Tentamen Wiskundige Statistiek 9 juli 2001, 13.30-16.30

1. Zij X een stochastische vector met een verdeling die afhangt van een parameter $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

   (a) Formuleer en bewijs de Cramér-Rao ongelijkheid voor zuivere schatters van θ die gebaseerd zijn op X.

   (b) Veronderstel dat er een vaste eindige verzameling S is met $\mathbb{P}_\theta(X \in S) = 1$ voor alle $\theta \in \Theta$ en dat de log-aannemelijkheidsfunctie $\theta \mapsto l_\theta(x)$ voor elke $x \in S$ continu differentieerbaar is naar θ met afgeleide $\dot{l}_\theta(x)$. Toon aan dat

      i. $\mathbb{E}_\theta \dot{l}_\theta(X) = 0$.

      ii. Als $T = t(X)$ een zuivere schatter is van $\psi(\theta)$ en ψ continu differentieerbaar is, dan is $\frac{d}{d\theta}\psi(\theta) = \mathbb{E}_\theta[T\dot{l}_\theta(X)]$.

2. Gegeven is voor elke $\theta \in \mathbb{R}$ de functie f_θ die gedefinieerd is op $\mathbb{R}$ door $f_\theta(x) = c(x-\theta)^2 \exp(-\frac{1}{2}(x-\theta)^2)$, waarbij c een nader te bepalen constante is, opdat f_θ een kansdichtheid is.

   (a) Laat zien dat $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

   (b) Zij X een stochast die een verdeling heeft met f_θ als dichtheid. Laat zien dat $\mathbb{E}_\theta X = \theta$. Bepaal ook (via twee maal partieel integreren) $\mathrm{Var}_\theta X$.

   (c) Bepaal de Fisher informatie over θ in X.

   (d) Gegeven zijn nu n onafhankelijke stochasten $X_1 \ldots, X_n$ uit de verdeling met f_θ als dichtheid. Bepaal de UMVZ schatter van θ.

3. Zij $\theta \in \Theta = (1, \infty)$ en beschouw de homogene verdeling op het interval $[\frac{1}{\theta}, \theta]$. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit deze verdeling en $M_i = \max\{X_i, \frac{1}{X_i}\}$ voor elke $i = 1, \ldots, n$.

   (a) Laat zien dat de verdelingsfunctie van elke M_i gelijk is aan F_θ waarbij deze functie op het interval $[1, \theta]$ voldoet aan $F_\theta(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{\theta - \frac{1}{\theta}}$. Hoe ziet F_θ er buiten dit interval uit?

   (b) Bepaal de meest aannemelijke schatter van θ op basis van de steekproef $X_1, \ldots, X_n$.

(c) Bepaal de verdelingsfunctie van de meest aannemelijke schatter van θ en beargumenteer zonder rekenwerk dat deze schatter niet zuiver voor θ kan zijn.

4. Beschouw een familie verdelingen die afhangt van een onbekende positieve reële parameter θ en een bekend natuurlijk getal k met dichtheden $f_{k,\theta}$ die gegeven is door

$$f_{k,\theta}(x) = \frac{1}{\theta^k (k-1)!} x^{k-1} \exp(-x/\theta) 1_{(0,\infty)}(x).$$

Zij X een stochastische variabele met dichtheid $f_{k,\theta}$ en Y een van X onafhankelijke stochastische variabele met dichtheid $f_{l,\theta}$. Veronderstel dat we ook nog een steekproef $X_1, \ldots, X_n$ uit de verdeling met dichtheid $f_{k,\theta}$ hebben.

(a) Laat zien dat $X+Y$ dichtheid $f_{k+l,\theta}$ heeft. Wat is nu de dichtheid van $S = \sum_{j=1}^{n} X_j$?

(b) Beschouw het toetsingsprobleem $H_0 : \theta = \theta_0$ tegen $H_1 : \theta = \theta_1$, waarbij $\theta_0 < \theta_1$, bij een onbetrouwbaarheidsdrempel α. Laat zien dat de meest onderscheidende toets bij de waarnemingen $X_1, \ldots, X_n$ voor dit probleem H_0 verwerpt als $S > c(\alpha)$ voor zekere $c(\alpha)$. Druk $c(\alpha)$ uit in de verdeling van S onder de parameterwaarde θ_0.

(c) Waarom is bovenstaande toets uniform meest onderscheidend voor het toetsingsprobleem $H_0 : \theta = \theta_0$ tegen $H_1 : \theta > \theta_0$ bij dezelfde onbetrouwbaarheidsdrempel?

(d) Laat zien dat voor vaste positieve reële getallen c en m de functie h gegeven door $h(\theta) = \int_c^\infty f_{m,\theta}(x)\, dx$ stijgend is op $\mathbb{R}^+$ (pas de transformatie $x = \theta y$ toe). Concludeer met behulp hiervan dat de toets uit onderdeel 4b ook uniform meest onderscheidend is voor het probleem $H_0 : \theta \leq \theta_0$ tegen $H_1 : \theta > \theta_0$ bij dezelfde onbetrouwbaarheidsdrempel.

Normering: Per onderdeel kunt u volgens onderstaande tabel punten verdienen.

1a: 7	2a: 2	3a: 2	4a: 3
1b: 5	2b: 4	3b: 4	4b: 4
	2c: 2	3c: 3	4c: 2
	2d: 4		4d: 3

Als T het door u behaalde totaal aantal punten is, is uw cijfer $\frac{T}{5} + 1$.