Opgaven behandeld bij het werkcollege van Functionaalanalyse,

januari–maart 2005

1.4 Laat zien dat er geen inproduct bestaat op $C([0,1])$ dat de sup-norm induceert. Idem voor $L^1((0,1))$ en de L^1-norm.

1.5 Welke van de hieronder beschreven functies definieert een inproduct op de ruimte van reëelwaardige, 2 keer continu differentieerbare functies $C^2([0,1])$?

a. $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$

b. $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt + f(0)g(0)$

c. $\langle f,g\rangle = \int_0^1 (f'(t)g(t) + g'(t)f(t))\,dt$

d. $\langle f,g\rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t) + f''(t)g''(t))\,dt$.

Welke van deze inprodukten maakt van $C^2([0,1])$ een Hilbertruimte?

1.10 Bewijs dat l^∞ niet separabel is. Idem voor $L^\infty([a,b])$, hoe zit het met c_0?

2.5 Onderzoek welke van de volgende stelsels een orthogonale basis vormen in de genoemde ruimten:

1. $\{\cos nx, \sin mx : n = 0,1,\ldots; m = 1,2,\ldots\}$ in $L^2([-\pi,\pi])$.
2. $\{\sin mx :\ m = 1,2,\ldots\}$ in $L^2([0,\pi])$.
3. $\{\cos mx :\ m = 1,2,\ldots\}$ in $L^2([0,\pi])$.

2.10 Orthogonaliseer de rij $1, x, x^2, x^3, x^4$ in $L^2([-1,1])$.

2.11 Bepaal het polynoom P van graad 4 dat de functie $|x|$ het best benadert in $L^2([-1,1])$.

2.14 Laat P_n een reëelwaardig polynoom van graad n zijn. Veronderstel dat $\int_{-1}^1 P_n Q = 0$ voor alle polynomen Q van graad $< n$. Bewijs dat P_n ten minste, en dus precies n keer van teken wisselt op $(-1,1)$. Concludeer dat $P_n(1) \neq 0$.

§3.5 Voorbeelden en Vraagstukken betreffende begrensde operatoren

§3.5:2 $V = \mathbb{C}^m$, $W = \mathbb{C}^n$, A een $m \times n$ matrix, L de door A geïnduceerde lineaire afbeelding.

§3.5:4 $V = C([0,1])$, $W = \mathbb{C}$. Voor $0 \leq x \leq 1$ definieert men $L_x f = f(x)$. Deze functionaal heet *puntevaluatie* (in x).

§3.5:5 $V = W = l^2(\mathbb{N})$. De "linker shift" operator L_l wordt als volgt gedefinieerd:

$$L_l(x_1, x_2, x_3 \cdots) = (x_2, x_3, \cdots).$$

De "rechter shift" operator definieert men door

$$L_r(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Bepaal hun norm en bereken $L_l L_r$ en $L_r L_l$.

§3.5:6 $V = W = L^2([0,1])$. *Multiplier operatoren* zijn operatoren van de vorm $L : f \to af$ waarbij $a \in L^\infty([0,1])$. Wat is de norm? Veronderstel dat a differentieerbaar is op $[0,1]$; onderzoek wanneer L inverteerbaar is.

§3.5:7 V is een Hilbertruimte met inproduct $\langle\ ,\ \rangle$, $W = \mathbb{K}$. Voor $y \in V$ definiëren we de functionaal $f_y(x) = \langle x, y\rangle$. Bepaal de norm van f_y; wordt deze aangenomen, d.w.z. is er een x met $|f_y(x)| = \|f_y\|\,\|x\|$?

3.1 Laat L een CLF op een Banachruimte X zijn. Bewijs dat er een $u \in X$ bestaat zo dat er voor alle $x \in X$ er een $t \in \mathbb{K}$ en een $v \in \mathrm{Ker}L$ zijn met $x = tu + v$.

3.2 Laat H de completering van de ruimte van eenmaal continu differentieerbare functies $C^1([-1,1])$ zijn onder het inproduct

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} (f\bar{g} + f'\bar{g}')\,dx.$$

Laat zien dat voor een rij $\{f_j\}$ in $C^1([-1,1])$ het Cauchy zijn in H impliceert dat de rij $\{f_j\}$ uniform op $[-1,1]$ convergeert. Concludeer dat elementen van H door continue functies kunnen worden voorgesteld. Laat zien dat $f \mapsto f(0)$ een CLF op H is en (moeilijker*) bepaal $g \in H$ die deze functionaal representeert.

4.2 Gegeven een begrensd rijtje $\{t_j\}$ in $\mathbb{C}$. Beschouw de operator $L : l^2 \to l^2$, gedefinieerd door $L(x_1, x_2, \ldots) = (t_1x_1, t_2x_2, \ldots)$. Bepaal de norm van L. Voor welke rijtjes is L compact? Voor welke rijtjes is L zelfgeadjungeerd?

4.3 Laat zien dat Hilbert-Schmidt operatoren (zie Voorbeeld 3.4) op $L^2([a,b])$ compact zijn. *Aanwijzing*: Het is voldoende om dit voor $[a,b] = [-\pi,\pi]$ te bewijzen. Laat zien dat de functies $(x,y) \to e^{inx+imy}$ $(n,m \in \mathbb{Z})$ een orthogonale basis vormen voor $L^2([-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi])$ en bekijk de ontwikkeling van de kern t.o.v. deze basis.

