Tentamen Kansrekening
22 februari 2007

Beknopte uitwerking

1. (a) De veronderstellingen zijn dat elke gereserveerde kaart even grote kans heeft om niet afgehaald te worden, d.w.z. dat iedereen voor wie zo'n kaart bedoeld is met even grote kans bepaalt of hij/zij wel of niet naar de voorstelling gaat. Bovendien veronderstellen we dat deze personen onafhankelijk van elkaar deze beslissingen nemen. Dit laatste is niet realistisch, want mensen gaan vaak in groepjes (familieverband of zo) naar theater en beïnvloeden elkaar. X is Bin$(100, \frac{1}{2})$ verdeeld.

   (b) Merk eerst op dat $\mathbb{E}(X) = 50$ en $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 25$ (wegens de np en npq formules). Verder is $Y = 900 \times 30 + (100 - X) \times 30 = 30000 - 30X$. Dus is $\mathbb{E}(Y) = 30000 - 30\mathbb{E}(X) = 28500$ en $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) = (-30)^2 \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 22500$.

   (c) Er wordt verlies geleden als $Y < 28100$, dus als $30000 - 30X < 28100$, oftewel als $X > 63\frac{1}{3}$. Omdat X geheel moet zijn, volgt $X \geq 64$. De kans $\mathbb{P}(X \geq 64)$ benaderen we via de normale verdeling met continuïteitscorrectie. Dus $\mathbb{P}[X \geq 64] = \mathbb{P}[X \geq 63\frac{1}{2}] = \mathbb{P}[\frac{X-50}{\sqrt{25}} \geq \frac{63\frac{1}{2}-50}{\sqrt{25}}] \approx \mathbb{P}[Z \geq 2.7]$, waarbij Z standaard normaal verdeeld is. Gebruik de tabel achterin de syllabus en vind dat de laatste kans gelijk is aan $1 - \Phi(2.7) = 0.0035$.

2. (a) Maak een schets en stel vast de rechthoeken linksboven en rechtsonder als het ware niet meedoen. Dus $U = \max\{X^2, (1-X)^2\}$.

   (b) Gebruik dat $\mathbb{E}(h(X)) = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$, omdat X uniform verdeeld is op $[0,1]$. Kies nu $h(x) = \max\{x^2, (1-x)^2\}$, dan is $U = h(X)$ en dus is $\mathbb{E}(U) = \int_0^1 \max\{x^2, (1-x)^2\}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)^2 \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{7}{12}$.

   (c) U is minimaal voor $X = \frac{1}{2}$, dus $U \geq \frac{1}{4}$. Neem $x \in [\frac{1}{4}, 1]$. Dan is $\mathbb{P}[U \leq x] = \mathbb{P}[X^2 \leq x, (1-X)^2 \leq x] = \mathbb{P}[1 - \sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}] = 2\sqrt{x} - 1$ (merk op dat dit antwoord een getal tussen 0 en 1 oplevert wegens de keuze van x). Schrijven we F voor de verdelingsfunctie van U, dan is dus $F(x) = 2\sqrt{x} - 1$, voor $x \in [\frac{1}{4}, 1]$ (en wat daarbuiten?).

   (d) Hoewel het er niet expliciet stond is de bedoeling de formule $\mathbb{E}(U) = \int x f(x) \mathrm{d}x$ te gebruiken, met f de dichtheid van U. Uit (c) halen we dat $f(x) = F'(x) = x^{-1/2}$ voor $x \in [\frac{1}{4}, 1]$, en nul daarbuiten. Dus is $\mathbb{E}(U) = \int_{\frac{1}{4}}^1 x \cdot x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \frac{7}{12}$.

3. (a) De eerste kans is het bepalen van de kans op een eerste serie van k enen, gevolgd door een tweede serie van l nullen die dan nog gevolgd wordt door een één. Met de gebruikelijke veronderstellingen van onafhankelijkheid van de worpen etc. volgt dan dat $\mathbb{P}[U = k, V = l, X_1 = 1] = p^k q^l p = p^{k+1} q^l$. De andere kans bereken je net zo en is $q^{k+1} p^l$.

   (b) Tel de kansen in (a) bij elkaar op, omdat $[U = k, V = l]$ de disjuncte vereniging is van $[U = k, V = l, X_1 = 1]$ en $[U = k, V = l, X_1 = 0]$.

