Centrum voor Wiskunde en Informatica
Centre for Mathematics and Computer Science

B. Hoogenboom, T.H. Koornwinder

Fonctions d'entrelacement sur les groupes de Lie compacts et polynômes orthogonaux de plusieurs variables

Department of Pure Mathematics Report PM-R8601 January

Intertwining functions on compact Lie groups and orthogonal polynomials in several variables

The Centre for Mathematics and Computer Science is a research institute of the Stichting Mathematisch Centrum, which was founded on February 11, 1946, as a nonprofit institution aiming at the promotion of mathematics, computer science, and their applications. It is sponsored by the Dutch Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.).

Copyright © Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam

Fonctions d'Entrelacement sur les Groupes de Lie Compacts et Polynômes Orthogonaux de Plusieurs Variables

Bob Hoogenboom
Mauritsplaats 128, 3012 CD Rotterdam, The Netherlands

Tom H. Koornwinder
Centre for Mathematics and Computer Science
P.O. Box 4079, 1009 AB Amsterdam, The Netherlands

This report, which is written in French, gives a survey of results by Vretare (1976) and Hoogenboom (1983), who showed that spherical functions respectively intertwining functions on compact symmetric spaces can be written as orthogonal polynomials in several variables. The paper concludes with a sketchy discussion of orthogonal polynomials in several variables which can be associated with root systems. Some conjectures are posed for such classes of polynomials.

1980 Mathematics subject classification: 17B20, 22E46, 33A65, 33A75, 43A75, 43A90

Key words & phrases: compact symmetric spaces, spherical functions, intertwining functions, orthogonal polynomials in several variables, root systems with two commuting involutions

Note: This paper will appear in the Proceedings of the Ecole d'Analyse Harmonique de Tunis, which was held in Tunis from August 27 to September 15, 1984.

1. Introduction

Soit U un groupe compact, et soit K un sous-groupe fermé de U. On suppose que (U,K) est un *couple de Guelfand,* i.e., si π est une représentation unitaire irréductible de U dans $\mathcal{H}(\pi)$, la dimension du sous-espace $\mathcal{H}_K(\pi)$ des vecteurs K-invariants de $\mathcal{H}(\pi)$ est 0 ou 1. Si $\dim \mathcal{H}_K(\pi) = 1$, on dit que π est de *K-classe 1,* on choisit un vecteur K-invariant e_K de norme 1 et on définit la *fonction sphérique*

$$\phi(u) := (\pi(u)e_K, e_K), \quad u \in U. \tag{1.1}$$

Cette fonction, qui est biinvariante par K, satisfait l'équation fonctionnelle

$$\int_K \phi(u_1 k u_2)\, dk = \phi(u_1)\phi(u_2), \quad u_1, u_2 \in U. \tag{1.2}$$

Une classe spéciale de couples de Guelfand est donnée par les couples symétriques compacts (U,K), où U est un groupe compact, semi-simple, connexe (et, pour plus de simplicité, simplement connexe) et K est le sous-groupe des points invariants par un automorphisme continu involutif θ de U. Soient $\mathfrak{u},\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de U,K, soit θ aussi l'involution de $\mathfrak{u}$ induite par l'involution θ de U. Alors $\mathfrak{u}$ admet la décomposition $\mathfrak{u}=\mathfrak{k}+i\mathfrak{p}$ par rapport à θ. (Ici $\mathfrak{g}:=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ est le dual non-compact de $(\mathfrak{u},\theta)$.) On choisit un sous-espace abélien maximal $\mathfrak{a}_p$ de $\mathfrak{p}$ et on pose $A_p:=\exp(i\mathfrak{a}_p)$. Le groupe U admet la décomposition de Cartan $U=KA_pK$. Par conséquent une fonction sphérique par rapport à (U,K) est
Dans le cas de rang 1, i.e. $\dim \mathfrak{a}_p = 1$, Cartan [2] a déjà observé que les fonctions sphériques ϕ

Report PM-R8601
Centre for Mathematics and Computer Science
P.O. Box 4079, 1009 AB Amsterdam, The Netherlands

s'expriment comme des *polynômes de Jacobi* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$:

$$\phi(\exp(i\theta H_0)) = \text{const. } P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos(c\theta)), \tag{1.3}$$

où $0 \neq H_0 \in \mathfrak{a}_p$ est donné, la constante c dépend du choix de H_0, et les paramètres α,β sont déterminés par le couple (U,K). Le polynôme $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ est le polynôme orthogonal de degré n par rapport à la mesure $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx$ sur l'intervalle $(-1,1)$, où $\alpha,\beta>-1$. Dans le cas de (1.3) l'orthogonalité de Schur pour les fonctions sphériques se traduit comme l'orthogonalité des polynômes de Jacobi, la fonction de poids $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ est la partie radiale de la mesure de Haar de U par rapport à la décomposition de Cartan et l'équation différentielle hypergéométrique satisfaite par les polynômes de Jacobi s'obtient comme la partie radiale de l'équation $\omega\phi=\lambda\phi$, où ω est l'opérateur de Casimir de U.

Les cas où le système de racines de $(\mathfrak{g},\mathfrak{a}_p)$ est de type BC_2 ou A_2, ont été étudiés dans [14], [15], [17]. Dans ces cas les restrictions des fonctions sphériques à A_p sont des polynômes orthogonaux de deux variables. Par exemple, dans le cas BC_2, on rencontre les polynômes orthogonaux $p_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)$ par rapport à la mesure

$$(1-u+v)^\alpha(1+u+v)^\beta(u^2-4v)^\gamma\,du\,dv, \quad -v-1<u<v+1,\ u^2-4v>0,\ v<1.$$

Le polynôme $p_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)$ s'obtient par orthogonalisation de la suite

$$1,u,v,u^2,uv,v^2,u^3,u^2v,uv^2,\ldots,u^{n-k}v^k.$$

Les paramètres α,β,γ sont déterminés par le couple (U,K). Ils s'expriment en fonction des multiplicités des racines. Ce n'est qu'un très petit sous-ensemble de l'espace des paramètres qui admet une interprétation en tant que fonctions sphériques.

James & Constantine [13] ont obtenu des relations similaires entre des fonctions sphériques et des polynômes orthogonaux de p variables dans le cas $\mathfrak{u}=\mathfrak{o}(p+q)$, $\mathfrak{k}=\mathfrak{o}(p)+\mathfrak{o}(q)$ $(p\leqslant q)$.

Puis Vretare [24] a démontré que les fonctions sphériques d'un couple symétrique compact quelconque de rang l s'écrivent comme des polynômes orthogonaux de l fonctions sphériques particulières. La mesure d'orthogonalité et le procédé d'orthogonalisation sont donnés en terme du système de racines avec ses multiplicités.

En comparaison du cas d'une variable la théorie des polynômes orthogonaux de plusieurs variables est très peu developpée, aussi bien la théorie générale que l'étude de cas spéciaux. (Un résumé accentuant les cas spéciaux est donné dans [16]. Dans Kowalski [19] il s'agit d'un travail prometteur pour la théorie générale.) Les polynômes de Vretare [24] sont des exemples non-triviaux de polynômes orthogonaux de plusieurs variables analogues aux polynômes de Jacobi. Leur définition s'étend à des valeurs des paramètres correspondant à des multiplicités de racines non-existantes dans la nature. De cette façon on attache à tout système de racines une famille de polynômes orthogonaux de plusieurs variables dépendant d'un ou plusieurs paramètres qui parcourent un ensemble continu. Cependant ce n'est que dans les cas BC_2 et A_2 (cf. [14], [15], [18], [23]) qu'on a beaucoup d'information sur les polynômes à valeurs de paramètres sans interprétation en terme de groupes. (Voir Vretare [25] pour quelques résultats partiels.) Même l'équivalence de plusieurs définitions possibles des polynômes, évidente dans le cas des groupes, n'a pas été demontrée en général. C'est pour cela qu'une interprétation plus générale en terme de groupes serait très souhaitable pour ces classes de polynômes orthogonaux.

Une généralisation possible des fonctions sphériques sont les fonctions dites d'entrelacement. Soit U un groupe compact, et soient K et H des sous-groupes fermés tels que (U,K) et (U,H) sont des couples de Guelfand. Soit $\pi\in\hat{U}$ et supposons que $\mathcal{H}(\pi)$ contient des vecteurs unités e_K et e_H invariants par K et H respectivement. (On dit que π est de *K-H classe 1.*) On appelle

$$\phi(u) := (\pi(u)e_H, e_K), \quad u\in U, \tag{1.4}$$

une *fonction d'entrelacement* de (U,K,H). Cette fonction, qui est invariante à gauche par K et à droite par H, satisfait l'équation fonctionnelle (cf. Dunkl [5])

$$\phi(u_1)\overline{\phi(u_3)}\phi(u_2) = c\int_K\int_H \phi(u_1hu_3^{-1}ku_2)\,dh\,dk, \quad u_1,u_2,u_3\in U, \tag{1.5}$$

où c est une constante complexe non-nulle. Si $\phi(e)\neq 0$ on peut ramener cette équation, en posant $u_3=0$, à

$$\phi(u_1)\phi(u_2) = c \int_K \int_H \phi(u_1hku_2)\, dh\, dk, \quad u_1,u_2 \in U,$$

où $c\neq 0$. On peut expliquer la terminologie *fonction d'entrelacement* en observant que l'opérateur de convolution $f\mapsto f*\phi_\lambda$ est un opérateur d'entrelacement de $L^2(U\,/\,K)$ sur un sous-espace irréductible de $L^2(U\,/\,H)$.

