Wiskundige Statistiek 1999-2000

weekprogramma en aanvullende opgaven

P.J.C. Spreij

Weekprogramma

Week 1	Hoorcollege: herhaling kansrekening, hoofdstukken 1 en 2 van de syllabus. Huiswerk: opgaven 1.3, 1.4, 2.1, 2.2. Werkcollege: opgaven 1.1, 1.2, en aanvullende opgaven week 1: 1, 2, 4, 5.
Week 2	Hoorcollege: stochastische variabelen en enkele kansverdelingen, syllabus hoofdstuk 3 tot definitie 3.2. Huiswerk: opgaven 3.1, 3.2, 3.3 Werkcollege: aanvullende opgaven week 2: 1 t/m 6.
Week 3	Hoorcollege: simultane verdelingen en onafhankelijkheid, syllabus tot en met eind van hoofdstuk 3. Huiswerk: aanvullende opgaven week 3: 1, 2, 3, 4. Werkcollege: aanvullende opgaven week 3: 5, 6, 7, 8.
Week 4	Hoorcollege: verwachting en variantie, syllabus tot en met voorbeeld 4.11. Huiswerk: opgaven 4.1 en 4.2 en aanvullende opgaven week 4: 1, 2. Werkcollege: opgave 4.3 en aanvullende opgaven week 4: 3 t/m 8.
Week 5	Hoorcollege: covariantie en begin schattingstheorie, syllabus tot en met stelling 6.1. Huiswerk: opgave 6.1, aanvullende opgaven week 5: 1, 3, 4, 6. Werkcollege: opgave 6.2 en aanvullende opgaven week 5: 2, 5, 7, 8.
Week 6	Hoorcollege: Cramér-Rao ongelijkheid en meest aannemelijke schatters, syllabus tot en met eind hoofdstuk 6. Huiswerk: opgaven 6.3 en 6.4. Werkcollege: aanvullende opgaven week 6: 1, 2, 3, 6.
Week 7	Hoorcollege: inleiding toetsingstheorie, hypothesen, fouten van eerste en tweede soort, optimaliteit, syllabus tot stelling 7.1. Huiswerk: opgave 7.1, aanvullende opgaven week 7: 2, 3. Werkcollege: aanvullende opgaven week 6: 4, 5 en van week 7: 1, 4.
Week 8	Hoorcollege: de Neyman-Pearson lemma's, syllabus tot en met einde hoofdstuk 7. Huiswerk: opgaven 7.2, 7.3 en 7.4. Werkcollege: aanvullende opgaven week 8: 1, 2, 3, 4, 5.
Week 9	Hoorcollege: betrouwbaarheidsintervallen, syllabus hoofdstuk 8. Huiswerk: opgaven 8.1, 8.2. Werkcollege: aanvullende opgaven week 9: 1, 2, 3, 4, 5.

Aanvullende opgaven

Week 1

1. (a) Laat zien dat de beweringen (1.10) en (1.11) uit definitie 1.1 volgen.
   (b) Laat zien dat de beweringen (1.12) en (1.13) uit definitie 1.1 volgen.
   (c) Laat zien dat (1.14) uit (1.13) volgt, evenals (1.15) en (1.16).
   (d) Laat zien dat (1.17) uit (1.13) volgt.
   (e) Laat zien dat (1.18) uit (1.9) volgt en (1.19) uit (1.18).

2. Zij Ω een eindige verzameling en $\mathcal{A}$ de machtsverzameling van Ω. Definieer $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ door $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. Dan is $\mathbb{P}$ een kansmaat op $\mathcal{A}$.

