Tentamen Wiskundige Statistiek 2 mei 2000, 9.30-12.30

---

1. Zij X een stochastische vector met een verdeling die afhangt van een parameter $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

   (a) Formuleer en bewijs de Cramér-Rao ongelijkheid voor zuivere schatters.

   (b) Veronderstel dat er een vaste eindige verzameling S is met $\mathbb{P}_\theta(X \in S) = 1$ voor alle $\theta \in \Theta$ en dat de log-aannemelijkheidsfunctie $\theta \mapsto l_\theta(x)$ voor elke $x \in S$ continu differentieerbaar is naar θ met afgeleide $\dot{l}_\theta(x)$. Toon aan dat

   i. $\mathbb{E}_\theta \dot{l}_\theta(X) = 0$.

   ii. $\psi'(\theta) = \mathbb{E}_\theta[T\dot{l}_\theta(X)]$ als $T = t(X)$ een zuivere schatter is van $\psi(\theta)$ en ψ continu differentieerbaar is.

2. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een homogene verdeling over $(\theta, 2\theta)$ met $\theta > 0$. Zij $m_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ en $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

   (a) Laat zien dat $\mathbb{P}_\theta(M_n < 2m_n) = 1$ voor alle $\theta > 0$.

   (b) Toon aan dat de verdelingsfunctie van M_n gegeven wordt door $x \mapsto (\frac{x-\theta}{\theta})^n$ voor $x \in (\theta, 2\theta)$.

   (c) Laat zien dat $\frac{1}{2}M_n$ de meest aannemelijke schatter is van θ.

   (d) Geef een zuivere schatter van θ gebaseerd op M_n.

3. De stochastische grootheden $X_1, \ldots, X_n$ zijn o.o. en gelijk verdeeld met dichtheid
$$f_\theta(x) = c(\theta)x^{\theta-1}1_{(0,1)}(x).$$
   Zij $Y_i = -\log X_i$ voor $i = 1, \ldots, n$ en $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

   (a) Bepaal $c(\theta)$ zó dat f_θ inderdaad een kansdichtheid is.

   (b) Laat zien dat de Y_i exponentieel verdeeld zijn.

   (c) Bepaal de Fisher informatie over θ in één waarneming.

   (d) Vind de zuivere schatter van $\frac{1}{\theta}$ met minimale variantie.

   (e) Wat is de meest aannemelijke schatter van θ?

Let op: er staat ook een opgave op de andere kant!

4. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een $N(\theta, 4)$ verdeling. Bekijk het toetsingsprobleem $H_0 : \theta \geq \theta_0$ tegen $H_1 : \theta < \theta_0$ bij zekere onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 > 0$.

   (a) Bepaal de uniform meest onderscheidende toets voor bovenstaand toetsingsprobleem. Geef hierbij expliciet toetsingsgrootheid en kritiek gebied aan.

   (b) Geef een betrouwbaarheidsinterval voor θ met betrouwbaarheid $1 - \alpha$.

   (c) Neem $\alpha_0 = 0.01$. Hoe groot moet n zijn opdat het onderscheidend vermogen van de toets in $\theta = \theta_0 - 1$ tenminste 0.99 is? (U mag gebruik van het feit dat $\Phi(-2.326) = 0.01$.)

Normering: Per onderdeel kunt u volgens onderstaande tabel punten verdienen.

1a: 7	2a: 2	3a: 2	4a: 3
1b: 5	2b: 3	3b: 3	4b: 3
	2c: 3	3c: 3	4c: 4
	2d: 2	3d: 3	
		3e: 2	

Als T het door u behaalde totaal aantal punten is, is uw cijfer $\frac{T}{5} + 1$.