Syllabus Analyse A3

door T. H. Koornwinder

Universiteit van Amsterdam, Faculteit WINS

Vakgroep Wiskunde, cursus 1995/96

Ter inleiding

Deze syllabus is een direct vervolg op de syllabus Analyse A. Net als daar gaat het in de huidige syllabus om analyse op $\mathbb{R}$, dus om rijen en reeksen van reële of eventueel complexe getallen, en om functies gedefinieerd op deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. In vergelijking met Analyse A zal er echter nog meer nadruk worden gelegd op precieze bewijzen van stellingen. Deze precisie wordt mogelijk gemaakt doordat we in het eerste hoofdstuk een goede fundering van de reële getallen zullen geven. Er zal blijken dat een aantal stellingen uit Analyse A op grond van die fundering precies bewezen kunnen worden.

Je moet nu niet denken dat de huidige syllabus voornamelijk een meer rigoureuze herhaling is van de syllabus Analyse A. Het is eerder zo dat hier allerlei aanvullingen zullen worden gegeven bij bij de eerder behandelde stof over rijen, continuïteit, reeksen en Riemann-integraal. Doorgaans zullen deze aanvullingen wat dieper theoretisch begrip vragen dan voorheen, terwijl ook de technische vaardigheid in verband met deze onderwerpen verder ontwikkeld zal worden. Een aantal begrippen en stellingen uit deze syllabus zullen later ook in een algemener kader behandeld worden in het vak Topologie A.

Deze syllabus bevat twee soorten opgaven. Tussen de gewone tekst vind je geregeld opgaven, die je ertoe aansporen om met een net ingevoerd begrip of bewezen stelling direct zelf aan de gang te gaan door bijv. een voorbeeld of tegenvoorbeeld te bestuderen of door een eenvoudig aanvullend resultaat te bewijzen. Aan het eind van elk hoofstuk vind je wat concretere vraagstukken: echte sommen. Deze laatsten zullen op het werkcollege behandeld worden. Vraagstukken van de eerste soort zullen soms op het werkcollege behandeld worden, maar het zal ook voorkomen dat de docent reeds tijdens het hoorcollege zo'n vraagstuk in dialoog met de studenten behandelt of dat je aangespoord wordt om het zelf als "huiswerk" te beantwoorden. Hoe dan ook, het maken van de vraagstukken van de eerste soort is een goede manier om bij te blijven met de behandelde stof.

Op het tentamen zullen vraagstukken van beide types voorkomen, echter meer vraagstukken van de tweede, concrete soort dan van de eerste, theoretische soort.

De organisatie van deze syllabus is als volgt. Hij is opgebouwd uit een aantal hoofdstukken, die meestal weer opgedeeld zijn in een paar deelhoofdstukken. Binnen een hoofdstuk is er een paragraafnummering van de vorm $a.b$, waarbij a het hoofdstuknummer is en b het volgnummer van de paragraaf binnen dat hoofdstuk. Als er ergens verwezen wordt naar Stelling $a.b$, dan wordt de Stelling in paragraaf $a.b$ bedoeld. Een zelfde conventie geldt voor Definitie $a.b$, Voorbeeld $a.b$, Opgave $a.b$, etc. Aan het slot van elk hoofdstuk volgen een aantal vraagstukken die genummerd zijn als V$a.b$, waarbij a weer het hoofdstuknummer is en b het volgnummer van het vraagstuk binnen dat hoofdstuk.

De paragraafnummers en vraagstuknummers zijn in de regel vet gedrukt. Soms zijn ze echter cursief gedrukt. Dit betekent dat die paragraaf of dat vraagstuk niet tot de verplichte tentamenstof behoort. Hetzelfde geldt voor bewijzen. Als het woord "Bewijs" vet is gedrukt, dan behoort het tot de vaste stof; als het cursief is gedrukt, dan is het facultatief. Soms zal de docent de onderdelen met cursieve aanduidingen niet behandelen.

Voor studenten die wat dieper op de stof willen ingaan zijn de niet-verplichte gedeelten uiteraard aanbevolen materiaal. Mogelijk zal de docent zelfs nog meer overslaan en niet voor het tentamen eisen. Bijvoorbeeld de deelhoofdstukken 3.1 en 3.2 en hoofdstuk 4 zullen hiervoor in aanmerking komen. Ook zal hoofdstuk 6 (Invoering van de elementaire functies) mogelijk (en helaas) door tijdgebrek in de knel kunnen komen. Net zo als bij Analyse A, zal soms in voorbeelden en vraagstukken eerder dan hoofdstuk 6 al met sommige elementaire functies gewerkt worden.

Het wordt ten zeerste aangeraden om naast de syllabus ook wat boeken te raadplegen. Hier volgt een kleine selectie van aanvullende literatuur. Zie voor de algemene theorie o.a.:

[1] J. H. J. Almering, *Analyse* (geheel herzien door H. Bavinck en R. W. Goldbach), Delftse Uitgeversmaatschappij, 6e druk, 1990.

[2] T. M. Apostol, *Calculus, Vol. 1*, John Wiley & Sons, Second ed., 1967.

[3] A. van Rooij, *Analyse voor beginners*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 1989.

[4] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, Third ed., 1976.

Zie voor de opbouw van de reële getallen:

[5] H.-D. Ebbinghaus e.a., *Numbers*, edited by H. Ewing, Graduate Texts in Math. 123, Springer-Verlag, 1990 (oorspronkelijke Duitstalige versie “Zahlen” ook door Springer uitgegeven, zweite Auflage, 1988).

[6] E. G. H. Landau, *Foundations of analysis*, Chelsea Publishing Company, New York, 1951 (oorspronkelijke Duitstalige versie “Grundlagen der Analysis” is uitgegeven door Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1930).