3. Beschrijf voor elk van de onderdelen van voorbeeld 1.4 de uitkomstenruimte Ω.

4. Beschouw een regelmatig viervlak (driezijdige pyramide met grondvlak) met op een vlak het cijfer 1, op een tweede vlak het cijfer 2, op een derde vlak het cijfer 3 en op het overgebeleven vlak alle drie de cijfers 1, 2 en 3. Beschouw dit viervlak als een zuivere dobbelsteen en zij A_i de uitkomst dat na een worp het cijfer i op de onderkant voorkomt. Geef een uitkomstenruimte van 4 elementen bij dit experiment en laat zien dat de gebeurtenissen A_1, A_2 en A_3 paarsgewijs onafhankelijk zijn, maar niet onderling onafhankelijk.

5. Beschouw het volgende experiment. We gooien met een dobbelsteen net zolang tot we voor de eerste keer 6 gooien en noteren het benodigde aantal worpen. Neem aan dat alle zijden van de dobbelsteen even waarschijnlijk zijn om boven te komen en dat alle worpen elkaar niet beïnvloeden.

   (a) Beschrijf een kansruimte voor dit experiment.
   (b) Bereken $\mathbb{P}(B_m)$ als B_m de gebeurtenis voorstelt dat men ten hoogste m keer moet gooien.
   (c) Bereken $\mathbb{P}(\cup_{m=1}^{\infty} B_m)$.
   (d) Zij C_m de gebeurtenis dat men precies m keer moet gooien. Wat is $\mathbb{P}(C_m)$?
   (e) Wat stelt de gebeurtenis $\cup_{m=1}^{\infty} C_m$ voor? Met welke kans treedt deze op?

Week 2

1. Zij F de verdelingsfunctie van een stochastische grootheid X. Laat (m.b.v. (1.19)) zien dat F rechtscontinu is. Zij $x \in \mathbb{R}$ en zij $F(x-) = \lim_{y \uparrow x} F(y)$ en $\Delta F(x) = F(x) - F(x-)$. Welke kans stelt $\Delta F(x)$ voor? Concludeer dat X met kans 0 in een aftelbare of eindige verzameling terecht komt als X continu verdeeld is.

2. Gegeven is de functie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gedefinieerd is door

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < -1 \\ 1/4 & \text{als } -1 \le x < 0 \\ 1/2 & \text{als } 0 \le x < 4 \\ (x^2 - 8x + 32)/32 & \text{als } 4 \le x < 8 \\ 1 & \text{als } x \ge 8 \end{cases}$$

   (a) Ga na dat F een verdelingsfunctie is.

   (b) Xij X een stochast met verdelingsfunctie F. Bepaal de kansen $\mathbb{P}(X \ge 3)$, $\mathbb{P}(X \le 6)$, $\mathbb{P}(X \le 4)$, $\mathbb{P}(X < 4)$, $\mathbb{P}(X \ge 0)$, $\mathbb{P}(X = 0)$.

3. Zij Y normaal $N(3, 4)$ verdeeld. Druk de volgende kansen uit in de verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling: $\mathbb{P}(Y \le 5)$ en $\mathbb{P}(|Y| > 6)$.

4. Veronderstel dat X een strikt stijgende verdelingsfunctie F heeft en zij $Y = -\log F(X)$. Bepaal de verdelingsfunctie van Y. Wat heeft Y voor verdeling?

5. Zij X_n een stochast met een $\text{bin}(n, p)$ verdeling. Zij Y negatief binomiaal verdeeld met parameters k en p. Druk de kans $\mathbb{P}(Y > n)$ uit in de verdelingsfunctie van X_n. Bereken deze kans voor $k = 1$.

6. Zij X standaard normaal verdeeld. Bepaal de dichtheid van $Y = X^2$. Door te vergelijken met (3.18) zien we dat Y een gamma verdeling heeft met niet-gehele n, namelijk $n = \frac{1}{2}$. Bepaal $\Gamma(\frac{1}{2})$.

7. Zij X standaard normaal verdeeld. Welke bekende verdeling heeft $Y = \frac{1}{2}X^2$?

Week 3

1. Laat zien dat (3.34) en (3.32) equivalent zijn als $(X_1, \ldots, X_k)$ continu verdeeld is.

2. Als de stochastische grootheid X standaard normaal verdeeld is, dan heeft $Y = \mu + \sigma X$ een $N(\mu, \sigma^2)$ verdeling. Omgekeerd, als Y een $N(\mu, \sigma^2)$ verdeling heeft, is $X = \frac{Y-\mu}{\sigma}$ standaard normaal verdeeld.