Une classe spéciale de tels triplés (U,K,H) s'obtient dans les cas où U est un groupe compact, semi-simple, connexe (et de plus simplement connexe) et K,H sont les sous-groupes des points invariants par des involutions commutantes θ,σ, respectivement. Soit $i\mathfrak{a}_{pq}$ un sous-espace abélien maximal de $\{X\in\mathfrak{u} \mid \theta X=-X=\sigma X\}$, et soit $A_{pq}:=\exp(i\mathfrak{a}_{pq})$. On a la décomposition de Cartan généralisée $U=KA_{pq}H$ (cf. [12, §6]). Par conséquent les fonctions d'entrelacement de (U,K,H) sont complètement déterminées par leurs restrictions à A_{pq}. Dans le cas où $\dim\mathfrak{a}_{pq}=1$, on peut démontrer (cf. [12, §11]) que les fonctions d'entrelacement ϕ satisfont encore (1.3), où $0\neq H_0\in\mathfrak{a}_{pq}$ est donné. Le fait bien connu que les harmoniques sphériques de degré $2n$ sur la sphère $S^{p+q-1}=O(p+q)\,/\,O(p+q-1)$ invariantes par $O(p)\times O(q)$ s'écrivent comme des polynômes de Jacobi $P_n^{(\frac{1}{2}p-1,\frac{1}{2}q-1)}$ (cf. BRAAKSMA & MEULENBELD [1]) est un cas particulier de (1.3). JAMES & CONSTANTINE [13] ont considéré le cas $\mathfrak{u}=\mathfrak{o}(p+q)$, $\mathfrak{k}=\mathfrak{o}(p)+\mathfrak{o}(q)$, $\mathfrak{h}=\mathfrak{o}(p_1)+\mathfrak{o}(q_1)$ $(p_1+q_1=p+q)$, où les fonctions d'entrelacement peuvent être exprimées comme des polynômes orthogonaux de plusieurs variables. Dans le cas où $p=2$, nous retrouvons les polynômes $p_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)$ liés au système de racines BC_2. Par suite c'est un problème naturel que de développer une théorie générale des fonctions d'entrelacement des triplés (U,K,H) définis ci-dessus, analogue à VRETARE [24]. Ce problème a été résolu récemment dans la thèse [11], [12] de l'un de nous. Il s'est trouvé que toute la théorie de Vretare pouvait être généralisée de façon satisfaisante bien que pas aussi directement qu'on l'avait supposé. Dans le §2 nous donnerons un résumé du travail de VRETARE [24] et dans le §3 l'extension de HOOGENBOOM [12], en mettant l'accent sur les points de généralisation non-triviaux. Le §4 donne la forme explicite de la mesure d'orthogonalité des polynômes orthogonaux, le §5 caractérise ces polynômes dans une autre façon, le §6 traite le cas où $\dim\mathfrak{a}_{pq}=1$ et, finalement, le §7 traite la théorie générale des polynômes orthogonaux liés à un système de racines.

Nous terminons cette introduction en mentionnant deux autres raisons d'étudier ces fonctions d'entrelacement. On s'intéresse beaucoup, en ce moment, à l'analyse harmonique sur les espaces symétriques semi-simples, cf. le livre de FLENSTED-JENSEN [7]. La théorie de structure des systèmes de racines à deux involutions commutantes dévéloppée dans HOOGENBOOM [12] est peut-être utile dans ce cadre. De plus les fonctions propres K-invariantes des opérateurs différentiels G-invariants sur l'espace symétrique semi-simple $G\,/\,H$, qui jouent un rôle important dans l'analyse harmonique sur $G\,/\,H$, sont des prolongements analytiques de fonctions d'entrelacement dans le cas compact.

2. LA THÉORIE DE VRETARE DES FONCTIONS SPHÉRIQUES SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES COMPACTS

Ce paragraphe est un résumé du travail de VRETARE [24]. Ici et dans les paragraphes suivants les deux livres [8], [9] de HELGASON seront une référence générale pour les résultats inexpliqués de la théorie de structure et de l'analyse sphérique sur les groupes de Lie semi-simples.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple réelle, et soit θ une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ la décomposition en sous-espaces propres de θ correspondant aux valeurs propres 1 et -1. Si $\mathfrak{a}_p$ est un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$, on le peut compléter par un sous-espace $\mathfrak{a}_k$ de $\mathfrak{k}$ tel que $\mathfrak{a}:=\mathfrak{a}_k+\mathfrak{a}_p$ est abélien maximal dans $\mathfrak{g}$. ($\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.) Soient $\mathfrak{g}_C$, $\mathfrak{a}_C$ les complexifications de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$, et soit θ l'involution complexe de $\mathfrak{g}_C$ qui prolonge l'involution θ de $\mathfrak{g}$. On utilise les notations Φ et Φ_p pour les systèmes de racines de $(\mathfrak{g}_C,\mathfrak{a}_C)$ et de $(\mathfrak{g},\mathfrak{a}_p)$, respectivement. On pose

$$\tilde{\lambda} := \lambda|_{\mathfrak{a}_p}, \quad \lambda\in(i\mathfrak{a}_k+\mathfrak{a}_p)^*. \tag{2.1}$$

Alors $\Phi \subset (i\mathfrak{a}_k+\mathfrak{a}_p)^*$ et $\Phi_p=\{\tilde{\alpha}\neq 0 \mid \alpha\in\Phi\}$. On définit l'involution τ_1 de $(i\mathfrak{a}_k+\mathfrak{a}_p)^*$ par

$$(\tau_1\lambda)(H) := -\lambda(\theta H), \quad \lambda\in(i\mathfrak{a}_k+\mathfrak{a}_p)^*, \ H\in i\mathfrak{a}_k+\mathfrak{a}_p. \tag{2.2}$$

On étend chaque $\mu\in\mathfrak{a}_p{}^*$ à une forme linéaire réelle de $i\mathfrak{a}_k+\mathfrak{a}_p$ en posant $\mu(H):=0$ quand $H\in i\mathfrak{a}_k$. Par conséquent

$$\tilde{\lambda} = ½(\lambda+\tau_1\lambda), \quad \lambda\in(i\mathfrak{a}_k+\mathfrak{a}_p)^*.$$

Choisissons des sous-ensembles Φ^+, Φ_p^+ de racines positives dans Φ, Φ_p tels que l'on ait $\alpha\in\Phi^+$ quand $\alpha\in\Phi$, $\tilde{\alpha}\in\Phi_p^+$.

Soit G_C le groupe de Lie complexe, connexe, simplement connexe avec algèbre de Lie $\mathfrak{g}_C$ et soit U le sous-groupe analytique de G_C correspondant à la sous-algèbre réelle $\mathfrak{k}+i\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}_C$. Alors U est compact et simplement connexe. L'involution θ de $\mathfrak{g}_C$ peut être levée à G_C et puis restreinte à U. Soit K le sous-groupe analytique de U correspondant à $\mathfrak{k}$.

Le dual unitaire $\hat{U}$ de U est en correspondance bi-univoque avec l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles à dimension finie de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}_C$. Les classes d'équivalence de ces représentations sont déterminées par leur poids suprême. La collection des poids suprêmes est donnée par

$$\Lambda^+ := \{\lambda\in(i\mathfrak{a}_k+\mathfrak{a}_p)^* \mid 2(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha)\in\mathbb{Z}_+ \text{ pour tout } \alpha\in\Phi^+\}. \tag{2.3}$$

On dénote par π_λ l'élément de $\hat{U}$ à poids suprême λ.

THÉORÈME 2.1 (CARTAN-HELGASON, cf. [9, Theorem V.4.1]). *Soit $\lambda\in\Lambda^+$. Alors π_λ est de K-classe* 1 *si et seulement si:*

(i) $\lambda|_{i\mathfrak{a}_k}=0$;

(ii) $(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha)\in\mathbb{Z}_+$ *pour tout* $\alpha\in\Phi_p^+$.

(La condition (ii) peut s'écrire sous la forme $\lambda\in 2\Lambda_p^+$, où Λ_p est le réseau de poids attaché à Φ_p et Λ_p^+ le sous-ensemble des poids positifs. Nous utiliserons les notations $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}^+$ pour $2\Lambda_p$, $2\Lambda_p^+$.)