Inhoudsopgave

Ter inleiding	1
1. De reële getallen	3
2. Rijen van reële getallen	11
3. Continuïteit	19
4. Extrema en convexiteit	32
5. Reeksen	39
6. Invoering van de elementaire functies	59
7. De Riemann-integraal	70
8. Oneigenlijke integralen	85
Index	101

Dankwoord Bij het schrijven van deze syllabus heb ik veel ontleend aan de vroegere syllabus Analyse B van prof. dr. D. van Dulst uit 1983. Dit betreft vooral de vraagstukken, maar ook de algemene opzet en een aantal details. Hoofdstuk 1 is gebaseerd op een handgeschreven syllabus “De reële getallen” van dr. H. Pijls uit maart 1994. Waardevol commentaar van dr. H. C. Doets is in dit hoofdstuk verwerkt. Tenslotte zeg ik dank aan dr. M. S. Dijkhuizen en vooral dr. P. J. I. M. de Paepe, die eerdere versies van deze syllabus als docent hebben gebruikt en becommentarieerd. Dr. de Paepe heeft ook talrijke extra vraagstukken geleverd.

1 De reëele getallen

1.1 Axiomatische karakterisering van de reëele getallen

1.1 In syll. Analyse A, hoofdstuk 3 is een schets gegeven van de definitie van de verzameling $\mathbb{R}$ van reële getallen en de voornaamste daaruit volgende eigenschappen. Het kwam op het volgende neer:

- (syll. Analyse A, (3.1)) $\mathbb{R}$ is ruwweg gedefinieerd als de verzameling van alle oneindig voortlopende decimale breuken (waarbij een breuk die op den duur slechts negens heeft, op evidente wijze wordt geïdentificeerd met een breuk die op den duur slechts nullen heeft).
- (syll. Analyse A, (3.4)) Uit de definitie volgt de Stelling van de intervalschakeling.
- (syll. Analyse A, (3.6)) Uit de stelling van de intervalschakeling volgt (samen met de Archimedische eigenschap, zie verderop) de Stelling van de kleinste bovengrens.

De karakterisering van de reële getallen als de oneindig voortlopende decimale breuken gaf eigenlijk een *model* met alle eigenschappen van de reële getallen. Zodra echter de stellingen van de intervalschakeling en van de kleinste bovengrens bewezen waren, werd er niet meer op dit model teruggegrepen, maar werden allerlei verdere eigenschappen over reële getallen bewezen door toepassing van genoemde twee stellingen. Ook het feit dat de verzameling $\mathbb{Q}$ van rationale getallen deel is van $\mathbb{R}$ bleef een belangrijke rol spelen.

We zullen nu een andere weg volgen, die al kort werd aangekondigd in syll. Analyse A, hst.1. Een aantal eigenschappen van $\mathbb{R}$, zoals bestudeerd in syll. Analyse A, zullen we apart nemen als axioma's. We willen het zo hebben dat een structuur die voldoet aan deze axioma's, hierdoor uniek bepaald is (op isomorfisme na, zie verderop). Ook willen we een concreet model hebben dat aan de axioma's voldoet. Immers, zonder zo'n model zou het wel eens kunnen zijn dat er niets is dat aan de axioma's voldoet.

De als axioma's te kiezen eigenschappen van $\mathbb{R}$ zullen uitspraken doen over de algebraïsche structuur van $\mathbb{R}$ (t.o.v. optelling en vermenigvuldiging), over de structuur van $\mathbb{R}$ als geordende verzameling (t.o.v. $<$), over het verband tussen de algebraïsche en de ordeningsstructuur, en over de volledigheid van $\mathbb{R}$ als geordende verzameling. Voor deze laatste eigenschap zullen we de stelling van de kleinste bovengrens nemen, die nu beter *Axioma van de kleinste bovengrens* kan heten. We zullen een model dat aan de axioma's voldoet construeren vanuit $\mathbb{Q}$ d.m.v. de zogenaamde Dedekind-sneden. De bovengenoemde oneindig voortlopende decimale breuken geven een ander model voor $\mathbb{R}$, dat we hier niet verder zullen behandelen. Echter, alle modellen voor $\mathbb{R}$ zijn noodzakelijkerwijs isomorf.

Onze behandeling van deze materie zal tamelijk summier zijn. De lezer wordt sterk aangemoedigd om meer over dit fraaie onderwerp te lezen in Ebbinghaus [5], Rudin [4, Ch.1] of Landau [6]. Ook bij het vak Verzamelingenleer en Logica zal op deze zaken worden teruggekomen, zie de betreffende syllabus.

1.2 De opbouw van de getallen, van welke soort dan ook, begint met de verzameling van *natuurlijke getallen* $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$. Door toevoeging van $0, -1, -2, \ldots$ aan $\mathbb{N}$ ontstaat de verzameling $\mathbb{Z}$ van de *gehele getallen*. De breuken $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$) vormen de verzameling $\mathbb{Q}$ van de *rationale getallen*. Twee breuken $\frac{p}{q}$ en $\frac{p'}{q'}$ worden als dezelfde elementen van $\mathbb{Q}$ beschouwd als $pq' = p'q$. Het is mogelijk om $\mathbb{N}$ te karakteriseren door een klein aantal axioma's, zie syll. Logica en Verzamelingen. De constructie van $\mathbb{Z}$ uit $\mathbb{N}$ en van $\mathbb{Q}$ uit $\mathbb{Z}$

kan op een "kanonieke" manier gebeuren, d.w.z. op een heel fraaie geformaliseerde manier zo dat de ogenschijnlijk rijkere structuur van het nieuw gevormde object ($\mathbb{Z}$ resp. $\mathbb{Q}$) "automatisch" uit de structuur van het oorspronkelijke object ($\mathbb{N}$ resp. $\mathbb{Z}$) volgt. Deze kanonieke constructies zullen bij het vak Algebra behandeld worden, ook in algemenere situaties.

We nemen nu aan dat we precies weten wat we met $\mathbb{Q}$ bedoelen. Laten we de belangrijkste structuren isoleren die in $\mathbb{Q}$ besloten liggen: de structuur van een lichaam en de structuur van een geordende verzameling.