4.13 Bewijs dat de gesloten eenheidsbal in een oneindig-dimensionale genormeerde vectorruimte X niet compact is, door een rij in $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ in X te construeren met $\|a_n\| = 1$ en met de afstand van a_n tot $\mathrm{Span}(a_1, \ldots, a_{n-1})$ gelijk 1. Concludeer dat de identiteitsoperator op een oneindig-dimensionale genormeerde vectorruimte geen compacte operator is.

4.16 Geef een voorbeeld van een BLO $L\colon H \to H$ (H een separabele oneindig-dimensionale Hilbertruimte) zo dat het supremum in $\|L\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Lx\|$ niet wordt aangenomen (ook al is de verzameling $\{Lx \mid \|x\| \le 1\}$ gesloten).

4.17 Bewijs dat voor een begrensde lineaire operator L op een Hilbertruimte geldt dat $\|L^*L\| = \|L\|^2$ (aanvulling op Stelling 4.10). (Ten gevolge van deze formule vormen de BLO's op een Hilbertruimte H een zogenaamde C^*-*algebra*.)

5.4 Laat zien dat de continu differentieerbare functies een dichte deelverzameling van de eerste categorie vormen in $C([0,1])$ met de uniforme norm. Kun je ook een "direct" bewijs geven?

5.5* Laat D_n de n-de Dirichletkern geëvalueerd in 0 zijn, beschouwd als begrensde lineaire functionaal op $\{f \in C([-\pi, \pi]) : f(-\pi) = f(\pi)\}$ met sup-norm. Laat zien dat de normen van D_n onbegrensd zijn. Leid hieruit af dat er 2π-periodieke continue functies bestaan met een Fourierreeks die niet convergeert voor $x = 0$.

6.1 Geef met behulp van Stelling 3.6 korte bewijzen van de Stellingen 6.1, 6.3 en 6.6 in het geval dat X een Hilbertruimte is.

6.2 Geef een voorbeeld van een 2-dimensionale genormeerde reële vectorruimte X met 1-dimensionale deelruimte Y, een lineaire functionaal f op Y en een punt y_1 in X buiten Y zo dat f geen uitbreiding heeft tot een lineaire functionaal f_1 op X met $f_1(y_1) = 0$ en $\|f_1\| = \|f\|$.

8.1 Bewijs dat de zwakke topologie op een genormeerde lineaire ruimte X Hausdorff is.

8.3 Bewijs dat een gesloten lineaire deelruimte van een genormeerde lineaire ruimte ook zwak gesloten is.

8.4 Bewijs Propositie 8.6.

8.5 Zij X een (noodzakelijk niet-reflexieve) Banachruimte met een $f \in X^*\backslash\{0\}$ zo dat het beeld $f(B)$ van de gesloten eenheidsbal B in X niet gesloten is in $\mathbb{K}$. Laat zien dat dan $f(B) = \{z \in \mathbb{K} : |z| < \|f\|\}$. Geef dan ook een zwak open overdekking van B zonder eindige deeloverdekking, wat nog eens laat zien dat in dat geval B niet zwak compact is.

7.5 Geef een voorbeeld van een continue lineaire functionaal ϕ op $C([0, 1])$ (reëelwaardig) t.o.v. de sup-norm (een niet-reflexieve Banach-ruimte) zo dat het beeld onder ϕ van de gesloten eenheidsbal in $C([0, 1])$ niet gesloten is in $\mathbb{R}$.

8.6 Geef een $f \in X^*$ en een open overdekking van B met eigenschappen als in Opgave 8.5 meer expliciet als X een van de volgende Banachruimten is met $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

(a) $X = C([0, 1])$ (zie Opgave 7.5);

(b) $X = c_0$;

(c) $X = \{x \in l^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n \text{ bestaat}\}$.

9.6 Laat $L : L^2([0, 1]) \to L^2([0, 1])$, $(Lf)(x) = xf(x)$. Laat zien dat L zelfgeadjungeerd is. Wat is de norm? Is L compact? Heeft L eigenwaarden? Is L surjectief, wat kun je zeggen over $R(L)$?

9.8 Kan een compacte operator een inverse hebben?

10.6 Zij L zelfgeadjungeerd op H. Bewijs: L^2 compact $\Rightarrow$ L compact. Is dit ook waar zonder zelfgeadjungeerdheid?

11.1 Laat L een positieve compacte operator zijn op een Hilbertruimte H. De eigenwaarden zijn in afnemende grootte: $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$. Bewijs dat

$$\lambda_1 = \min_{V_1} \max_{\substack{x \perp V_1 \\ x \in S}} \langle Lx, x \rangle,$$

waarbij V_1 loopt over alle 1-dimensionale deelruimten van H. Bewijs meer algemeen dat

$$\lambda_j = \min_{V_j} \max_{\substack{x \perp V_j \\ x \in S}} \langle Lx, x \rangle,$$

waarbij V_j loopt over alle j-dimensionale deelruimten van H.

11.2 Gebruik Opgave 11.1 om te bewijzen:

a. Als $L_1 \geq L_2$ positieve compacte operatoren zijn, met eigenwaarden in afnemende grootte $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, resp. $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$. Dan geldt voor alle j dat $\lambda_j \geq \mu_j$.

b. Indien nu $\|L_1 - L_2\| < \epsilon$, dan ook $\lambda_j - \mu_j < \epsilon$.

12.2 Beschouw de Sturm-Liouville operator $Lu = -u''$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$. Bepaal de Green-functie en de eigenparen. Idem voor $Lu = -u''$, $u(0) = 0$, $u(1) = 2u'(1)$ en voor $Lu = -u''$, $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$.