(c) De gebeurtenis $[U = k]$ kunnen we schrijven als de disjuncte vereniging van $[U = k, X_1 = 1]$ en $[U = k, X_1 = 0]$. Verder als onder (b). Voor $[V = l]$ gaat dat niet zo eenvoudig. Wel geldt natuurlijk $\mathbb{P}[V = l] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[U = k, V = l]$. Gebruik nu (b) en $\sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}$ om te vinden dat $\sum_{k=1}^{\infty} p^{k+1}q^l + \sum_{k=1}^{\infty} q^{k+1}p^l = p^2q^l \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} + q^2p^l \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p^2q^l \sum_{j=0}^{\infty} p^j + q^2p^l \sum_{j=0}^{\infty} q^j = p^2q^{l-1} + q^2p^{l-1}$.

(d) Onafhankelijkheid als $\mathbb{P}[U = 1], V = 1] = \mathbb{P}[U = 1]\mathbb{P}[V = 1]$. Gebruik nu (b) en (c), dan vinden we $p^2q + q^2p = 2pq \cdot (p^2 + q^2)$. Schrijf nu $q = 1 - p$ en reduceer de laatste vergelijking tot $2p^2 - 2p + \frac{1}{2} = 0$, die als enige oplossing $p = \frac{1}{2}$ heeft.

(e) U en V zijn per definitie onafhankelijk als alle gebeurtenissen $[U = k]$ en $[V = l]$ onafhankelijk zijn. We hebben in (d) gezien dat voor $k = l = 1$ dat alleen zo is voor $p = \frac{1}{2}$. Dit is dus de enige kandidaat. Maar voor $p = q = \frac{1}{2}$ zijn $\mathbb{P}[U = k, V = l]$ en $\mathbb{P}[U = k] \cdot \mathbb{P}[V = l]$ gelijk (ga na).

(f) $\mathbb{E}(U) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}[U = k] = pq \sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} + pq \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$. Gebruik nu de hint $\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$ met $x = p$ en $x = q$ en we vinden $\mathbb{E}(U) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$.

(g) $\mathbb{E}(V) = \sum_{l=1}^{\infty} l\mathbb{P}[V = l] = p^2 \sum_{l=1}^{\infty} lq^{l-1} + q^2 \sum_{l=1}^{\infty} lp^{l-1} = 2$.

(h) Omdat $\mathbb{C}\mathrm{ov}(U, V) = \mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V)$ hoeven we wegens (f) en (g) alleen nog $\mathbb{E}(UV)$ te bepalen. Nu is $\mathbb{E}(UV) = \sum_{k,l} kl\mathbb{P}[U = k, V = l]$. Wegens (b) is dit
$p^2q \sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} \sum_{l=1}^{\infty} lq^{l-1} + pq^2 \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} \sum_{l=1}^{\infty} lp^{l-1} = \frac{1}{pq}$. Nu alles invullen en een beetje rekenen.

(i) Omdat $pq = p(1-p)$ maximaal is voor $p = \frac{1}{2}$, zodat $pq \leq \frac{1}{4}$, volgt het gestelde. We weten uit (e) dat voor $p = \frac{1}{2}$ geldt dat $\mathbb{C}\mathrm{ov}(U, V) = 0$ (waarom?). Neem daarom verder $p > \frac{1}{2}$ (voor $p < \frac{1}{2}$ geldt iets dergelijks). Negatieve covariantie tussen U en V betekent grofweg dat grote waarden van U samen gaan met kleine waarden van V en omgekeerd. Nu is per worp de kans op een één het grootst. Dus in de eerste worp verwacht je als het ware een één, en daarna weer etc. Dus je verwacht een relatief lange serie enen te zien. De tweede serie moet dan uit nullen bestaan, die steeds met kleine kans optreden, dus ligt een korte tweede serie voor de hand.

(j) Uit (h) halen we dat U en V ongecorreleerd zijn (dus $\mathbb{C}\mathrm{ov}(U, V) = 0$), alleen als $p = \frac{1}{2}$. Maar dan zijn U en V ook onafhankelijk, zoals volgt uit (e), of door opnieuw te rekenen.