De structuur van een lichaam houdt in dat er een optellingsoperatie is met bepaalde eigenschappen en een vermenigvuldigingsoperatie met bepaalde eigenschappen en dat de twee operaties zich "netjes" (compatibel) ten opzichte van elkaar gedragen. Wat de optelling betreft is er bij elke $x, y \in \mathbb{Q}$ een element $x+y$ in $\mathbb{Q}$ (de som), is er een element 0 in $\mathbb{Q}$ (het nul-element), en is er bij elk element $x \in \mathbb{Q}$ een element $-x$ in $\mathbb{Q}$ (de tegengestelde) zo dat aan de volgende eigenschappen voldaan is:

$$\begin{aligned}
&x+y=y+x \quad \text{voor alle } x,y\in\mathbb{Q} \qquad \text{(commutativiteit)},\\
&(x+y)+z=x+(y+z) \quad \text{voor alle } x,y,z\in\mathbb{Q} \qquad \text{(associativiteit)},\\
&0+x=x \quad \text{voor alle } x\in\mathbb{Q},\\
&x+(-x)=0 \quad \text{voor alle } x\in\mathbb{Q}.
\end{aligned}$$

In het vervolg schrijven we $x+(-y)$ korter als $x-y$.

Wat de vermenigvuldiging betreft is er bij elke $x, y \in \mathbb{Q}$ een element xy in $\mathbb{Q}$ (het product), is er een element 1 in $\mathbb{Q}$ met $1 \neq 0$ (het eenheidselement), en is er bij elk element $x \in \mathbb{Q}$ met $x \neq 0$ een element x^{-1} in $\mathbb{Q}$ (de inverse) zo dat aan de volgende eigenschappen voldaan is:

$$\begin{aligned}
&xy=yx \quad \text{voor alle } x,y\in\mathbb{Q} \qquad \text{(commutativiteit)},\\
&(xy)z=x(yz) \quad \text{voor alle } x,y,z\in\mathbb{Q} \qquad \text{(associativiteit)},\\
&1x=x \quad \text{voor alle } x\in\mathbb{Q},\\
&xx^{-1}=1 \quad \text{voor alle } x\in\mathbb{Q} \text{ met } x\neq 0.
\end{aligned}$$

In het vervolg schrijven we xy^{-1} ook als x/y of $\dfrac{x}{y}$.

De compatibiliteit tussen optelling en vermenigvuldiging wordt gegeven door:

$$x(y+z)=xy+xz \quad \text{voor alle } x,y,z\in\mathbb{Q} \qquad \text{(distributiviteit)}.$$

Algemener noemen we een verzameling F een *lichaam* als er een optellings- en vermenigvuldigingsoperatie in F gegeven zijn zo dat alle bovenstaande eigenschappen gelden met $\mathbb{Q}$ vervangen door F. Structuren zoals lichamen (en ringen en groepen) zullen bij het vak Algebra nader behandeld worden.

1.3 Opgave Laat $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Bewijs de volgende uitspraken.

a) Als $a+x=x$ voor alle $x \in \mathbb{Q}$ dan $a=0$ (dus het nulelement in $\mathbb{Q}$ is uniek).
b) Als $ax=x$ voor alle $x \in \mathbb{Q}$ dan $a=1$ (dus het eenheidselement in $\mathbb{Q}$ is uniek).
c) $a+b=a+c \implies b=c$.
d) $a+b=a \implies b=0$.
e) $a+b=0 \implies b=-a$.
f) $(-a)(-b)=ab$.

1.4 Zij F een lichaam. We noemen twee eenvoudige consequenties van de lichaamsaxioma's. Laat $a, b \in F$.
(a) $0 \cdot a = 0$. Immers, $0 \cdot a + 0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a$, dus $0 \cdot a = 0$.
(b) $(-a)b = -(ab)$. Immers, $(-a)b + ab = (-a+a)b = 0 \cdot b = 0$.

1.5 $\mathbb{Q}$ heeft naast de structuur van een lichaam ook de structuur van een *totaal geordende* of *lineair geordende* verzameling, d.w.z., er is op $\mathbb{Q}$ een relatie $<$ gedefinieerd die voldoet aan:

(i) Voor elke $x, y \in \mathbb{Q}$ geldt; hetzij $x < y$, hetzij $x = y$, hetzij $y < x$ (*lineariteit*);
(ii) Als $x, y, z \in \mathbb{Q}$ en als $x < y$ en $y < z$, dan $x < z$ (*transitiviteit*).

Voor het gemak zullen we zondermeer van *geordende verzameling* spreken als aan (i) en (ii) voldaan is. In het vak Verzamelingenleer zullen echter varianten van bovenstaande definitie beschouwd worden, waarbij (i) verzwakt wordt. Dan zal de terminologie veel nauwer luisteren.

De lichaamsstructuur en de ordeningsstructuur van $\mathbb{Q}$ zijn compatibel in de volgende zin:

(i) Als $x, y, z \in \mathbb{Q}$ en als $x < y$, dan $x + z < y + z$;
(ii) Als $x, y \in \mathbb{Q}$ en als $x > 0$ en $y > 0$, dan $xy > 0$.

Een verzameling F die de structuur heeft van een lichaam en van een geordende verzameling zo dat de laatst genoemde twee eigenschappen (i), (ii) gelden (met $\mathbb{Q}$ vervangen door F) heet een *geordend lichaam*.

1.6 Zij F een lichaam. Als $a \in F$ en $n \in \mathbb{Z}$ dan definiëren we het element $n \cdot a$ van F als volgt:
$1 \cdot a := a, \quad (n+1) \cdot a := n \cdot a + a \ (n \in \mathbb{N}), \quad (-n) \cdot a := -(n \cdot a) \ (n \in \mathbb{N}), \quad 0 \cdot a := 0.$
In het bijzonder kunnen we spreken van de elementen $n \cdot 1$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Zij F een geordend lichaam. We leiden een paar eenvoudige eigenschappen af. Zij $a \in F$.
(a) Als $a < 0$ dan $-a > 0$. Immers, $0 = a + (-a) < 0 + (-a) = -a$.
(b) Als $a \neq 0$ dan $a^2 > 0$. Immers, als $a > 0$ dan $a^2 = a \cdot a > 0$, terwijl als $a < 0$ dan $a^2 = (-a) \cdot (-a) > 0$ omdat $-a > 0$.
(c) Als $n \in \mathbb{N}$ dan $n \cdot 1 > 0$. Het bewijs gaat met volledige inductie naar n. Voor $n = 1$ hebben we $1 = 1^2 > 0$. De inductiestap gaat met $(n+1) \cdot 1 = n \cdot 1 + 1$, wat > 0 is als $n \cdot 1 > 0$.

