Tentamen Wiskundige Statistiek 30 maart 2000, 13.30-16.30

---

1. Zij X een stochastische vector met een discrete verdeling afhankelijk van een parameter θ.

   (a) Formuleer de stelling van Neyman en Pearson voor bovenstaand geval.

   (b) Bewijs deze stelling.

2. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit een verdeling met dichtheid

$$f_\theta(x) = c(\theta)xe^{-\theta x^2}1_{(0,\infty)}(x)$$

   waarin $\theta \in \Theta = (0, \infty)$.

   (a) Laat zien dat $c(\theta) = 2\theta$ opdat f_θ een kansdichtheid is. Laat zien dat X_1^2 exponentieel verdeeld is met parameter θ?

   (b) Bepaal de meest aannemelijke schatter van θ.

   (c) Schat $\psi(\theta) = \frac{1}{\theta}$ met $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$. Is dit een zuivere schatter?

   (d) Bepaal de Fisher informatie over θ in één waarneming.

   (e) Bepaal de UMVZ schatter van $\psi(\theta)$.

3. Zij $X_1, \ldots, X_{2n}$ een steekproef uit een $N(29, \sigma^2)$ verdeling met onbekende $\sigma^2 > 0$. Zij $T_n = \sum_{i=1}^{2n}(X_i - 29)^2$.

   (a) Laat m.b.v. poolcoördinaten zien dat $(X_1 - 29)^2 + (X_2 - 29)^2$ een exponentiële verdeling heeft met parameter $\frac{1}{2\sigma^2}$. Welke verdeling heeft T_n?

   (b) Beschouw het toetsingsprobleem $H_0 : \sigma^2 = 1$ tegen $H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$ met $\sigma_1^2 < 1$. Laat zien dat er voor elke $\alpha_0 \in (0, 1)$ een $c_0 > 0$ te vinden is zodanig dat de toets die H_0 verwerpt als $T_n < c_0$ meest onderscheidend is bij onbetrouwbaarheidsdrempel α_0.

   (c) Bepaal nu ook de uniform meest onderscheidende toets voor het probleem $H_0 : \sigma^2 = 1$ tegen $H_1 : \sigma^2 < 1$ bij gegeven α_0.

   (d) Is de toets uit het vorige onderdeel ook uniform meest onderscheidend voor $H_0 : \sigma^2 \geq 1$ tegen $H_1 : \sigma^2 < 1$ bij dezelfde α_0?

Let op: laatste opgave aan ommezijde!

4. Zij $X_1, \ldots, X_n$ een steekproef uit de homogene verdeling op $[-\theta, \theta]$ met $\theta > 0$. Zij $M_n = \max\{|X_1|, \ldots, |X_n|\}$ en $\alpha \in (0, 1)$

   (a) Bepaal de verdelingsfunctie van $\zeta_n = \frac{M_n}{\theta}$ en de constante c zodanig dat $\mathbb{P}_\theta(\zeta_n \leq c) = \alpha$.

   (b) Bepaal een betrouwbaarheidsinterval van de vorm $(0, r_n(\alpha))$ voor θ met betrouwbaarheid $1 - \alpha$.

   (c) Bepaal een betrouwbaarheidsinterval van de vorm $(c_{1n}(\alpha), c_{2n}(\alpha))$ voor θ met $c_{1n}(\alpha) > 0$ dat betrouwbaarheid $1 - \alpha$ heeft.

   (d) Beschouw de situatie $n = 1$ en het toetsingsprobleem $H_0 : \theta = \alpha$ tegen $H_1 : \theta \neq \alpha$ bij onbetrouwbaarheidsdrempel α. Veronderstel dat $X_1 = -1$ wordt waargenomen. Wordt H_0 verworpen?

Normering: Per onderdeel kunt u volgens onderstaande tabel punten verdienen.

1a: 5	2a: 3	3a: 3	4a: 2
1b: 5	2b: 2	3b: 3	4b: 3
	2c: 2	3c: 3	4c: 3
	2d: 3	3d: 3	4d: 2
	2e: 3		

Als T het door u behaalde totaal aantal punten is, is uw cijfer $\frac{T}{5} + 1$.