3. Zij $X = (X_1, \ldots, X_k)$ $\text{mult}(n, p_1, \ldots, p_k)$ verdeeld, dus met de kansverdeling gegeven in (3.28). Laat zien dat hieruit volgt dat elke X_i $(i = 1, \ldots, k)$ $\text{bin}(n, p_i)$ verdeeld is. Zij $m < k$, $Y_i = X_i$ als $i < m$, $Y_m = X_m + \cdots + X_k$ en $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$. Wat is de verdeling van Y? (Antwoord zonder argumentatie volstaat.)

4. Als X een stochastische grootheid (of k-vector) is, dan is de functie $\mathbb{P}_X$ gegeven door (3.2) een kansmaat op $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ (of op $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k)$). Laat dit zien.

5. Bewijs formule (3.41) met een combinatorisch argument.

6. Gegeven is de verzameling $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$ en de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x, y) = c \cdot e^{-2x-3y} 1_A(x, y)$.
   (a) Bepaal c zó dat f een dichtheid is van een stochastische vector (X, Y).
   (b) Bereken $\mathbb{P}(X \leq 1, Y \leq 1)$ en $\mathbb{P}(X < 1)$.
   (c) Bepaal de marginale dichtheid van X en daarmee (nogmaals) $\mathbb{P}(X < 1)$.
7. Gegeven zijn onafhankelijke stochasten $X_1, \ldots, X_n$ met alle een $\exp(\lambda)$ verdeling. Zij $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Laat zien dat Y een Gamma verdeling heeft en geef ook de hierbij behorende parameters.
8. Veronderstel dat X_1 en X_2 onafhankelijke stochastische variabelen zijn en dat elke X_i Poisson verdeeld is met parameter λ_i. Laat zien dat $Y = X_1 + X_2$ een Poisson verdeling met parameter $\lambda_1 + \lambda_2$ heeft. Is $X_1 - X_2$ nu Poisson verdeeld? Zo ja, met welke parameter?
9. Zij (X, Y) een twee-dimensionale stochastische vector met kansdichtheid
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} & \text{als } xy > 0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$
   Laat zien dat zowel X als Y standaard normaal verdeeld zijn.
10. Onderstel dat X en Y de volgende simultane dichtheid op $\mathbb{R}^2$ hebben.
$$f(x, y) = c \cdot e^{-(1+x^2)(1+y^2)},$$
   waarbij c natuurlijk zo gekozen is dat de integraal van f gelijk is aan 1. Laat zien dat $c\sqrt{\frac{\pi}{1+x^2}} e^{-(1+x^2)}$ de marginale dichtheid van X voorstelt.

Week 4

1. Bewijs uitspraken A, B en C van stelling 4.1.
2. Laat zien dat $\mathbb{E}X^2 = \frac{n(n+1)}{\lambda^2}$ als X een $\Gamma(n, \lambda)$ verdeling heeft (zie voorbeeld 4.7). Wat is nu de variantie van X?
3. (a) Zij X diskreet verdeeld met $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{2}{5}$ en $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{5}$. Bepaal $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}|X|$ en $\operatorname{Var} X$.
   (b) Zij $Y = |X|$. Geef de kansverdeling van Y en bepaal hiermee $\mathbb{E}Y$. Vergelijk uw antwoord met $\mathbb{E}|X|$ uit het vorige onderdeel.
4. Zij X homogeen verdeeld op het interval (a, b). Bepaal $\operatorname{Var} X$.
5. Zij (X, Y) een stochastische 2-vector en S een eindige verzameling met $\mathbb{P}((X, Y) \in S) = 1$ en zij f een (reëelwaardige) functie op $\mathbb{R}$ en $Z = f(X)$. Laat zien dat uit de definitie van $\mathbb{E}Y$ volgt dat
$$\mathbb{E}Z = \sum_{(x,y) \in S} f(x) \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