Als gevolg van (c) zien we dat de afbeelding $n \mapsto n \cdot 1 \colon \mathbb{Z} \to F$ injectief is. Daarom kunnen we voor een gegeven geordend lichaam F de verzameling $\mathbb{Z}$ opvatten als een deelverzameling van F. Bovendien kloppen de ordening, optelling, vermenigvuldiging en de elementen 0 en 1 op $\mathbb{Z}$ met die op F. Algemener kunnen we $\mathbb{Q}$ opvatten als deelverzameling van F zo dat lichaamsstructuur en ordeningsstructuur van $\mathbb{Q}$ en van F met elkaar kloppen. Immers, als $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$) dan kunnen we p en q als elementen van F opvatten en $\frac{p}{q} = pq^{-1}$ is dan ook een goed gedefinieerd element van het lichaam F. Bovendien geldt dat $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ in $\mathbb{Q}$ desda $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ in F (ga na). Het is nu een routinezaak om na te gaan dat lichaamsstructuur en ordeningsstructuur van $\mathbb{Q}$ en van F met elkaar kloppen.

1.7 Zij nu X een geordende verzameling en zij $Y \subset X$. We noemen $x \in X$ een *bovengrens* van Y als $y \leq x$ voor alle $y \in Y$. We noemen de verzameling Y *naar boven begrensd* als er een bovengrens van Y bestaat. We noemen $x \in X$ een *supremum* van Y als x een bovengrens is van Y en als elke $z \in X$ met $z < x$ geen bovengrens is van Y.

Opgave Zij X een geordende verzameling, zij $Y \subset X$, en laat x een supremum zijn van Y. Bewijs dat x uniek is als supremum van Y. Bewijs ook dat voor iedere bovengrens z van Y geldt dat $x \leq z$.

Gezien bovenstaande Opgave mogen we een supremum van Y ook de *kleinste bovengrens* van Y noemen. Het supremum van Y wordt genoteerd met $\sup Y$.

Analoog kunnen we het begrip *ondergrens* van Y definiëren. Vervolgens kunnen we het begrip *infimum* of *grootste ondergrens* van Y definiëren, wat genoteerd wordt met $\inf Y$.

Definitie Een geordende verzameling X heeft de *eigenschap van de kleinste bovengrens* of, korter, de *sup-eigenschap* als elke niet-lege naar boven begrensde deelverzameling $Y \subset X$ een kleinste bovengrens heeft.

1.8 Axioma De verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen is een geordend lichaam dat aan de sup-eigenschap voldoet.

We noemen twee geordende lichamen F_1 en F_2 *isomorf* als er een bijectieve afbeelding $\phi\colon F_1 \to F_2$ bestaat zo dat voor alle $x, y \in F_1$ geldt dat $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$, $\phi(xy) = \phi(x)\,\phi(y)$, en $(x < y) \Rightarrow (\phi(x) < \phi(y))$. Zo'n afbeelding heet een *isomorfisme*.

Stelling Als $\mathbb{R}_1$ en $\mathbb{R}_2$ verzamelingen zijn die beide aan het Axioma van de reële getallen voldoen dan zijn $\mathbb{R}_1$ en $\mathbb{R}_2$ als geordende lichamen isomorf d.m.v. een uniek isomorfisme.

We zullen deze belangrijke stelling hier niet bewijzen, maar verwijzen daartoe naar Ebbinghaus [5], zie ook syll. Logica en Verzamelingen.

1.2 Een model voor de reële getallen

We zullen nu een verzameling construeren die aan het Axioma 1.8 van de reële getallen voldoet. Een reëel getal zal gedefinieerd worden als een z.g. snede in $\mathbb{Q}$. Het concrete idee bij een snede is dat je de verzameling $\mathbb{Q}$ op een bepaalde plaats door midden snijdt. De plaats waar je snijdt zou je snede kunnen noemen. Die plaats kan juist bij een element van $\mathbb{Q}$ liggen, bijv. bij het getal $\frac{1}{2}$. Maar de snede zou ook bij een niet-rationaal getal kunnen liggen, bijv. bij $\sqrt{2}$ (zie syll. Analyse A, (3.1) voor het niet bestaan van $\sqrt{2}$ binnen $\mathbb{Q}$). Maar $\sqrt{2}$ is juist een getal dat we nog niet kennen en dat in het te construeren model zijn plaats moet vinden. We moeten dus een manier vinden om een snede bij $\sqrt{2}$ geheel in termen van $\mathbb{Q}$ te karakteriseren. Daartoe bekijken we de deelverzameling van $\mathbb{Q}$ die links van de plaats ligt waar we gesneden hebben, en we noemen deze deelverzameling de snede. In het eerste voorbeeld wordt deze deelverzameling $\alpha := \{r \in \mathbb{Q} \mid r < \frac{1}{2}\}$ en in het tweede voorbeeld $\beta := \{r \in \mathbb{Q} \mid r < 0 \text{ of } r^2 < 2\}$. In het eerste voorbeeld is $\frac{1}{2}$ de kleinste bovengrens in $\mathbb{Q}$ van α. In het tweede voorbeeld heeft β echter geen kleinste bovengrens in $\mathbb{Q}$. Het idee is nu om een model voor $\mathbb{R}$ te construeren in de vorm van een collectie van deelverzamelingen van $\mathbb{Q}$, de z.g. sneden, die van het type α of het type β kunnen zijn. Met de sneden van het type α krijgen we $\mathbb{Q}$ terug, met de sneden van het type β verkrijgen we elementen van $\mathbb{R}$ die niet in $\mathbb{Q}$ liggen.