Selon la décomposition de Cartan, $U=KA_pK$ où $A_p:=\exp(i\mathfrak{a}_p)$. Soit $\lambda\in\mathfrak{L}^+$, soit e_K un vecteur unitaire de $\mathcal{H}(\pi_\lambda)$ invariant par K, et soit $\{f_0,f_1,\ldots,f_d\}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}(\pi_\lambda)$ telle que

$$\pi_\lambda(X)f_j = \lambda_j(X)f_j, \quad X\in\mathfrak{a}_C, \ j=0,\ldots,d, \tag{2.4}$$

où $\lambda_0=\lambda$ et $\lambda_1,\ldots,\lambda_d\in\mathfrak{a}_C{}^*$. Alors, par (1.1), la fonction sphérique correspondante ϕ_λ s'écrit sur A_p comme

$$\begin{aligned}\phi_\lambda(e^{iX}) &= (\pi_\lambda(e^{iX})e_K,e_K)\\ &= \sum_{r,s} (e_K,f_r)\,\overline{(e_K,f_s)}\,(\pi_\lambda(e^{iX})f_r,f_s)\\ &= \sum_j |(e_K,f_j)|^2\, e^{i\lambda_j(X)}, \quad X\in\mathfrak{a}_p.\end{aligned}$$

Par suite

$$\phi_\lambda(e^{iX}) = \sum_{\mu\in\mathfrak{a}_p{}^*} c_{\lambda,\mu}e^{i\mu(X)} \quad \text{(somme finie).} \tag{2.5}$$

Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_l$ les racines simples de Φ_p^+. On définit un ordre partiel $\prec$ de $\mathfrak{a}_p{}^*$ par:

$$\mu_1\prec\mu_2 \Leftrightarrow \mu_2-\mu_1 = \sum_j m_j\alpha_j \text{ avec } m_j\in\mathbb{Z}_+. \tag{2.6}$$

Soit W_p le groupe de Weyl de Φ_p. Alors

$$\phi_\lambda(e^{iwX}) = \phi_\lambda(e^{iX}), \quad w\in W_p, \ X\in\mathfrak{a}_p. \tag{2.7}$$

Proposition 2.2. *Les coefficients* $c_{\lambda,\mu}$ *dans* (2.5) *satisfont* $c_{\lambda,w\mu}=c_{\lambda,\mu}$ *pour* $w\in W_p$. *Si* $c_{\lambda,\mu}\neq 0$ *on a* $w\mu\prec\lambda$ *et* $w\mu\in\mathfrak{L}$ *pour chaque* $w\in W_p$. *En particulier,* $c_{\lambda,\lambda}\neq 0$.

Corollaire 2.3. *Soient* $\lambda_1,\lambda_2\in\mathfrak{L}^+$. *Alors*

$$\phi_{\lambda_1}\,\phi_{\lambda_2} = \sum_{\substack{\nu\in\mathfrak{L}^+ \\ \nu\prec\lambda_1+\lambda_2}} c_{\lambda_1,\lambda_2}(\nu)\,\phi_\nu,$$

et $c_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda_1+\lambda_2)\neq 0$.

Soient $\mu_1,\ldots,\mu_l$ les générateurs de $\mathfrak{L}^+$.

Théorème 2.4.
(i) *Soit* $\lambda\in\mathfrak{L}^+$. *Alors*

$$\phi_\lambda = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_l\in\mathbb{Z}_+ \\ n_1\mu_1+\ldots+n_l\mu_l\prec\lambda}} c_{n_1,\ldots,n_l}\,(\phi_{\mu_1})^{n_1}\cdots(\phi_{\mu_l})^{n_l}$$

$$= \sum_{\nu\prec\lambda} c_\nu(\phi_\mu)^\nu \quad \textit{(symboliquement)}$$

et $c_\lambda\neq 0$.
(ii) *Soient* $\lambda_1,\lambda_2\in\mathfrak{L}^+$. *Alors*

$$\int_U \phi_{\lambda_1}(u)\,\overline{\phi_{\lambda_2}(u)}\,du = 0, \quad \lambda_1\neq\lambda_2.$$

La partie (i) est obtenue par itération du Corollaire 2.3 et la partie (ii) est une conséquence des relations d'orthogonalité de Schur.

Corollaire 2.5. *Soit* $\lambda\in\mathfrak{L}^+$, f *une fonction de U. Alors* $f=$ const. ϕ_λ *si et seulement si:*

(i) $f=\sum_{\nu\prec\lambda} c_\nu\,(\phi_\mu)^\nu$,

(ii) $\int_U f(u)\,(\overline{\phi_\mu(u)})^\nu\,du = 0$ *si* $\nu\in\mathfrak{L}^+$, $\nu\prec\lambda$, $\nu\neq\lambda$.

On peut réarranger $\mu_1,\ldots,\mu_l$ de façon que

$$\begin{aligned} &\phi_{\mu_{2j-1}}=\overline{\phi_{\mu_{2j}}}, \quad j=1,\ldots,l_0, \\ &\phi_{\mu_j}=\overline{\phi_{\mu_j}}, \quad j=2l_0+1,\ldots,l. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Alors l'application

$$F:=(\phi_{\mu_1},\ldots,\phi_{\mu_{l_0}},\phi_{\mu_{2l_0+1}},\ldots,\phi_{\mu_l}) \tag{2.9}$$

envoit A_p dans $\mathbb{C}^{l_0}\times\mathbb{R}^{l-2l_0}=\mathbb{R}^l$. Pour chaque $f\in C(K\setminus U/K)$ l'identité

$$\dot{f}(F(\exp iX)) := f(\exp(iX)), \quad X\in\mathfrak{a}_p, \tag{2.10}$$

définit une fonction $\dot{f}$ de $F(A_p)$. Il existe une fonction w indépendante de f telle que

$$\int_U f(u)\,du = \int_{F(A_p)} \dot{f}(x)w(x)\,dx. \tag{2.11}$$

Voir les formules (4.3), (4.5), (4.9) pour une expression explicite de w.

3. La théorie de Hoogenboom des fonctions d'entrelacement sur les groupes de Lie compacts

Ce paragraphe est un résumé du travail de Hoogenboom [12]. On conserve les notations de §2. Soit σ une involution de $\mathfrak{g}$ commutante avec θ. Soit $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{q}$ la décomposition en sous-espaces propres de σ correspondant aux valeurs propres 1 et -1. Si $\mathfrak{a}_{pq}$ est un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$, on le peut compléter par des sous-espaces $\mathfrak{a}_{kq}$ de $\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{a}_{ph}$ de $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}$ de façon que

$$\mathfrak{a}_p := \mathfrak{a}_{ph}+\mathfrak{a}_{pq} \text{ et } \mathfrak{a}_q := \mathfrak{a}_{kq}+\mathfrak{a}_{pq}$$

soient abéliens maximaux dans $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ respectivement.

Lemme 3.1. $[\mathfrak{a}_{ph}\ ,\ \mathfrak{a}_{kq}] = \{0\}$.

On conclut qu'il existe un sous-espace $\mathfrak{a}_{kh}$ de $\mathfrak{k}\cap\mathfrak{h}$ tel que

$$\mathfrak{a} := \mathfrak{a}_{kh}+\mathfrak{a}_{kq}+\mathfrak{a}_{ph}+\mathfrak{a}_{pq}$$

est abélien maximal dans $\mathfrak{g}$.

Les systèmes de racines Φ,Φ_{pq} ont été introduits dans §2. Soient Φ_q et Φ_{pq} les systèmes de racines de $(\mathfrak{g}_C,(\mathfrak{a}_q)_C)$ et $(\mathfrak{g},\mathfrak{a}_{pq})$, respectivement. Rossmann [21] a démontré que Φ_{pq} aussi satisfait les axiomes d'un système de racines. On a les inclusions $\Phi_q\subset(i\mathfrak{a}_{kq}+\mathfrak{a}_{pq})^*$ et $\Phi_{pq}\subset\mathfrak{a}_{pq}{}^*$.