6. Zij X uniform verdeeld op $(0,1)$ en Y uniform verdeeld op $(-1,0)$ en X en Y onafhankelijk. Zij $Z = X + Y$. Laat zien dat Z dichtheid f heeft gegeven door

$$f(z) = \begin{cases} 1+z & \text{als } z \in (-1,0] \\ 1-z & \text{als } z \in (0,1) \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

   Bepaal $\mathbb{E}Z$.

7. Zij X absoluut continu verdeeld met dichtheid f en veronderstel dat voor zekere $m \in \mathbb{R}$ geldt dat $f(m-x) = f(m+x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Veronderstel dat $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < \infty$. Laat zien dat $\mathbb{E}X = m$.

8. Zij X een stochastische variabele. Toon aan: Er bestaat $a \in \mathbb{R}$ met $\mathbb{P}(X = a) = 1$ als en alleen als $\operatorname{Var} X = 0$.

Week 5

1. Zij X het aantal rode knikkers bij een aselekte ongeordende steekproef ter grootte n uit een vaas bestaande uit r rode knikkers en $N-r$ pimpelpaarse. Zij $p = \frac{r}{N}$.

   (a) Laat zien dat $\operatorname{Var} X = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$. *Aanwijzing*: schrijf $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ en gebruik stelling 4.5.

   (b) Voor $N >> n$ is $\operatorname{Var} X$ ongeveer gelijk aan $np(1-p)$. Geef hiervoor een intuïtieve verklaring, alsmede voor het feit dat $\operatorname{Var} X = 0$ als $N = n$.

2. Zij X een stochastische variabele met $\mathbb{P}(X \in \mathbb{N}) = 1$. Laat zien dat $\mathbb{E}X = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$.

3. Als X en Y onafhankelijk zijn, X met een $N(\mu, \sigma^2)$ verdeling en Y met een $N(\nu, \tau^2)$ verdeling, wat is dan $\operatorname{Var}(X - 3Y)$? Wat is de verdeling van $X - 3Y$?

4. Twee stochastische variabelen heten ongecorreleerd als hun covariantie nul is. Gegeven zijn twee stochastische variabelen X en Y en dat Y niet gedegenereerd is. Voor welke waarde van c zijn de stochasten $X - cY$ en Y ongecorreleerd?

5. Veronderstel dat voor twee stochasten X en Y de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz een gelijkheid is in de zin dat $\operatorname{Cov}(X,Y) = \sigma(X)\sigma(Y)$. Laat zien dat er constanten $a > 0$ en $b \in \mathbb{R}$ bestaan zodanig dat $P(Y = aX + b) = 1$.

6. Beschouw de stochastische 2-vector (X,Y) met kansverdeling gegeven door $\mathbb{P}((X,Y) = (-4,1)) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}((X,Y) = (8,1)) = \frac{1}{4}$ en $\mathbb{P}((X,Y) = (2,0)) = \frac{1}{2}$. Bepaal $\operatorname{Cov}(X,Y)$. Zijn X en Y onfhankelijk?

7. Zij (X,Y) een stochastische 2-vector die absoluut continu verdeeld is met dichtheid
$$f(x,y) = \begin{cases} 2\exp(-x-y) & \text{als } 0 < x < y \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

   (a) Zijn X en Y onafhankelijk?

   (b) Bepaal $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

   (c) Bepaal $\mathrm{Var}\,(3X-2Y)$.

8. Zij $X_1,\ldots,X_n$ een aselekte steekproef uit een homogene verdeling op $(-\theta,\theta)$ met $\theta > 0$. Zij $M_n = \max\{X_1,\ldots,X_n\}$. Laat zien dat M_n dichtheid $f(x) = \frac{n(x+\theta)^{n-1}}{(2\theta)^n}$ op $(-\theta,\theta)$ heeft. Bepaal een constante c_n zó dat $c_n M_n$ een zuivere schatter is van θ. Bepaal ook $\lim_{n\to\infty} c_n$.