Nu zullen we dit model op een meer formele manier construeren.

1.9 Definitie Een deelverzameling α van $\mathbb{Q}$ heet *snede* als
1. $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq \mathbb{Q}$;
2. $p \in \alpha$ en $q < p \implies q \in \alpha$;
3. $p \in \alpha \implies \exists r \in \alpha \quad r > p$.

Uit 2. volgt
4. $p \in \alpha$ en $q \notin \alpha \implies p < q$;
5. $r \notin \alpha$ en $r < s \implies s \notin \alpha$.

Definieer de verzameling $\mathbb{R}$ nu als de collectie van alle sneden. Dan is $\mathbb{R}$ dus een deelverzameling van de collectie van alle deelverzamelingen van $\mathbb{Q}$.

Bij elk rationaal getal $p \in \mathbb{Q}$ definiëren we een snede

$$i(p) := \{r \in \mathbb{Q} \mid r < p\}.$$

Dit definieert een afbeelding $i\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

Opgave Bewijs dat $i(p)$ $(p \in \mathbb{Q})$ inderdaad een snede is.

Propositie De afbeelding i is injectief, maar niet surjectief.

Bewijs We bewijzen injectiviteit en verwijzen naar de volgende opgave voor de surjectiviteit. Als $p, q \in \mathbb{Q}$ en $p \neq q$, dan is òf $p < q$ òf $p > q$. Stel $p < q$, dan $p < \frac{p+q}{2} < q$, dus $\frac{p+q}{2} \notin i(p)$ en $\frac{p+q}{2} \in i(q)$. Dus $i(p) \neq i(q)$. □

1.10 **Opgave**
a) Bewijs dat de verzameling $\beta := \{r \in \mathbb{Q} \mid r < 0 \text{ of } r^2 < 2\}$ een snede is.
Aanwijzing Zij $p \in \mathbb{Q}$, $p > 0$, $p^2 < 2$. Neem $q := p + \dfrac{2 - p^2}{p + 2}$. Dan $q > p$ en $q^2 < 2$.
b) Bewijs dat $\mathbb{Q} \backslash \beta = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0 \text{ en } r^2 > 2\}$.
c) Bewijs dat β geen kleinste bovengrens in $\mathbb{Q}$ heeft.
d) Laat $p \in \mathbb{Q}$. Bewijs dat p de kleinste bovengrens van $i(p)$ in $\mathbb{Q}$ is.
e) Concludeer dat de snede β niet van de vorm $i(p)$ $(p \in \mathbb{Q})$ kan zijn. Dus de afbeelding i is niet surjectief.

1.11 In het vervolg zullen we $\mathbb{Q}$ en $i(\mathbb{Q})$ met elkaar identificeren.
We gaan nu een ordening, optelling en vermenigvuldiging op $\mathbb{R}$ definiëren, en wel zo dat deze, beperkt tot $\mathbb{Q}$, de reeds bekende ordening, optelling en vermenigvuldiging op $\mathbb{Q}$ teruggeven. Dan moet er aangetoond worden dat $\mathbb{R}$ aan de sup-eigenschap voldoet en dat $\mathbb{R}$ een geordend lichaam is. We beginnen met de ordening $<$.

Definitie Als $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definieer dan dat $\alpha < \beta$ desda $\alpha \subsetneq \beta$.

Stelling De relatie $<$ definieert een ordening op $\mathbb{R}$.

Bewijs Stel $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$. We moeten aantonen dat ofwel $\alpha < \beta$ ofwel $\beta < \alpha$. Veronderstel dat niet $\alpha < \beta$. Omdat ook $\alpha \neq \beta$, zal α dan geen deelverzameling van β zijn. Dan bestaat er een $p \in \alpha$ met $p \notin \beta$. Voor elke $q \in \beta$ geldt dan $q < p$ (wegens §1.9, no.4) en dus (wegens no.2) $q \in \alpha$. Dus $\beta \subset \alpha$ en dus $\beta < \alpha$. □

Voor $p, q \in \mathbb{Q}$ verifieert men onmiddellijk dat $p < q$ desda $i(p) < i(q)$.

1.12 Stelling De geordende verzameling $\mathbb{R}$ heeft de sup-eigenschap.

Bewijs Zij $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, β een bovengrens van A. Definieer $\gamma := \cup_{\alpha \in A} \alpha$. We zullen aantonen dat (i) $\gamma \in \mathbb{R}$ (dus γ is een snede) en (ii) $\gamma = \sup A$.

(i) We moeten no.1, 2 en 3 uit Definitie 1.9 nagaan. Eerst no.1.
$\gamma \neq \emptyset$ omdat elke $\alpha \in A$ niet leeg is.
$\gamma \neq \mathbb{Q}$ omdat $\gamma = \cup_{\alpha \in A} \alpha \subset \beta$ (β is bovengrens).
Ga zelf no.2 en 3 na.

(ii) γ is een bovengrens van A want $\alpha \subset \gamma$ voor alle $\alpha \in A$. Laat $\delta < \gamma$. Dan $\exists s \in \gamma$ met $s \notin \delta$. Daar $s \in \gamma$, is $s \in \alpha_0$ voor zekere $\alpha_0 \in A$. Dus niet $\alpha_0 \leq \delta$. M.a.w., als $\delta < \gamma$ dan is δ geen bovengrens van A. Dus γ is de kleinste bovengrens. $\square$

Vervolgens kunnen optelling en vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$ gedefinieerd worden.

1.13 **Definitie** Als $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definieer dan

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &:= \{r + s \mid r \in \alpha,\ s \in \beta\}, \\ -\alpha &:= \{p \in \mathbb{Q} \mid \exists r \in \mathbb{Q} \text{ zo dat } r > 0 \text{ en } -p - r \notin \alpha\}. \end{aligned}$$

Dan kan worden bewezen dat $\alpha + \beta$ en $-\alpha$ sneden zijn.