Soit $\lambda\in(i\mathfrak{a}_k+\mathfrak{a}_p)^*$. On utilise les notations (2.1) et

$$\tilde{\tilde{\lambda}}(H) := \lambda(H),\quad H\in i\mathfrak{a}_{kq}+\mathfrak{a}_{pq}, \tag{3.1}$$

$$\hat{\lambda}(H) := \lambda(H),\quad H\in\mathfrak{a}_{pq}, \tag{3.2}$$

et on étend une forme linéaire d'un sous-espace de $i\mathfrak{a}_k+\mathfrak{a}_p$ à un sous-espace plus grand en mettant la forme égale à zéro sur le complément orthogonal. Par suite on a le schéma donné par la Table 1 qui implique la Table 2.

$$\begin{tikzcd}
(i\mathfrak{a}_k+\mathfrak{a}_p)^* \arrow[r, "\tilde{\tilde{}}"] \arrow[d, "\tilde{}"] \arrow[dr, "\hat{}"] & (i\mathfrak{a}_{kq}+\mathfrak{a}_{pq})^* \arrow[d, "\tilde{}"] \\
\mathfrak{a}_p{}^* \arrow[r, "\tilde{\tilde{}}"] & \mathfrak{a}_{pq}{}^*
\end{tikzcd}$$

Table 1

$$\begin{tikzcd}
\Phi\cup\{0\} \arrow[r, "\tilde{\tilde{}}"] \arrow[d, "\tilde{}"] \arrow[dr, "\hat{}"] & \Phi_q\cup\{0\} \arrow[d, "\tilde{}"] \\
\Phi_p\cup\{0\} \arrow[r, "\tilde{\tilde{}}"] & \Phi_{pq}\cup\{0\}
\end{tikzcd}$$

Table 2

On définit des involutions τ_1 et τ_2 de $(i\mathfrak{a}_k+\mathfrak{a}_p)^*$ par (2.2) et

$$(\tau_2\lambda)(H) = -\lambda(\sigma H),\quad H\in i\mathfrak{a}_k+\mathfrak{a}_p. \tag{3.3}$$

En utilisant les inclusions mentionnées ci-dessus on peut écrire

$$\tilde{\tilde{\lambda}}=\tfrac{1}{2}(\lambda+\tau_2\lambda),\quad \hat{\lambda}=\tfrac{1}{4}(\lambda+\tau_1\lambda+\tau_2\lambda+\tau_1\tau_2\lambda),\quad \text{où } \lambda\in(i\mathfrak{a}_k+\mathfrak{a}_p)^*. \tag{3.4}$$

Par suite,

$$\Phi_{pq} = \{\hat{\alpha}\neq 0 \mid \alpha\in\Phi\} = \{\tilde{\tilde{\beta}}\neq 0 \mid \beta\in\Phi_p\},\ \text{etc.}\,.$$

Lemme 3.2. *Si $\alpha\in\Phi$ et $\hat{\alpha}=0$, alors $\tilde{\alpha}=0$ ou $\tilde{\tilde{\alpha}}=0$.*

Proposition 3.3. *On peut choisir des sous-ensembles de racines positives Φ^+, Φ_p^+, Φ_q^+, Φ_{pq}^+ tels que pour tout $\alpha\in\Phi$:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
& \tilde{\alpha}\in\Phi_p^+ \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\hat{\alpha}\in\Phi_{pq}^+ \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \alpha\in\Phi^+. \\
& \tilde{\tilde{\alpha}}\in\Phi_q^+ \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Ces résultats ont été obtenus indépendamment par OSHIMA & SEKIGUCHI [20].
On obtient le résultat suivant comme corollaire du Théorème 2.1:

PROPOSITION 3.4. *Soit* $\lambda \in \Lambda^+$. *Alors* π_λ *est de K-H classe* 1 *si et seulement si*

(i) $\lambda|_{i\mathfrak{a}_k} = 0$, $\lambda|_{i\mathfrak{a}_{kh}+\mathfrak{a}_{pk}} = 0$.

(ii) $(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha) \in \mathbf{Z}_+$ *pour tout* $\alpha \in \Phi_p^+ \cup \Phi_q^+$.

La condition (ii) est équivalente à

(ii)′ $\dfrac{(\lambda,\hat{\alpha})}{(\hat{\alpha},\hat{\alpha})} \in \left[\dfrac{(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha})}{(\hat{\alpha},\hat{\alpha})}\mathbf{Z}_+\right] \cap \left[\dfrac{(\tilde{\tilde{\alpha}},\tilde{\tilde{\alpha}})}{(\hat{\alpha},\hat{\alpha})}\mathbf{Z}_+\right]$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$ t.q. $\hat{\alpha} \neq 0$.

Soit

$$c(\alpha) := \max_{\substack{\beta\in\Phi \\ \hat{\beta}=\alpha}} \left\{ \frac{(\tilde{\beta},\tilde{\beta})}{(\alpha,\alpha)}, \frac{(\tilde{\tilde{\beta}},\tilde{\tilde{\beta}})}{(\alpha,\alpha)} \right\}, \quad \alpha \in \Phi_{pq}. \tag{3.5}$$

Nous verrons qu'on peut réformuler la condition (ii)′ comme

(ii)″ $\dfrac{(\lambda,c(\alpha)\alpha)}{(c(\alpha)\alpha,c(\alpha)\alpha)} \in \mathbf{Z}_+$ pour tout $\alpha \in \Phi_{pq}^+$.

La démonstration de cette équivalence est obtenue par classification des valeurs possibles des produits scalaires de α, $\tau_1\alpha$, $\tau_2\alpha$, $\tau_1\tau_2\alpha$ quand $(\alpha,\tilde{\alpha},\tilde{\tilde{\alpha}},\hat{\alpha}) \in \Phi\times\Phi_p\times\Phi_q\times\Phi_{pq}$. Elles sont données par la Table 3. (Sans perte de généralité on pose $(\alpha,\alpha)=1$.)

	$(\alpha,\tau_1\alpha)$	$(\alpha,\tau_2\alpha)$	$(\alpha,\tau_1\tau_2\alpha)$	$(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha})$	$(\tilde{\tilde{\alpha}},\tilde{\tilde{\alpha}})$	$(\hat{\alpha},\hat{\alpha})$
1)	1	1	1	1	1	1
2a)	1	0	0	1	½	½
2b)	0	1	0	½	1	½
3a)	1	−½	−½	1	¼	¼
3b)	−½	1	−½	¼	1	¼
4)	0	0	1	½	½	½
5)	−½	−½	1	¼	¼	¼
6)	0	0	0	½	½	¼
7)	0	0	−½	½	½	⅛
8a)	−½	0	0	¼	½	⅛
8b)	0	−½	0	½	¼	⅛
9a)	−½	0	½	¼	½	¼
9b)	0	−½	½	½	¼	¼

Table 3

Pour la vérification de cette table on utilise le fait que le système de racines avec involution (Φ,τ_i) est *normal*, i.e., si $\alpha\in\Phi$ alors $\alpha-\tau_i\alpha \notin \Phi$. Dans le cas d'une involution τ_1 il est bien connu que l'on a les possibilités suivantes pour $(\alpha,\tilde{\alpha}) \in \Phi\times\Phi_p$:

1. $\alpha=\tilde{\alpha}$, $2\alpha\notin\Phi_p$;

2. $(\alpha,\alpha)=2(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha})$, $2\tilde{\alpha}\notin\Phi_p$;
3. $(\alpha,\alpha)=4(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha})$, $2\tilde{\alpha}\in\Phi_p$.

Le cas de deux involutions se réduit au cas d'une involution si $\alpha=\tau_1\alpha$, $\tau_2\alpha$ ou $\tau_1\tau_2\alpha$, cf. les cas 1)-5) de la Table 3. Alors il reste les cas où $(\alpha,\tau_1\alpha)=0$ ou $-½$, $(\alpha,\tau_2\alpha)=0$ ou $-½$, $(\alpha,\tau_1\tau_2\alpha)=½,0$ ou $-½$. On peut rejeter quelqu'unes de ces possibilités parce qu'il s'ensuivrait que $(\hat{\alpha},\hat{\alpha})\leq 0$ ou parce qu'on obtiendrait une contradiction avec le Lemme 3.2.

REMARQUE 3.5. La question de l'existence des cas de la Table 3 est intéressante mais pas nécessaire ici. Dans un travail non publié nous avons construit des réalisations minimales (Φ,τ_1,τ_2) pour chaque cas de la table et des réalisations minimales correspondantes $(\mathfrak{g},\theta,\sigma)$.

On déduit de la Table 3 le résultat suivant:

LEMME 3.6. *Soit $\alpha\in\Phi$ tel que $\hat{\alpha}\neq 0$. Alors $(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha})/(\hat{\alpha},\hat{\alpha})$ et $(\tilde{\tilde{\alpha}},\tilde{\tilde{\alpha}})/(\hat{\alpha},\hat{\alpha})$ sont égaux à* 1,2 *ou* 4. *Si l'un des quotients est égal à* 4, *alors $2\hat{\alpha}\in\Phi_{pq}$.*

PROPOSITION 3.7. *Soit $\alpha\in\Phi_{pq}$. Alors $c(\alpha)=1,2$ ou 4. Si $c(\alpha)=4$ alors $2\alpha\in\Phi_{pq}$.*

Par suite, les conditions (i),(ii)′,(ii)″ de la Proposition 3.4 sont toutes équivalentes.