Week 6

1. Zij $X_1,\ldots,X_n$ een aselekte steekproef uit een poisson(μ) verdeling met $\mu \geq 0$.

   (a) Bepaal de Fisher informatie over μ in één waarneming.

   (b) Bepaal de meest aannemelijke schatter van μ.

   (c) Vind de UMVZ schatter van μ.

   (d) Vind ook een zuivere schatter van μ^2.

2. Zij $X_1,\ldots,X_n$ een aselekte steekproef uit een $N(0,\sigma^2)$ verdeling met $\sigma^2 > 0$.

   (a) Bepaal de Fisher informatie over σ^2 in één waarneming.

   (b) Bepaal de meest aannemelijke schatter van σ^2.

   (c) Vind de UMVZ schatter van σ^2.

3. Zij $X_1,\ldots,X_n$ een aselekte steekproef $(n > 1)$ uit een exponentiële verdeling met parameter λ.

   (a) Zij $\mu = \psi(\lambda) = \mathbb{E}_\lambda X_1$. Druk μ in λ uit.

   (b) Vind de meest aannemelijke schatters van λ en μ.

   (c) Wat is de Cramér-Rao ondergrens uitgedrukt in λ voor de variantie van een zuivere schatter van μ? Wat is dus de UMVZ schatter van μ?

   (d) Bepaal de verwachting van de meest aannemelijke schatter $\hat{\lambda}$ van λ (*aanwijzing:* $\sum_{i=1}^n X_i$ heeft een gamma verdeling). Vind nu c zó dat $c\,\hat{\lambda}$ een zuivere schatter is van λ en bepaal zijn variantie.

4. Zij $X_1,\ldots,X_n$ een steekproef uit de homogene verdeling op $[0,\theta]$ met $\theta > 0$.

(a) Zij $\hat{\theta}$ de meest aannemelijke schatter van θ. Bepaal c zó dat $\tilde{\theta} = c\hat{\theta}$ een zuivere schatter is van θ. Bepaal ook de variantie van $\tilde{\theta}$.

(b) Een lineaire schatter van θ is per definitie een schatter van de vorm $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$. Onder welke conditie op de c_i is een lineaire schatter een zuivere schatter van θ? Vind onder de zuivere lineaire schatters van θ degene met de kleinste variantie. Noem deze θ^*.

(c) Welke van de schatters θ^* en $\tilde{\theta}$ geniet de voorkeur?

5. Laat $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijke stochastische variabelen zijn, alle *over μ verschoven* exponentieel verdeeld, d.w.z. dat alle een dichtheid f_μ hebben gegeven door

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \exp(-(x-\mu)) & \text{als } x > \mu \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) Herschrijf de dichtheid f_μ met behulp van een indicatorfunctie.

(b) Bepaal de meest aannemelijke schatter van μ.

(c) Bereken voor deze schatter verwachting en variantie.

6. Veronderstel dat X een discrete verdeling heeft, afhankelijk van een parameter $\theta \in \Theta$, die zo is dat er een eindige verzameling S bestaat zodanig dat voor alle $\theta \in \Theta$ geldt dat $\mathbb{P}_\theta(X \in S) = 1$. Definieer nu $\ddot{l}_\theta(x) = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l_\theta(x)$, met $l_\theta(x) = \log \mathbb{P}_\theta(X = x)$. Laat zien dat $\mathbb{E}_\theta\, \ddot{l}_\theta(X)$ gelijk is aan $-I(\theta)$, waarbij $I(\theta)$ de Fisher informatie in één waarneming voorstelt.