1.14 **Definitie** Definieer voor $\alpha, \beta > i(0)$ in $\mathbb{R}$ het element $\alpha\beta$ als de verzameling van alle $p \in \mathbb{Q}$ zo dat $p \leq rs$ voor zekere $r \in \alpha$, $s \in \beta$ met $r > 0$, $s > 0$.

Dan kan worden bewezen dat $\alpha\beta$ een snede is. Als $\alpha = i(0)$ of $\beta = i(0)$ dan definiëren we $\alpha\beta := i(0)$ Definieer tenslotte:

$$\alpha\beta := \begin{cases} (-\alpha)(-\beta) & \text{als } \alpha < i(0),\ \beta < i(0), \\ -((-\alpha)\beta) & \text{als } \alpha < i(0),\ \beta > i(0), \\ -(\alpha \cdot (-\beta)) & \text{als } \alpha > i(0),\ \beta < i(0). \end{cases}$$

Er kan worden bewezen dat $\mathbb{R}$ t.o.v. de aldus gedefinieerde operaties een geordend lichaam is. Ook blijkt dat de operaties op $\mathbb{R}$ beperkt tot $\mathbb{Q}$ de reeds bekende operaties op $\mathbb{Q}$ geven. Zie Rudin, Ch.1, Appendix voor de details.

1.15 Opgave Als $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $\alpha < \beta$ dan bestaat er een $q \in \mathbb{Q}$ zo dat $\alpha < q < \beta$.
(Deze uitspraak is een manier om uit te drukken dat $\mathbb{Q}$ *dicht ligt* in $\mathbb{R}$, zie het vak Topologie A.)

1.3 Gevolgen van de sup-eigenschap van $\mathbb{R}$

In het vervolg vatten we $\mathbb{R}$ op als gekarakteriseerd door Axioma 1.8. Alle verder te formuleren stellingen over $\mathbb{R}$ dienen bewezen te worden door direct of indirect terug te grijpen op dit Axioma. Veel over $\mathbb{R}$ werd al bewezen in syll. Analyse A. Dit hoeven we niet allemaal meer over te doen, maar voor elke daar geformuleerde uitspraak zul je wel moeten nagaan of het bewijs ervan echt alleen gebruik maakte van Axioma 1.8 en niet van andere kennis, bijvoorbeeld van een meetkundig plaatje.

1.16 Omdat $\mathbb{R}$ een geordend lichaam is, weten we al dat $\mathbb{Q}$ op natuurlijke manier in $\mathbb{R}$ ingebed ligt (zie §1.6).

Verder volgt uit het axioma van de kleinste bovengrens onmiddellijk de *stelling van de grootste ondergrens* (cf. syll. Analyse A, (3.6)): Iedere niet-lege, naar beneden begrensde deelverzameling Y van $\mathbb{R}$ heeft een grootste ondergrens.

Een belangrijk gevolg is de reeds in syll. Analyse A, (3.4) geformuleerde *stelling van de intervalschakeling*, ook wel *stelling van Cantor* genoemd:

Stelling Zij gegeven een rij gesloten intervallen $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ in $\mathbb{R}$ zo dat $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$. Dan is $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \emptyset$.

Bewijs Uit de inclusies van de intervallen volgt dat $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$ indien $n < m$. Dus $a_n \leq b_m$ voor alle $n, m \in \mathbb{N}$. Hieruit volgt dat
$\alpha := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ bestaat en $\alpha \leq b_m$ voor alle $m \in \mathbb{N}$.
Dit levert weer dat
$\beta := \inf\{b_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ bestaat en $\alpha \leq \beta$.
We zien dat $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dus $[\alpha, \beta] \subset \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. □

1.17 Stelling (*Archimedische eigenschap*)
Als $x, y \in \mathbb{R}$ en $x > 0$ dan bestaat er een $n \in \mathbb{N}$ zo dat $nx > y$.

Bewijs Stel dat er niet zo'n $n \in \mathbb{N}$ bestaat. Dan is y een bovengrens van de niet-lege verzameling $V := \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$, dus $z := \sup V$ bestaat. Dan $z - x < z$, dus $z - x$ is geen bovengrens van V, dus er bestaat $n \in \mathbb{N}$ zo dat $z - x < nx$. Dus $z < (n+1)x$, dus z is geen bovengrens van V. Dit is een tegenspraak. □

Opgave Bewijs het volgende:
a) Als $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ dan bestaat er $n \in \mathbb{N}$ zo dat $n^{-1} < \varepsilon$.
b) $\lim_{n\to\infty} n^{-1} = 0$.
c) Zij $x, y \in \mathbb{R}$ met $x \geq 0$, $y > 0$. Veronderstel dat $x \leq y/2^n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat $x = 0$.

Opmerking In onderdeel b) van de Opgave nemen we aan dat het begrip *limiet van een rij* reeds gedefinieerd is, zie syll. Analyse A, Definitie 6.2. De rij (a_n) met $a_n := n^{-1}$ is een van de eenvoudigste rijen waarvan men convergentie zou willen bewijzen door een limiet te geven. Dit werd reeds gedaan in syll. Analyse A, Voorbeeld 6.3. Als je het daar gegeven bewijs echter nakijkt dan zie je dat de Archimedische eigenschap van $\mathbb{R}$ stilzwijgend gebruikt is. Evenzo werd de Archimedische eigenschap in de vorm van onderdeel c) van de Opgave stilzwijgend gebruikt in syll. Analyse A, (3.5) aan het eind van het bewijs dat de Stelling van de kleinste bovengrens volgt uit de Stelling van de intervalschakeling.

Tenslotte bewijzen we de uitspraak van Opgave 1.15 nogmaals, maar nu uitgaande van Axioma 1.8.

Propositie Als $x, y \in \mathbb{R}$ en $x < y$ dan bestaat er een $z \in \mathbb{Q}$ zo dat $x < z < y$.