Une troisième reformulation de la condition (ii) peut être donnée en terme de l'ensemble

$$\Phi_{pq}^c := \{c(\alpha)\alpha \mid \alpha\in\Phi_{pq}\}. \tag{3.6}$$

PROPOSITION 3.8. *Φ_{pq}^c est un système de racines.*

La démonstration de cette Proposition utilise le Lemme 3.10, qui est un corollaire du Lemme 3.9:

LEMME 3.9. *Soient W, W_p, W_q, W_{pq} les groupes de Weyl de Φ, Φ_p, Φ_q, Φ_{pq}. Soit $s\in W_{pq}$. Alors il existe $w\in W$ tel que $w\tau_i=\tau_i w$ $(i=1,2)$ et $w|_{\mathfrak{a}_{pq}^*}=s$.*

DÉMONSTRATION. On pose $s:=s_{\hat{\alpha}}$, la réflexion associée à $\hat{\alpha}\in\Phi_{pq}$ (où $\alpha\in\Phi$). En utilisant la Table 3 on construit W en terme de s_α, $s_{\tau_1\alpha}$, $s_{\tau_2\alpha}$, $s_{\tau_1\tau_2\alpha}$. Par exemple:

Cas 2a): $w := s_\alpha s_{\tau_2\alpha}$.

Cas 6): $w := s_\alpha s_{\tau_1\alpha} s_{\tau_2\alpha} s_{\tau_1\tau_2\alpha}$. □

LEMME 3.10. *$c(\alpha)=c(s\alpha)$, où $s\in W_{pq}$, $\alpha\in\Phi_{pq}$.*

Soit

$$\mathfrak{L} := \{\lambda\in\mathfrak{a}_{pq}{}^* \mid (\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha)\in\mathbb{Z} \text{ pour tout } \alpha\in\Phi_{pq}^c\}, \tag{3.7}$$

alors les éléments de $½\mathfrak{L}$ sont les poids de Φ_{pq}^c. Soit

$$\mathfrak{L}^+ := \{\lambda\in\mathfrak{a}_{pq}{}^* \mid (\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha)\in\mathbb{Z}_+ \text{ pour tout } \alpha\in(\Phi_{pq}^c)^+\}, \tag{3.8}$$

La condition (ii)″ de la Proposition 3.4 peut être reformulée de la façon suivante:

(ii)‴ $\lambda\in\mathfrak{L}^+$.

Selon la décomposition généralisée de Cartan, $U=KA_{pq}H$ où $A_{pq}:=\exp(i\mathfrak{a}_{pq})$. Soit $\lambda\in\mathfrak{L}^+$ où $\mathfrak{L}^+$ est donné par (3.7). On peut imiter la démonstration de (2.5) dans le cas d'une fonction d'entrelacement de la forme

$$\phi_\lambda(u) = (\pi_\lambda(u)e_H,e_K), \quad u\in U, \tag{3.9}$$

et on obtient

$$\phi_\lambda(e^{iX}) = \sum_{\mu\in\mathfrak{a}_{pq}^*} c_{\lambda,\mu} e^{i\mu(X)}, \quad X\in\mathfrak{a}_{pq} \text{ (somme finie).} \tag{3.10}$$

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ les racines simples de Φ_{pq}^+. On définit un ordre partiel $\prec$ de $\mathfrak{a}_{pq}{}^*$ par (2.6).

La restriction de ϕ_λ à A_{pq} n'est pas toujours invariante par W_{pq} comme dans le cas (2.7) des fonctions sphériques. Définissons pour $\alpha\in\Phi_{pq}$:

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X\in\mathfrak{g} \mid [H,X]=\alpha(H)X \text{ pour tout } H\in\mathfrak{a}_{pq}\}, \tag{3.11}$$

$$p_\alpha := \dim(\mathfrak{g}_\alpha \cap(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{h}+\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q})), \tag{3.12}$$

$$q_\alpha := \dim(\mathfrak{g}_\alpha \cap(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q}+\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h})). \tag{3.13}$$

PROPOSITION 3.11. *Soit $\alpha\in\Phi_{pq}$, et soit $H_\alpha\in\mathfrak{a}_{pq}$ tel que $\mu(H_\alpha)=2(\mu,\alpha)/(\alpha,\alpha)$ pour tout $\mu\in\mathfrak{a}_{pq}{}^*$. Soient $\lambda\in\mathfrak{L}^+$, $X\in\mathfrak{a}_{pq}$. Alors:*

$$p_\alpha\neq 0 \Rightarrow \phi_\lambda(\exp(is_\alpha X)) = \phi_\lambda(\exp(iX)),$$

$$q_\alpha\neq 0 \Rightarrow \phi_\lambda(\exp(is_\alpha X)) = \phi_\lambda(\exp(iX+\tfrac{1}{2}\pi H_\alpha)),$$

$$p_\alpha\neq 0\neq q_\alpha \Rightarrow (\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha)\in 2\mathbb{Z}.$$

L'analogue de la Proposition 2.2 est donné par:

PROPOSITION 3.12. *Les coefficients $c_{\lambda,\mu}$ dans* (3.10) *satisfont $c_{\lambda,\mu}=c_{\lambda,s_\alpha\mu}$ si $p_\alpha\neq 0$ et*

$$c_{\lambda,\mu} = c_{\lambda,s_\alpha\mu}\exp(\tfrac{1}{2}\pi i(s_\alpha\mu)(H_\alpha)) \text{ si } q_\alpha\neq 0.$$

Si $c_{\lambda,\mu}\neq 0$ on a $w\mu\prec\lambda$ et $w\mu\in\mathfrak{L}$ pour chaque $w\in W_{pq}$. En particulier, $c_{\lambda,\lambda}\neq 0$.

On peut ensuite répéter mot à mot la partie du §2 commençant au Corollaire 2.3, en remplaçant A_p par A_{pq}.

EXEMPLE 3.13. On prend $U:=SU(2)$ et

$$\theta u:=({}^tu)^{-1},\ \sigma u:=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}({}^tu)^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \quad u\in U.$$

Alors

$$K = \left\{\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi\\ -\sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix}\right\},\ H = \left\{\begin{pmatrix}\cos\psi & i\sin\psi\\ i\sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix}\right\}$$

et

$$\mathfrak{k}\cap\mathfrak{h}=\{0\},\ \mathfrak{a}_p=\mathfrak{a}_{pq}=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

On pose $X:=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $a_t:=\exp(itX)$. Alors $A_p=A_{pq}=\{a_t \mid t\in\mathbb{R}\}$. Soit α la forme linéaire de $\mathfrak{a}_{pq}$ définie par $\alpha(X)=1$. Alors $\Phi_{pq}=\{\pm\alpha\}$. On vérifie que $p_\alpha=0$, $q_\alpha=1$, $H_\alpha=X$. Le dual unitaire $\hat{U}$ de U est composé des représentations π_l, où π_l est de dimension $2l+1$ ($l=0,\tfrac{1}{2},1,\ldots$). La représentation π_l est de K-H classe 1 si et seulement si $l\in\mathbb{Z}_+$. On suppose $l\in\mathbb{Z}_+$ et on dénote par ϕ_l la fonction sphérique de (U,K) correspondante et par ψ_l la fonction d'entrelacement de (U,K,H) correspondante. Alors on peut montrer que

$$\phi_l(a_t) = P_l(\cos 2t),\ \psi_l(a_t) = \text{const. } P_l(\cos(2t-\tfrac{1}{2}\pi)),$$

où P_l est le *polynôme de Legendre* (polynôme de Jacobi d'ordre (0,0)). On peut maintenant traduire les invariances de (2.7) et de la Proposition 3.11 par

$$\phi_l(\exp(is_\alpha(tX)) = \phi_l(a_{-t}) = P_l(\cos(-2t)) = P_l(\cos 2t) = \phi_l(\exp(itX))$$

et

$$\psi_l(\exp(is_\alpha(tX)) = \psi_l(a_{-t}) = P_l(\cos(-2t-\tfrac{1}{2}\pi)) = P_l(\cos(2t+\tfrac{1}{2}\pi))$$
$$= \psi_l(a_{t+\frac{1}{2}\pi}) = \psi_l(\exp(itX+\tfrac{1}{2}i\pi H_\alpha)).$$

4. Forme explicite de la mesure d'orthogonalité des polynômes orthogonaux

Considérons la formule (2.11) dans le cas des fonctions d'entrelacement:

$$\int_U f(u)\,du = \int_{F(A_{pq})} \dot{f}(x)w(x)\,dx, \quad f\in C(K\setminus U/H). \tag{4.1}$$

Si la fonction w est définie par (4.1) on déduit que

$$\int_{F(A_{pq})} \phi_\lambda(x)\overline{\phi_\mu(x)}w(x)\,dx = 0, \quad \lambda,\mu\in\mathfrak{L}^+,\ \lambda\neq\mu. \tag{4.2}$$

On peut calculer la fonction w en deux étapes:

$$\int_U f(u)\,du = \text{const.}\int_{A_{pq}} f(a)\delta(a)\,da \tag{4.3}$$
$$=\text{const.}\int_{F(A_{pq})} \dot{f}(x)\,\delta(F^{-1}(x))\,|\det(dF_{F^{-1}(x)})|\,dx, \quad f\in C(K\setminus U/H),$$

où

$$\delta(\exp(iX)) = \prod_{\alpha\in\Phi_{pq}^+} |\sin\alpha(X)|^{p_\alpha}\,|\cos\alpha(X)|^{q_\alpha}, \quad X\in\mathfrak{a}_{pq}\ ; \tag{4.4}$$

c'est une formule analogue à Flensted-Jensen [6, Theorem 2.6] (G non-compact). Quand $\sigma=\theta$, la formule (4.4) se simplifie de la façon suivante:

$$\delta(\exp(iX)) = \prod_{\alpha\in\Phi_p^+} |\sin\alpha(X)|^{\dim\mathfrak{g}_\alpha}, \quad X\in\mathfrak{a}_p. \tag{4.5}$$

Voir la thèse de Helminck [10] pour une classification des valeurs de p_α et q_α, qui peuvent être réalisées par des groupes compacts à deux involutions commutantes.

