

Propositie 1 *Beschouw een rij niet-negatieve getallen x_k ($k = 1, 2, \dots$). Dan is de som $S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ welgedefinieerd (eventueel gelijk aan $+\infty$) en onafhankelijk van de gekozen sommatievolgorde.*

Bewijs S is gedefinieerd als $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, waarbij $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$. De rij (S_n) is stijgend en heeft dus een limiet ($\leq +\infty$). Zij $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ een bijectie. Een andere sommatievolgorde is dan (eigenlijk per definitie) $S' = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n$, waarbij $S'_n = \sum_{k=1}^n x_{f(k)}$.

We hebben nu de triviale ongelijkheid

$$S_n \geq \sum_{k:f(k) \leq n} x_{f(k)}.$$

We weten dat het linkerlid van deze ongelijkheid stijgend naar S convergeert, zodat $S \geq S'_n$ voor alle n , waaruit dan ook (laat $n \rightarrow \infty$) volgt dat $S \geq S'$.

Het aantonen van de omgekeerde ongelijkheid gaat analoog. Schrijf voor het gemak $y_k = x_{f(k)}$. Dan is $S' = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$. Neem nu de bijectie f^{-1} en rond het bewijs af. \square

Propositie 2 *Propositie 1 geldt ook voor willekeurige rijen onder de extra voorwaarde dat $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$. Bovendien is dan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \in \mathbb{R}$.*

Het bewijs van deze propositie is wat lastiger en we verwijzen hiervoor naar een college Analyse. Bovendien zul je daar zien dat het onafhankelijk zijn van een gekozen sommatievolgorde in feite equivalent is met $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$.