Week 7

1. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit de homogene verdeling op $[0, \theta]$ met $\theta \in \Theta = (0, \infty)$. Beschouw het toetsingsprobleem $H_0 : \theta \leq 1$ tegen $H_1 : \theta > 1$ bij $\alpha_0 = 0.01$. Zij $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ de toetsingsgrootheid en $K = (c, \infty)$ het kritieke gebied. Bepaal c zó dat de onbetrouwbaarheid van de toets precies α_0 is. Bepaal tevens het onderscheidingsvermogen. Voor welke θ is het onderscheidingsvermogen gelijk aan 1?

2. Zij $X_1, \ldots, X_{25}$ een steekproef uit een $N(\theta, 1)$ verdeling. Beschouw het toetsingsprobleem $H_0 : \theta = 2$ tegen $H_1 : \theta > 2$.

(a) Wat is (bij een gegeven waarde van θ) de verdeling van $\overline{X}$?

(b) Zij $K = [c, \infty)$ voor zekere $c \in \mathbb{R}$. Bepaal de onbetrouwbaarheid van de toets die H_0 verwerpt als $\overline{X} \in K$ in termen van c. Voor welke waarde van c is de onbetrouwbaarheid kleiner dan $\frac{1}{2}$?

(c) Zij nu $K' = (-\infty, 4-c]$ en beschouw tevens de toets die H_0 verwerpt als $\overline{X} \in K'$. Laat zien dat deze toets dezelfde onbetrouwbaarheid heeft als de vorige.

(d) Bepaal voor beide toetsen het onderscheidend vermogen en laat zien dat dit voor de eerste toets voor elke $\theta > 2$ hoger is dan voor de tweede ongeacht de waarde van c. Aan welke toets voor het gegeven toetsingsprobleem geeft u de voorkeur?

3. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een alternatieve verdeling met parameter p. Beschouw het toetsingsprobleem $H_0 : p \leq \frac{1}{2}$ tegen $H_1 : p > \frac{1}{2}$ bij de onbetrouwaarheidsdrempel $\alpha_0 = 0.05$. Zij $X = X_1 + \cdots + X_n$ de toetsingsgrootheid.

   (a) Neem $n = 6$. Bepaal alle (drie in dit geval) niet-lege kritieke gebieden die onderscheidingsvermogen kleiner dan of gelijk aan α_0 in $p = \frac{1}{2}$ hebben.

   (b) Bepaal welk van deze drie onbetrouwbaarheid kleiner dan gelijk aan α_0 heeft.

   (c) Verander nu H_0 in $H_0 : p = \frac{1}{2}$ en neem $n = 5$. Welke twee niet-lege kritieke gebieden hebben onbetrouwbaarheid kleiner dan α_0? Bepaal in beide gevallen het onderscheidend vermogen. Welk kritiek gebied zou u voor het onderhavige toetsingsprobleem gebruiken?

4. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een Poisson(μ) verdeling. Beschouw het toetsingsprobleem $H_0 : \mu \leq \mu_0$ tegen $H_1 : \mu > \mu_0$ bij onbetrouwbaarheidsdrempel α_0. Zij $T = \sum_{i=1}^n X_i$ de toetsingsgrootheid.

   (a) Zij X een stochastische variabele met een Poisson(μ) verdeling en Y een van X onafhankelijke stochastische variabele met een Poisson(ν) verdeling. Zij k een geheel getal. Gebruik de triviale ongelijkheid $\mathbb{P}(X > k) < \mathbb{P}(X + Y > k)$ om te bewijzen dat de functie $\mu \mapsto \mathbb{P}_\mu(X_1 > k)$ stijgend is.

   (b) Zij K het kritieke gebied van de toets van de vorm $K = (k, \infty)$. Laat zien dat K onbetrouwbaarheid kleiner dan of gelijk aan α_0 heeft als en alleen als $\mathbb{P}_{n\mu_0}(X_1 > k) \leq \alpha_0$.

   (c) Bepaal een geheel getal k_0 zo dat de toets met kritieke gebied (k_0, ∞) uniform meest onderscheidend is onder de toetsen met kritieke gebied van de vorm (k, ∞).