On peut montrer que le Jacobien $|\det(dF_{F^{-1}(x)})|$ dans (4.3) s'écrit

$$|\det(dF_{\exp(iX)})| = \text{const.}\prod_{\substack{\alpha\in(\Phi_{pq}^+)'\\ p_\alpha\neq 0}} |\sin(k(\alpha)\alpha(X))| \prod_{\substack{\alpha\in(\Phi_{pq}^+)'\\ p_\alpha=0}} |\sin(k(\alpha)(\alpha(X)-\tfrac{1}{2}\pi))|, \quad X\in\mathfrak{a}_{pq}, \tag{4.6}$$

où

$$(\Phi_{pq}^+)' := \{\alpha\in\Phi_{pq}^+ \mid \tfrac{1}{2}\alpha\notin\Phi_{pq}^+\}, \tag{4.7}$$

et $k(\alpha)$ est le nombre entier positif qui satisfait

$$\{(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha) \mid \lambda\in\mathfrak{L}\} = k(\alpha)\mathbb{Z}. \tag{4.8}$$

Alors $k(\alpha)=1,2$ ou 4. Dans le cas $\sigma=\theta$ la formule (4.6) se simplifie comme suit:

$$|\det(dF_{\exp(iX)})| = \text{const.}\prod_{\substack{\alpha\in\Phi_p^+\\ 2\alpha\notin\Phi_p}} |\sin\alpha(X)|, \quad X\in\mathfrak{a}_p. \tag{4.9}$$

5. UNE AUTRE CARACTÉRISATION DES POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Considérons la fonction d'entrelacement ϕ_λ donnée par (3.9) et dont la restriction à A_{pq} est donnée par (3.10) et la Proposition 3.12. Les formules (3.9) et (3.10) ont des prolongements analytiques complexes dans G_C et $\exp((\mathfrak{a}_{pq})_C)$. En particulier,

$$\phi_\lambda(g) = (\pi_\lambda(g)e_H, e_K), \quad g \in G, \tag{5.1}$$

$$\phi_\lambda(e^X) = \sum_{\mu \prec \lambda} c_{\lambda,\mu} e^{\mu(X)}, \quad X \in \mathfrak{a}_{pq}, \tag{5.2}$$

où G est le sous-groupe analytique de G_C correspondant à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. La fonction ϕ_λ est uniquement déterminée par sa restriction à $\exp(\mathfrak{a}_{pq})$. Nous donnerons une caractérisation de cette restriction.

Comme π_λ est une représentation irréductible (de dimension finie) de G, la fonction ϕ_λ donnée par (5.1) est fonction propre de l'opérateur de Casimir ω de G. La partie radiale $\Delta(\omega)$ de cet opérateur agissant sur une fonction f invariante par K à gauche et par $H_C \cap G$ à droite se calcule en utilisant HELGASON [9, Theorem II.3.7] et FLENSTED-JENSEN [6, (2.12)]:

$$(\Delta(\omega)f)(e^X) = \left\{ \sum_{j=1}^{l} X_j^2 + \sum_{\alpha \in \Phi_{pq}^+} \Big[p_\alpha \coth(\alpha(X)) + q_\alpha \operatorname{th}(\alpha(X)) \Big] A_\alpha \right\} f(e^X), \quad X \in \mathfrak{a}_{pq},$$

où $X_1, \ldots, X_l$ est une base orthonormale de $\mathfrak{a}_{pq}$ par rapport à la forme de Killing et $A_\alpha \in \mathfrak{a}_{pq}$ satisfait $\mu(A_\alpha) = (\mu, \alpha)$ pour tout $\mu \in (\mathfrak{a}_{pq})^*$.

THÉRÈME 5.1. *La fonction P est la restriction à $\exp(\mathfrak{a}_{pq})$ d'une fonction d'entrelacement ϕ_λ de (U,K,H) si et seulement si*

(i) $P(e^X) = \sum_{\mu \prec \lambda} c_{\lambda,\mu} e^{\mu(X)}, \quad X \in \mathfrak{a}_{pq}$ *(somme finie, $c_{\lambda,\lambda} \neq 0$),*

(ii) $\Delta(\omega)P = \nu P$ *pour un certain nombre ν.*

La valeur propre ν s'exprime en fonction de λ par

$$\nu = (\lambda, \lambda + \sum_{\alpha \in \Phi_{pq}^+} (p_\alpha + q_\alpha)\alpha). \tag{5.3}$$

Dans le cas où $\sigma = \theta$ ($q_\alpha = 0$ pour tout α), le théorème est un corollaire de la théorie de Harish-Chandra sur les développements des fonctions sphériques, cf. HELGASON [9, p.427]. L'équation (ii) du Théorème 5.1 impose des relations de récurrence entre les coefficients $c_{\lambda,\mu}$. Par suite, $c_{\lambda,\mu}$ est déterminé par $c_{\lambda,\lambda}$. Dans le cas général la démonstration est analogue.

Si $q_\alpha = 0$ et $p_\alpha \geq 0$, mais ne correspondent pas nécessairement à une paire (U,K), et si ν est donné par (5.3), où $\lambda \in \mathfrak{L}^+$, VAN DEN DRIES [4] a prouvé que les conditions (i) (où $P(e^X)$ n'est pas a priori une somme finie) et (ii) du Théorème 5.1 déterminent de façon unique une fonction P_λ et que cette fonction, qui est invariante par W_p, est donnée par une somme finie. Ces fonctions sont mutuellement orthogonales sur A_p par rapport à la mesure $\delta(\exp(iX))\, dX$ (cf. (4.4), $q_\alpha = 0$) si leurs valeurs propres sont différentes, mais dans les cas sans interprétation sur (U,K) on ne sait pas en général si deux fonctions P_λ, P_μ ($\lambda \neq \mu$) correspondant aux mêmes valeurs propres sont orthogonales. (Voir aussi §7.) Les résultats de VAN DEN DRIES [4] se généralisent probablement au cas où $q_\alpha > 0$.

6. LE CAS $\dim(\mathfrak{a}_{pq}) = 1$

On suppose $\dim(\mathfrak{a}_{pq}) = 1$. Alors $\Phi_{pq} = \{\pm\alpha\}$ ou $\{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ et $\mathfrak{L}^+$ est engendré par $k(\alpha)\alpha$. On prend $X_0 \in \mathfrak{a}_{pq}$ tel que $\alpha(X_0) = 1$. Alors

$$\phi_{k(\alpha)\alpha}(\exp(itX_0)) = \begin{cases} a\cos(k(\alpha)t) + b & \text{si } p_\alpha > 0 \text{ ou } k(\alpha) > 1, \\ a\cos(t + \tfrac{1}{2}\pi) + b & \text{si } p_\alpha = 0 \text{ et } k(\alpha) = 1. \end{cases}$$

Il s'ensuit que ϕ_λ $(\lambda\in\mathfrak{L}^+)$ doit être de la forme

$$\phi_\lambda(\exp(itX_0)) = \begin{cases} \dot\phi_\lambda(\cos(k(\alpha)t) \text{ si } p_\alpha>0 \text{ ou } k(\alpha)>1, \\ \dot\phi_\lambda(\cos(t+\tfrac{1}{2}\pi)) \text{ si } p_\alpha=0 \text{ et } k(\alpha)=1, \end{cases}$$

et que les fonctions $\dot\phi_\lambda$ sont orthogonales. En particulier, si $p_\alpha>0$ ou $k(\alpha)>1$ et si $\lambda\neq\mu$:

$$\int_{-1}^{1} \dot\phi_\lambda(\cos(k(\alpha)t))\, \overline{\dot\phi_\mu(\cos(k(\alpha)t))}\, \left| \frac{(\sin t)^{p_\alpha}(\cos t)^{q_\alpha}(\sin(2t))^{p_{2\alpha}}(\cos(2t))^{q_{2\alpha}}}{\sin(k(\alpha)t)} \right| d\cos(k(\alpha)t) = 0.$$

Apparemment cette orthogonalité est plus générale que celle des polynômes de Jacobi, mais on peut montrer qu'il existe des conditions restrictives sur $p_\alpha, q_\alpha, p_{2\alpha}, q_{2\alpha}$, même dans le cas où dim $\mathfrak{a}_{pq}$ a une dimension arbitraire.