Bewijs Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $x > 0$ (waarom?). Uit onderdeel a) van de Opgave volgt er dat $q^{-1} < \frac{1}{2}(y - x)$ voor zekere $q \in \mathbb{N}$. Uit de Stelling volgt er dat $nq^{-1} > y$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$. Dus er is een minimale $p \in \mathbb{N}$ zo dat $pq^{-1} > y$. Dus $x < (p-2)q^{-1} < y$. □

Verdere vraagstukken

V1.1 Gegeven twee niet-lege, naar boven begrensde, deelverzamelingen A en B van $\mathbb{R}$ en een getal $\lambda > 0$. Laat $C := \{a + b \mid a \in A \;, b \in B\}$ en $D := \{\lambda a \mid a \in A\}$. Bewijs het volgende:

a) C is naar boven begrensd en niet-leeg.
b) $\sup C = \sup A + \sup B$.
c) D is naar boven begrensd en niet-leeg.
d) $\sup D = \lambda \sup A$.
e) Wat is het analogon van d) als $\lambda < 0$?

2 Rijen van reële getallen

2.1 Enige eigenschappen van rijen; de stelling van Cauchy

2.1 Definitie Zij V een verzameling (bijv. een deelverzameling van $\mathbb{R}$). Een *rij in* V is een afbeelding van $\mathbb{N}$ naar V. Als we spreken over de rij (a_n) in V, dan bedoelen we daarmee dat er aan iedere $n \in \mathbb{N}$ een element $a_n \in V$ is toegevoegd. We kunnen zo'n rij (a_n) in V wat meer uitschrijven als $a_1, a_2, \ldots$.
[In syll. Analyse A, Definitie 6.1 werden alleen rijen in $\mathbb{R}$ of in $\mathbb{C}$ ingevoerd.]

We herinneren aan twee belangrijke stellingen over rijen die volgen uit de sup-eigenschap van $\mathbb{R}$.

2.2 Stelling (syll. Analyse A, Stelling 6.11) Elke monotoon zwak stijgende naar boven begrensde rij is convergent.

2.3 Definitie (cf. syll. Analyse A, Definitie 6.16) Een reëel getal a is een *limietpunt* van de rij (a_n) in $\mathbb{R}$ als de rij (a_n) een deelrij (a_{n_i}) heeft die convergeert met limiet a.

Stelling (Bolzano-Weierstrass) Elke begrensde rij in $\mathbb{R}$ heeft een convergente deelrij (heeft een limietpunt).

Het bewijs in syll. Analyse A, Stelling 6.17 gebruikt de stelling van de intervalschakeling, waarvan we in §1.16 gezien hebben dat hij uit de sup-eigenschap van $\mathbb{R}$ volgt.

2.4 Opgave De volgende Propositie geeft een andere karakterisering van limietpunt van een reële rij, equivalent aan de oorspronkelijke definitie in syll. Analyse A, Definitie 6.16. Bewijs deze Propositie.

Propositie Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$ en zij $a \in \mathbb{R}$. Dan is a limietpunt van de rij (a_n) desda voor elke $\varepsilon > 0$ de verzameling $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \varepsilon\}$ oneindig is.

2.5 De volgende ongelijkheden in verband met limieten van convergente rijen zullen vaak van pas komen.

Propositie Zij (a_n) een convergente rij in $\mathbb{R}$ met limiet a. Zij $b \in \mathbb{R}$.
(i) Als $a_n \le b$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ (of voor elke voldoende grote $n \in \mathbb{N}$) dan $a \le b$.
(ii) Als $a_n \ge b$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ (of voor elke voldoende grote $n \in \mathbb{N}$) dan $a \ge b$.

Bewijs Uitspraak (ii) volgt uit (i) toegepast op de rij $(-a_n)$. We bewijzen (i). Daartoe veronderstellen we dat $a > b$ en we zullen bewijzen dat $a_n > b$ voor elke voldoende grote n. Omdat $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $|a - a_n| < a - b$ als $n \ge N$. Dus $a_n > a - (a - b) = b$ als $n \ge N$. □

2.6 Opgave Mogen we $a \le b$ vervangen door $a < b$ op een van de twee plaatsen of op beide plaatsen waar $a \le b$ voorkomt in Propositie 2.5(a)?

2.7 Gevolg Laten (a_n) en (b_n) convergente rijen in $\mathbb{R}$ zijn met limieten a resp. b. Als $a_n \leq b_n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ (of voor elke voldoende grote $n \in \mathbb{N}$) dan $a \leq b$.

Bewijs Pas Propositie 2.5(a) toe op de rij $(a_n - b_n)$. □

2.8 De nu te behandelen stelling van Cauchy is nog niet in syll. Analyse A aan de orde geweest. De bedoeling van deze stelling is om van een rij (a_n) in $\mathbb{R}$ te kunnen zeggen of deze al of niet convergeert door alleen maar een uitspraak te doen over de a_n, zonder de mogelijke limiet van de rij er in te betrekken.

Stel bijvoorbeeld dat $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan is er, volgens de definitie van limiet, een natuurlijk getal N zo dat als $n > N$ dan $|a - a_n| < \varepsilon$. Dus als $n, m > N$ dan

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Begin nu met $\varepsilon/2$ i.p.v. met ε. We hebben dus bewezen dat, als de rij (a_n) convergeert, het volgende geldt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad [\, n, m > N \implies |a_n - a_m| < \varepsilon \,]. \tag{2.1}$$

Definitie Een rij (a_n) in $\mathbb{R}$ heet *fundamentaalrij* of *Cauchy-rij* als conditie (2.1) geldt.

Stelling (*Cauchy*) Een rij in $\mathbb{R}$ is convergent desda de rij een fundamentaalrij is.

Bewijs We hebben al bewezen dat elke convergente rij een fundamentaalrij is. Neem omgekeerd aan dat (a_n) een fundamentaalrij is. We tonen eerst aan dat de rij begrensd is. Neem $\varepsilon := 1$ in (2.1). Er is dan een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $|a_n - a_m| < 1$ als $n, m > N$. Neem $m := N + 1$. Dan geldt voor alle $n > N$ dat

$$|a_n| \leq |a_n - a_m| + |a_m| < 1 + |a_m|.$$

Dus voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, 1 + |a_{N+1}|\}$. De rij (a_n) is dus begrensd.