Week 8

1. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een $\Gamma(\theta, 1)$ verdeling met $\theta \in \Theta = (0, \infty)$. Beschouw het toetsingsprobleem $H_0 : \theta \geq \theta_0$ tegen $H_1 : \theta < \theta_0$ bij zekere onbetrouwbaarheidsdrempel. Laat zien dat de toets die H_0 verwerpt als $\prod_{i=1}^n X_i < c$ bij een geschikte keuze van c uniform meest onderscheidend voor dit probleem is.

2. Bepaal de uniform meest onderscheidende toets in de volgende situatie. $X_1, \ldots, X_n$ is een steekproef uit een $N(\mu, \sigma_0^2)$ verdeling waarbij μ een

onbekende parameter is en σ_0^2 een bekend getal. Zij $H_0 : \mu \geq \mu_0$ en $H_1 : \mu < \mu_0$ en α_0 de onbetrouwbaarheidsdrempel.

3. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een exponentiële verdeling met parameter λ. Beschouw het toetsingsprobleem $H_0 : \lambda = 1$ tegen $H_1 : \lambda = \lambda_1$ bij onbetrouwbaarheidsdrempel α_0.

   (a) Laat zien dat de meest onderscheidende toets voor bovenstaand toetsingsprobleem onder de veronderstelling dat $\lambda_1 > 1$ van de vorm 'Verwerp H_0 als $\sum_{i=1}^n X_i < c$ is'. Geef een uitdrukking voor c in termen van de kwantielen van een gamma verdeling.

   (b) Bepaal de uniform meest onderscheidende toets voor het toetsingsprobleem $H_0 : \lambda = 1$ tegen $H_1 : \lambda > 1$ bij onbetrouwbaarheidsdrempel α_0.

   (c) Bepaal nu ook de uniform meest onderscheidende toets voor het toetsingsprobleem $H_0 : \lambda \leq 1$ tegen $H_1 : \lambda > 1$ bij onbetrouwbaarheidsdrempel α_0.

   (d) Hoe ziet de uniform meest onderscheidende toets voor het toetsingsprobleem $H_0 : \lambda \geq 1$ tegen $H_1 : \lambda < 1$ bij onbetrouwbaarheidsdrempel α_0 eruit?.

4. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een $N(0, \sigma^2)$ verdeling met $\sigma^2 > 0$. Beschouw het toetsingsprobleem $H_0 : \sigma^2 = \pi$ tegen $H_1 : \sigma^2 > \pi$ bij onbetrouwbaarheidsdrempel α_0. Laat zien dat er een constante c (afhankelijk van α_0 en n) bestaat zodanig dat de toets die H_0 verwerpt als $\sum_{i=1}^n X_i^2 > c$ uniform meest onderscheidend is voor dit toetsingsprobleem.

5. Zij F_θ de functie op $[0, 1]$ die gegeven wordt door $F_\theta(x) = x^\theta$.

   (a) Bepaal een zo groot mogelijke verzameling Θ zodat F_θ een verdelingsfunctie is voor elke $\theta \in \Theta$.

   (b) Laat zien dat de uniform meest onderscheidende toets voor het toetsen van de nulhypothese $H_0 : \theta \geq 2$ tegen het alternatief $H_1 : \theta < 2$ H_0 verwerpt voor 'kleine waarden' van $\prod_{i=1}^n X_i$ als $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef is uit uit de verdeling met F_θ als verdelingsfunctie.

Week 9

1. Zij $X_1, \ldots, X_{100}$ een steekproef uit een $N(\theta, 25)$ verdeling met $\theta \in \Theta = \mathbb{R}$. $\overline{X} = 2.49$ wordt gerealiseerd.

   (a) Stel een (numeriek) betrouwbaarheidsinterval op voor θ met betrouwbaarheid 0.99. (U kunt gebruiken dat $\Phi(2.576) = .995$.)