LEMME 6.1. *Soit* $\alpha\in\Phi_{pq}$. *Alors:*
(i) $k(\alpha)=1 \Leftrightarrow 2\alpha\notin\Phi_{pq}$ *et* p_α *ou* $q_\alpha=0$;
(ii) $k(\alpha)=2 \Rightarrow q_{2\alpha}=0$;
(iii) $k(\alpha)=4 \Rightarrow p_\alpha=q_\alpha$.

Par suite les fonctions d'entrelacement dans le cas où dim $(\mathfrak{a}_{pq})=1$ s'expriment comme des polynômes de Jacobi.

7. Théorie rudimentaire des polynômes orthogonaux généraux liés à un système de racines

Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^*$ des espaces linéaires réels en dualité de dimension l avec des produits scalaires compatibles. Soit Φ un système de racines de rang l dans $\mathfrak{a}^*$ et soit W le groupe de Weyl associé, qui opère aussi dans $\mathfrak{a}$ par dualité. Soit Φ^+ un choix des racines positives dans Φ. On considère l'*alcôve*

$$\mathcal{C} := \{X\in\mathfrak{a} \mid 0<\alpha(X)<\pi \text{ pour tout } \alpha\in\Phi^+\}. \tag{7.1}$$

On dénote par Γ (*groupe de Weyl affine*) le groupe généré par les réflexions par rapport aux murs de l'alcôve $\mathcal{C}$. Le groupe Γ est le produit semi-direct de W par le groupe des translations de vecteur $v\in\ell$, où

$$\ell := \mathbb{Z}-\text{span}\, \{\frac{2\pi}{(\lambda,\lambda)}A_\lambda \mid \lambda\in\Phi\}. \tag{7.2}$$

Ici $A_\lambda\in\mathfrak{a}$ est tel que $\mu(A_\lambda)=(\lambda,\mu)$ pour tout $\mu\in\mathfrak{a}^*$.
Soient

$$\mathfrak{L} := \{\lambda\in\mathfrak{a}^* \mid (\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha)\in\mathbb{Z} \text{ pour tout } \alpha\in\Phi\}, \tag{7.3}$$

$$\mathfrak{L}^+ := \{\lambda\in\mathfrak{a}^* \mid (\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha)\in\mathbb{Z}_+ \text{ pour tout } \alpha\in\Phi^+\}. \tag{7.4}$$

L'espace $\mathfrak{T}$ des *polynômes trigonométriques* de $\mathfrak{a}$ par rapport à Φ se compose des fonctions

$$F(X) = \sum_{\lambda\in\mathfrak{L}} c_\lambda e^{i\lambda(X)}, \quad X\in\mathfrak{a} \text{ (somme finie)}. \tag{7.5}$$

Les fonctions dans $\mathfrak{T}$ sont invariantes par rapport aux translations de ℓ et elles sont invariantes par Γ si et seulement si elles sont invariantes par W. On dénote par $\mathfrak{T}_W$ les éléments W-invariants de $\mathfrak{T}$. Une base de $\mathfrak{T}_W$ est donnée par les "monômes"

$$M_\lambda(X) := \sum_{s\in W} e^{is\lambda(X)}, \quad X\in\mathfrak{a}_p, \tag{7.6}$$

où λ parcourt $\mathfrak{L}^+$. Les fonctions dans $\mathfrak{T}_W$ sont complètement déterminées par leurs restrictions à $\mathcal{C}$.
Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_l$ les racines simples de Φ^+. On définit un ordre partiel $\prec$ de $\mathfrak{a}^*$ par:

$$\mu_1 \prec \mu_2 \Leftrightarrow \mu_2 - \mu_1 = \sum_j m_j \alpha_j \quad \text{avec } m_j \in \mathbb{Z}_+. \tag{7.7}$$

Soit $\alpha \mapsto m_\alpha : \Phi_p \to \mathbb{R}_+$ tel que

$$m_{s\alpha} = m_\alpha \quad \text{pour tout } s \in W. \tag{7.8}$$

C'est une fonction de multiplicité généralisée. Soit

$$\delta_m(X) := \prod_{\alpha\in\Phi^+} (\sin\alpha(X))^{m_\alpha}, \quad X \in \mathcal{C}. \tag{7.9}$$

Nous voulons définir des polynômes trigonométriques W-invariants orthogonaux sur $\mathcal{C}$ pour la fonction de poids δ_m et l'ordre partiel $\prec$. Un choix naturel et canonique est la définition suivante:

DÉFINITION 7.1. Soit $\lambda \in \mathcal{L}^+$. Alors P_λ^m est l'élément unique de $\mathcal{T}_W$ qui satisfait les deux conditions

(i) $P_\lambda^m = \sum_{\substack{\mu \prec \lambda \\ \mu\in\mathcal{L}^+}} c_{\lambda,\mu}^m M_\mu$, où $c_{\lambda,\mu}^m \in \mathbb{C}$, $c_{\lambda,\lambda}^m = 1$.

(ii) $\int_{\mathcal{C}} P_\lambda^m(X)\, \overline{M_\mu(X)}\, \delta_m(X)\, dX = 0$ si $\lambda \neq \mu \in \mathcal{L}^+$, $\mu \prec \lambda$.

On déduit immédiatement que

$$\int_{\mathcal{C}} P_\lambda^m(X)\, \overline{P_\mu^m(X)}\, \delta_m(X)\, dX = 0 \tag{7.10}$$

si $\lambda,\mu \in \mathcal{L}^+$, $\lambda \neq \mu$ et $\lambda \prec \mu$ ou $\mu \prec \lambda$.

CONJECTURE 7.2. *L'orthogonalité* (7.10) *est vraie pour tous les* $\lambda,\mu\in\mathcal{L}^+$ *tels que* $\lambda\neq\mu$.

Si $\mathfrak{a},\Phi,W$ sont remplacés par $\mathfrak{a}_p,\Phi_p,W_p$, si ses derniers objets ont les propriétés du §2 et si $m_\alpha := \dim \mathfrak{g}_\alpha$, alors il s'ensuit de la Proposition 2.2, du Théorème 2.4(ii) et des formules (4.3) et (4.5) que const. P_λ^m s'identifie avec la restriction de la fonction sphérique ϕ_λ à $\mathfrak{a}_p$ et que la Conjecture 7.2 est vraie dans ce cas.

Nous considérons aussi un ordre complet $<$ de $\mathcal{L}^+$ qui satisfait les propriétés (i) $\lambda \leqslant \mu$ si $\lambda \prec \mu$ et (ii) $\{\mu\in\mathcal{L}^+ \mid \mu\leqslant\lambda\}$ est un ensemble fini pour tout $\lambda\in\mathcal{L}^+$. Une forme équivalente de la Conjecture 7.2 est maintenant:

CONJECTURE 7.2′. *Soit* $\lambda\in\mathcal{L}^+$. *Soit* Q_λ^m *l'élément unique de* $\mathcal{T}_W$ *qui satisfait les deux conditions*

(i) $Q_\lambda^m = \sum_{\substack{\mu\leqslant\lambda \\ \mu\in\mathcal{L}^+}} d_{\lambda,\mu}^m M_\mu$, *où* $d_{\lambda,\mu}^m \in \mathbb{C}$, $d_{\lambda,\lambda}^m = 1$.

(ii) $\int_{\mathcal{C}} Q_\lambda^m(X)\, \overline{M_\mu(X)}\, \delta_m(X)\, dX = 0$ *si* $\lambda > \mu \in \mathcal{L}^+$.

Alors $Q_\lambda^m = P_\lambda^m$.

Soit Δ l'opérateur de Laplace de $\mathfrak{a}$ (par rapport au produit scalaire). Tout élément Y de $\mathfrak{a}$ peut être identifié à un opérateur différentiel de $\mathfrak{a}$ par la formule

$$(Yf)(X) := \frac{d}{dt} f(X+tY)|_{t=0}\,, \quad X\in\mathfrak{a}.$$

Soit $\Delta_1^{(m)}$ l'opérateur différentiel de $\mathcal{C}$ défini par

$$(\Delta_1^{(m)} f)(X) := \left[\Delta + \sum_{\alpha\in\Phi^+} m_\alpha \coth\alpha(X)\, A_\alpha\right] f(X), \quad X\in\mathcal{C}. \tag{7.11}$$

Soit
$$\rho_m := \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} m_\alpha \alpha. \tag{7.12}$$

THÉORÈME 7.3 (VAN DEN DRIES [4]). *Soit* $\lambda \in \mathcal{L}^+$. *Alors* P_λ^m *satisfait:*

(ii)′ $\Delta_1^{(m)} P_\lambda^m = -(\lambda, \lambda + 2\rho_m) P_\lambda^m$.

