Tentamen Wiskundige Statistiek
25 augustus 2000, 9.30-12.30, zaal P.227

---

1. Zij X een stochastische vector met een discrete verdeling afhankelijk van een parameter θ.
   (a) Formuleer de stelling van Neyman en Pearson voor bovenstaand geval.
   (b) Bewijs deze stelling.

2. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een verdeling met dichtheid
$$f_\theta(x) = c(\theta)x^2 e^{-\theta x^3} 1_{(0,\infty)}(x)$$
waarin $\theta \in \Theta = (0, \infty)$.
   (a) Laat zien dat $c(\theta) = 3\theta$ opdat f_θ een kansdichtheid is.
   (b) Zij $Y = X_1^3$. Bepaal de verdelingsfunctie van Y. Welke (bekende) verdeling heeft Y?
   (c) Bepaal de meest aannemelijke schatter van θ bij de waarnemingen $X_1, \ldots, X_n$.
   (d) Bepaal ook de meest aannemelijke schatter van $\psi(\theta) = \frac{1}{\theta}$ en laat zien dat deze schatter zuiver is. Bepaal tevens de variantie van deze schatter.
   (e) Bepaal de Fisher informatie over θ in één waarneming en de UMVZ schatter van $\psi(\theta)$.

3. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een homogene verdeling over $[-\theta, 2\theta]$ met $\theta > 0$. Zij voor elke $i = 1, \ldots, n$ de stochastische variabele $Z_i = \max\{\frac{1}{2}X_i, -X_i\}$.
   (a) Laat zien dat voor elke $\theta > 0$ en voor elke $i = 1, \ldots, n$ geldt dat $\mathbb{P}_\theta(0 < Z_i < \theta) = 1$ en dat Z_i homogeen op $[0, \theta]$ verdeeld is.
   (b) Laat zien dat $M_n = \max\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ de meest aannemelijke schatter is van θ.
   (c) Bepaal c_n zó dat $c_n M_n$ een zuivere schatter is van θ.
   (d) Zij $\alpha \in (0, 1)$. Vind positieve constanten c_{1n} en c_{2n} zo dat $\mathbb{P}_\theta(M_n < \theta c_{1n}) = \frac{1}{2}\alpha$ en $\mathbb{P}_\theta(M_n > \theta c_{2n}) = \frac{1}{2}\alpha$. Bepaal tevens met behulp hiervan een betrouwbaarheids interval voor θ met betrouwbaarheid $1 - \alpha$.

Let op: er staat ook een opgave op de andere kant!

4. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een $N(\theta, \sigma^2)$ verdeling waarbij bekend is dat $\sigma^2 = 9$. Bekijk het toetsingsprobleem $H_0 : \theta = 6$ tegen $H_1 : \theta < 6$ bij zekere onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 > 0$.

   (a) Zij $n = 100$. Bepaal de uniform meest onderscheidende toets voor bovenstaand toetsingsprobleem. Geef hierbij expliciet de toetsingsgrootheid aan en druk het kritieke gebied uit in de standaard normale verdelingsfunctie.

   (b) Is de bovenstaande toets ook uniform meest onderscheidend voor $H_0 : \theta \geq 6$ tegen $H_1 : \theta < 6$ bij dezelfde onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha_0 > 0$ (veronderstel weer $n = 100$).

   (c) Neem $\alpha_0 = 0.01$. Hoe groot moet n zijn opdat het onderscheidend vermogen van de toets in $\theta = 9$ tenminste 0.99 is? (U mag gebruik van het feit dat $\Phi(-2.326) = 0.01$.)

Normering: Per onderdeel kunt u volgens onderstaande tabel punten verdienen.

1a: 5	2a: 2	3a: 2	4a: 4
1b: 5	2b: 3	3b: 3	4b: 3
	2c: 3	3c: 2	4c: 3
	2d: 4	3d: 3	
	2e: 3		

Als T het door u behaalde totaal aantal punten is, is uw cijfer $\frac{T}{5} + 1$.