   (b) Stel we zijn geinteresseerd in het toetsen van $H_0 : \theta = 2$ tegen $H_1 : \theta \neq 2$ bij onbetrouwbaarheid $\alpha_0 = 0.01$. Wordt H_0 nu verworpen?

(c) Stel we willen bovenstaand toetsingsprobleem bekijken bij $\alpha_0 < 0.01$. Wat kunt u nu zeggen over het al dan niet verwerpen van H_0?

(d) Voor welke α_0 geldt dat H_0 niet verworpen wordt?

2. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een uniforme verdeling op $[0, \theta]$ met $\theta \in \Theta = (0, \infty)$. Zij $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ en $\alpha \in (0, 1)$.

   (a) Laat zien dat $(\frac{M_n}{(1-\frac{1}{2}\alpha)^{1/n}}, \frac{M_n}{(\frac{1}{2}\alpha)^{1/n}})$ een betrouwbaarheidsinterval is voor θ met onbetrouwbaarheid $1 - \alpha$.

   (b) Geef ook een betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid $1-\alpha$ van de vorm $[M_n, R_n)$ voor nader als functie van M_n en α te bepalen R_n.

   (c) Bepaal van elk van de twee hierboven aangeduide betrouwbaarheidsintervallen de verwachte lengte.

3. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een exponentiële verdeling met parameter $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Zij $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

   (a) Zij $Y_i = \lambda X_i$. Laat zien dat de Y_i onafhankelijk en alle standaard exponentieel verdeeld zijn. Wat is de verdeling van $S_{\lambda,n} := \sum_{i=1}^n Y_i$?

   (b) Zij $\gamma_{n,\alpha}$ voor elke $\alpha \in (0, \infty)$ het α-kwantiel van de $\Gamma(n, 1)$ verdeling. Laat zien dat $(\frac{S_n}{\gamma_{n,1-\alpha/2}}, \frac{S_n}{\gamma_{n,\alpha/2}})$ een betrouwbaarheidsgebied is voor λ met betrouwbaarheid $1 - \alpha$.

4. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit de verdeling op $[0, 1]$, afhankelijk van een parameter $\theta \in (0, \infty)$, met verdelingsfunctie $F_\theta(x) = x^\theta$. Bekijk het toetsingsprobleem $H_0 : \theta = \theta_0$ tegen $H_1 : \theta < \theta_0$ bij onbetrouwbaarheidsdrempel α.

   (a) Zij $\theta_0 = 1$. Laat zien dat de uniform meest onderscheidende toets H_0 verwerpt als $\prod_{i=1}^n X_i < c(\alpha)$ voor zekere $c(\alpha)$.

   (b) Zij nu θ_0 willekeurig positief. Laat zien dat de uniform meest onderscheidende toets H_0 verwerpt als $\prod_{i=1}^n X_i < (c(\alpha))^{1/\theta_0}$ met $c(\alpha)$ als boven.

   (c) Laat zien dat een betrouwbaarheidsgebied voor θ met betrouwbaarheid $1 - \alpha$ gegeven wordt door $(\frac{\log c(\alpha)}{\log \prod_{i=1}^n X_i}, \infty)$.

5. Zij X $\mathrm{Bin}(n, p)$ verdeeld en $\alpha \in (0, 1)$. Met $\mathbb{P}_p$ geven we de kansverdeling van X aan. Zij $k \in \{0, \ldots, n\}$ gegeven.

   (a) Laat zien dat er een $p_L(k) \in [0, 1]$ zodanig dat geldt dat $p > p_L(k) \iff \mathbb{P}_p(X \geq k) > \alpha/2$.

   (b) Laat zien dat er een $p_R(k)$ bestaat zó dat $p < p_R(k) \iff \mathbb{P}_p(X \leq k) > \alpha/2$.

(c) Laat zien dat $(p_L(X), p_R(X))$ een betrouwbaarheidsinterval is voor p met betrouwbaarheid $1 - \alpha$.

(d) Hoe ziet dit interval eruit als $X = 0$ gerealiseerd wordt?