La condition (ii)′ *et la condition* (i) *de la Définition* 7.1 *déterminent* P_λ^m *uniquement.*

L'opérateur $\Delta_1^{(m)}$ est autoadjoint par rapport à la fonction de poids δ_m:
$$\int_{\mathcal{C}} (\Delta_1^{(m)} f)(X)\, \overline{g(X)}\, \delta(X)\, dX = \int_{\mathcal{C}} f(X)\, \overline{(\Delta_1^{(m)} g)(X)}\, \delta(X)\, dX, \quad f, g \in \mathcal{T}_W \tag{7.13}$$

et
$$\Delta_1^{(m)} M_\lambda = \sum_{\mu < \lambda} a_{1,\lambda,\mu}^m M_\mu, \quad \lambda \in \mathcal{L}^+, \text{ où } a_{1,\lambda,\mu}^m \in \mathbf{C} \text{ et } a_{1,\lambda,\lambda}^m = -(\lambda, \lambda + 2\rho_m). \tag{7.14}$$

Si les valeurs propres $a_{1,\lambda,\lambda}^m$ sont toutes différentes, alors la Conjecture 7.2 est satisfaite, mais cette condition n'est pas vraie pour tout m.

Dans le cas de valeurs de m où P_λ^m est la restriction d'une fonction sphérique, alors $\Delta_1^{(m)}$ est la partie radiale de l'opérateur de Laplace-Beltrami de U/K, cf. §5. Dans ce cas on a également la conjecture suivante:

CONJECTURE 7.4. *Il existe des opérateurs différentiels* $\Delta_j^{(m)}$ $(j = 1, \ldots l)$ *de* $\mathcal{C}$, *commutants, mutuellement indépendants algébriquement, autoadjoints par rapport à* δ_m, *tels que* $\Delta_1^{(m)}$ *est donné par* (7.12) *et*
$$\Delta_j^{(m)} M_\lambda = \sum_{\mu < \lambda} a_{j,\lambda,\mu}^m M_\mu, \quad \lambda \in \mathcal{L}^+, \ j = 1, \ldots, l,$$

où $a_{j,\lambda,\mu}^m \in \mathbf{C}$ *et l'application*
$$\lambda \mapsto (a_{1,\lambda,\lambda}^m, \ldots, a_{l,\lambda,\lambda}^m) \colon \mathcal{L}^+ \to \mathbf{C}^n$$

est injective.

La Conjecture 7.4 impliquerait que
$$\Delta_j^{(m)} P_\lambda^m = a_{j,\lambda,\lambda}^m P_\lambda^m, \quad \lambda \in \mathcal{L}^+, \ j = 1, \ldots, l$$

et que les Conjectures 7.2, 7.2′ sont satisfaites.

Probablement, la Conjecture 7.4 peut être vérifiée pour des valeurs de m plus générales en utilisant les résultats de Hoogenboom du §3.

Dans le cas où $m_\alpha = \dim \mathfrak{g}_\alpha$, attaché à U/K, la Conjecture 7.4 est vraie parce que les opérateurs $\Delta_j^{(m)}$ peuvent être choisis comme les parties radiales de l'algèbre $\mathfrak{D}(U/K)$ des opérateurs différentiels invariants de U/K. La Conjecture 7.4 est vérifiée pour tout m dans le cas des systèmes de racines suivants:

1. A_1 (trivial).
2. BC_2, cf. [14].
3. A_l, cf. [15] dans le cas où $l=2$. Dans le cas où $l>2$ SEKIGUCHI [22] a donné une expression explicite des parties radiales de l générateurs de l'algèbre $\mathfrak{D}(U/K)$. Mais sa démonstration est esquissée et difficile à comprendre. Une démonstration complète des résultats de Sekiguchi a été donnée par I.G. MACDONALD pendant sa visite récente aux Pays-Bas. Il a même établi la Conjecture 7.4 pour A_l quand m est arbitraire (des résultats pas encore publiés). DÉBIARD [3] a donné une expression explicite différente pour les opérateurs $\Delta_j^{(m)}$ dans le cas A_l, mais sans démonstration.

Bien sûr, en utilisant l'application F donnée par (2.9), on peut traduire les résultats et conjectures de ce paragraphe en terme des polynômes orthogonaux de plusieurs variables, comme il a été fait dans [14], [15] pour les cas BC_2 et A_2. Mais dans le cas général la formulation présente est plus facile et élégante parce qu'il est difficile de donner une description explicite du domaine $F(\mathcal{C})$.

Nous remercions Danielle Hilhorst-Goldman et Erik Thomas pour leur avis linguistique et Han Noot pour son avis typographique.

REFERENCES

1. B.L.J. BRAAKSMA and B. MEULENBELD (1968). Jacobi polynomials as spherical harmonics. *Indag. Math. 30*, 384-389.
2. E. CARTAN (1929). Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos. *Rend. Circ. Mat. Palermo 53*, 217-252.
3. A. DÉBIARD (1983). Polynômes de Tchébychev et de Jacobi dans un espace euclidien de dimension p. *C. R. Acad. Sc. Paris, Série I 296*, 529-532.
4. R.J.C.H. VAN DEN DRIES (1985). Spherical functions on compact symmetric spaces I. *Delft Progress Report 10*, 74-83.
5. C.F. DUNKL (1977). Spherical functions on compact groups and applications to special functions. *Symposia Mathematica 22*, 145-161, Academic Press.
6. M. FLENSTED-JENSEN (1980). Discrete series for semisimple symmetric spaces. *Ann. Math. 111*, 253-311.
7. M. FLENSTED-JENSEN (to appear). *Analysis on non-Riemannian symmetric spaces*, Regional Conference Series in Math., American Mathematical Society.
8. S. HELGASON (1978). *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press.
9. S. HELGASON (1984). *Groups and geometric analysis*, Academic Press.
10. A.G. HELMINCK (1985). *Algebraic groups with a commuting pair of involutions and semisimple symmetric spaces,* Dissertation, University of Utrecht.
11. B. HOOGENBOOM (1983). *Intertwining functions on compact Lie groups,* Dissertation, University of Leiden.
12. B. HOOGENBOOM (1984). *Intertwining functions on compact Lie groups*, CWI Tract 5, Centre for Math. and Computer Science, Amsterdam.
13. A.T. JAMES and A.G. CONSTANTINE (1974). Generalized Jacobi polynomials as spherical functions of the Grassmann manifold. *Proc. London Math. Soc. 29*, 174-192.
14. T.H. KOORNWINDER (1974). Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators I,II. *Indag. Math. 36*, 48-58, 59-66.
15. T.H. KOORNWINDER (1974). Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators III,IV. *Indag. Math. 36*, 357-369, 370-381.
16. T.H. KOORNWINDER (1975). Two-variable analogues of the classical orthogonal polynomials. R. ASKEY (eds.). *Theory and Application of Special Functions*, 435-495, Academic Press.
17. T.H. KOORNWINDER (1977). Harmonics and spherical functions on Grassmann manifolds of rank two and two-variable analogues of Jacobi polynomials. W. SCHEMPP, K. ZELLER (eds.). *Constructive theory of functions of several variables*, 141-154, Lecture Notes in Math. 571, Springer.
18. T.H. KOORNWINDER and I.G. SPRINKHUIZEN (1978). Generalized power series expansions for a class of orthogonal polynomials in two variables. *SIAM J. Math. Anal. 9*, 457-483.
19. M.A. KOWALSKI (1982). The recursion formulas for orthogonal polynomials in n variables. Orthogonality and recursion formulas for polynomials in n variables. *SIAM J. Math. Anal. 13*, 309-315, 316-323.
20. T. OSHIMA and J. SEKIGUCHI (1984). The restricted root system of a semisimple symmetric pair. K. OKAMOTO (eds.). *Group Representations and Systems of Differential Equations*, 433-496, Advanced Studies in Pure Math. 4, North-Holland.
21. W. ROSSMANN (1979). The structure of semisimple symmetric spaces. *Can. J. Math. 31*, 157-180.

22. J. Sekiguchi (1977). Zonal spherical functions on some symmetric spaces. *Proceedings of Oji seminar on algebraic analysis*, 455-459, Publ. RIMS Kyoto University, 12 Suppl..
23. I.G. Sprinkhuizen (1976). Orthogonal polynomials in two variables. A further analysis of the polynomials orthogonal on a region bounded by two lines and a parabola. *SIAM J. Math. Anal.* *7*, 501-518.
24. L. Vretare (1976). Elementary spherical functions on symmetric spaces. *Math. Scand.* *39*, 343-358.
25. L. Vretare (1984). Formulas for elementary spherical functions and generalized Jacobi polynomials. *SIAM J. Math. Anal.* *15*, 805-833.