is t.o.v. $\mathcal{F}_t$.

   (b) Zij S en T twee stoptijden. Laat zien dat voor elke $A \in \mathcal{F}_S$ geldt dat $A \bigcap \{S \leq T\}$ tot $\mathcal{F}_T$ behoort. (*Aanwijzing:* verifieer dat geldt $\{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\}$.)

   (c) Beschouw twee stoptijden S en T met $S \leq T$. Laat zien dat $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

2. Zij X een supermartingale in discrete tijd en T een begrensde stoptijd. Bewijs dat geldt
$$\mathbb{E}X_0 \geq \mathbb{E}X_T \geq \mathbb{E}X_k$$
en dat geldt
$$\mathbb{E}|X_T| \leq \mathbb{E}X_0 + 2\mathbb{E}X_k^- .$$

3. Bewijs theorem VI.12 uit DM (pagina 75).

4. Zij W een standaard Brownse beweging en $\sigma > 0$. Laat de processen X en Z gedefinieerd zijn door $X_t = \sigma W_t^2 - \sigma^2 t$ en $Z_t = \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$. Laat zien dat zowel X als Z martingalen zijn. Laat zien dat Z bijna zeker naar 0 convergeert. Vindt de convergentie ook in L^1 plaats?

5. Zij T een stoptijd en $A \subset \Omega$. Laat $T_A = T1_A + \infty 1_{A^c}$. Dan geldt dat $A \in \mathcal{F}_T$ a.e.a.a. $A \in \mathcal{F}_\infty$ en T_A een stoptijd is.

6. Als S en T twee stoptijden zijn, dan is $\mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{S \wedge T}$. Toon dit aan.

7. Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ een kansruimte en X_1, X_2, X_3 op deze kansruimte gedefinieerde onafhankelijke en gelijk verdeelde stochasten met verwachting nul. Zij voorts $\mathcal{G} = \sigma\{X_1, X_2\}$ en $\mathcal{H} = \sigma\{X_2, X_3\}$ en $X = X_1 + X_2 + X_3$. Laat zien dat $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]|\mathcal{G}] = \frac{1}{2}(X_2 + X_3)$ en $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{F}] = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ (waardoor de voorwaardelijke verwachtingen gegeven $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ niet commuteren).

Week 5

1. Zij X een rechtscontinue niet-negatieve supermartingaal. Zij $T = \inf\{t > 0 : X_t = 0 \text{ of } X_{t-} = 0\}$. Dan is voor bijna alle ω de afbeelding $\omega \mapsto X_t(\omega)$ gelijk aan nul op het interval $[T(\omega), \infty)$. *Aanwijzing:* Sluit X af met $X_\infty = 0$ en definieer $T_n = \inf\{t > 0 : X_t \leq 1/n\}$. Voor elke stoptijd S met $S > T_n$ geldt $\mathbb{E}X_S \leq \mathbb{E}X_{T_n} \leq 1/n$. Kijk nu naar $S = T + q$ met q een willekeurig positief rationaal getal.

2. Bewijs de volgende beweringen.

   (a) Een rechtscontinue positieve submartingaal behoort tot klasse DL. *Aanwijzing:* Als T een door a begrensde stoptijd is geldt $\mathbb{E}1_{X_T > k} X_T \leq \mathbb{E}1_{X_T > k} X_a$ en $\mathbb{P}(X_T > k) \leq \mathbb{E}X_a / k$.

   (b) Een submartingaal X die geschreven kan worden als $X = A + M$ met M een martingaal en A een stijgend proces met $A_0 = 0$ behoort tot klasse DL. *Aanwijzing:* Het is voldoende om aan te tonen dat M in klasse DL zit. Gebruik daartoe $M_T = \mathbb{E}[M_a | T]$ als T een door a begrensde stoptijd is.

   (c) Een uniform integreerbare martingaal behoort tot klasse D.

3. Bepaal de Doob-Meyer ontbinding van het proces X in elk van de volgende gevallen.

   (a) X is een (homogeen) Poisson proces met intensiteit λ.

   (b) $X = W^2$ als W een standaard Brownse beweging is.

4. Zij T een stoptijd met waarden in een aftelbare verzameling D en X een integreerbare stochastische variabele. Laat zien dat voor elke $t \in D$ geldt dat op de gebeurtenis $\{T = t\}$ de voorwaardelijke verwachtingen $E[X|\mathcal{F}_T]$ en $E[X|\mathcal{F}_t]$ b.z. samenvallen.

5. Zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ een kansruimte en zij $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een hierop gedefinieerde rij stochasten die zwak in L_1 convergeert naar Z. Zij $\mathcal{G}$ een deel-σ-algebra van $\mathcal{F}$ en voor iedere n $\hat{Z}_n = \mathbb{E}[Z_n|\mathcal{G}]$ en voorts $\hat{Z} = \mathbb{E}[Z|\mathcal{G}]$. Laat zien dat $\hat{Z}_n$ zwak in L_1 naar $\hat{Z}$ convergeert.

Week 6

1.

Week 7

1.

Week 8

1.

Week 9

1.

Week 10

1.