Wegens de Stelling van Bolzano-Weierstrass heeft de rij (a_n) een convergente deelrij $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ met zekere limiet $a \in \mathbb{R}$. We laten nu zien dat $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat

$$n, m > N \implies |a_n - a_m| < \varepsilon/2,$$

en er is een $K \in \mathbb{N}$ zo dat

$$k > K \implies |a_{n_k} - a| < \varepsilon/2.$$

Kies nu $k \in \mathbb{N}$ zo dat $k > K$ en $n_k > N$. Dan volgt

$$n > N \implies |a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Dus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

2.9 We kunnen de stelling van Cauchy uitbreiden tot het geval van een rij in $\mathbb{C}$. De definitie van *fundamentaalrij* voor een rij (a_n) in $\mathbb{C}$ is letterlijk dezelfde als die in Definitie 2.8. Nu geldt:

Propositie Zij (a_n) een rij in $\mathbb{C}$ en zij $\ell \in \mathbb{C}$.
(a) De rij (a_n) convergeert met limiet ℓ desda de rij $(\operatorname{Re} a_n)$ convergeert met limiet $\operatorname{Re} \ell$ en de rij $(\operatorname{Im} a_n)$ convergeert met limiet $\operatorname{Im} \ell$.
(b) De rij (a_n) is een fundamentaalrij desda de rijen $(\operatorname{Re} a_n)$ en $(\operatorname{Im} a_n)$ fundamentaalrijen zijn.
(c) (*stelling van Cauchy voor rijen in* $\mathbb{C}$)
De rij (a_n) convergeert desda deze rij een fundamentaalrij is.

Bewijs Onderdeel (a) volgt uit de ongelijkheden

$$\max\{|\operatorname{Re} \ell - \operatorname{Re} a_n|,\ |\operatorname{Im} \ell - \operatorname{Im} a_n|\} \leq |\ell - a_n| \leq |\operatorname{Re} \ell - \operatorname{Re} a_n| + |\operatorname{Im} \ell - \operatorname{Im} a_n|$$

in combinatie met de definitie van limiet van een rij (ga na). Onderdeel (b) volgt uit de ongelijkheden

$$\max\{|\operatorname{Re} a_m - \operatorname{Re} a_n|,\ |\operatorname{Im}\ a_m - \operatorname{Im} a_n|\} \leq |a_m - a_n| \leq |\operatorname{Re} a_m - \operatorname{Re} a_n| + |\operatorname{Im} a_m - \operatorname{Im} a_n|$$

in combinatie met de definitie van fundamentaalrij (ga na). Onderdeel (c) volgt uit de onderdelen (a) en (b) samen met de stelling van Cauchy voor rijen in $\mathbb{R}$ (ga na). $\square$

2.2 *Uitbreiding van* $\mathbb{R}$ *met* $\pm\infty$

2.10 Definitie Onder de *uitgebreide verzameling van reële getallen* verstaan we de verzameling $\mathbb{R}$ uitgebreid met twee elementen aangeduid met ∞ en $-\infty$. We zullen deze verzameling voorlopig aanduiden met $\overline{\mathbb{R}}$, dus

$$\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

waarbij de vereniging disjunct is. We maken $\overline{\mathbb{R}}$ tot een geordende verzameling door voor de deelverzameling $\mathbb{R}$ de bekende ordening aan te houden en verder te definiëren dat

$$-\infty < x < \infty \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

2.11 Opgave Pas de begrippen uit §1.7 toe op het geval $X := \overline{\mathbb{R}}$. Merk op dat ∞ een bovengrens is van elke deelverzameling van $\overline{\mathbb{R}}$ en dat $-\infty$ een ondergrens is van elke deelverzameling van $\overline{\mathbb{R}}$. Bewijs nu het volgende.

Propositie Zij $V \subset \overline{\mathbb{R}}$. Dan heeft V een supremum en een infimum in $\overline{\mathbb{R}}$. Wat betreft het supremum kunnen we zes gevallen onderscheiden:
a) $V \neq \emptyset$ en $V \subset \mathbb{R}$.
  1) V heeft een bovengrens in $\mathbb{R}$. Dan is het supremum van V in $\overline{\mathbb{R}}$ gelijk aan het supremum van V in $\mathbb{R}$ en dit supremum is bevat in $\mathbb{R}$.
  2) V heeft geen bovengrens in $\mathbb{R}$. Dan is het supremum van V in $\overline{\mathbb{R}}$ gelijk aan ∞.
b) $V \neq \emptyset$ en $V \not\subset \mathbb{R}$.
  3) $\infty \in V$. Dan is het supremum van V in $\overline{\mathbb{R}}$ gelijk aan ∞.
  4) $\infty \notin V$, $-\infty \in V$ en $V \backslash \{-\infty\}$ is niet-leeg. Dan is het supremum van V in $\overline{\mathbb{R}}$ gelijk aan het supremum van $V \backslash \{-\infty\}$ in $\overline{\mathbb{R}}$, wat valt onder geval 1) of 2).
  5) $V = \{-\infty\}$. Dan is het supremum van V in $\overline{\mathbb{R}}$ gelijk aan $-\infty$.
c) $V = \emptyset$. Dan is het supremum van V in $\overline{\mathbb{R}}$ gelijk aan $-\infty$.
Wat betreft het infimum kunnen analoge gevallen onderscheiden worden.
Er geldt: $\inf V \leq \sup V$ desda V niet leeg is.

2.12 Zij (a_n) een rij van reële getallen. We gaan nu de eerdere definities van convergentie (in $\mathbb{R}$) en van limietpunt (in $\mathbb{R}$) voor zo'n rij uitbreiden zo dat een limiet of limietpunt binnen $\overline{\mathbb{R}}$ wordt toegelaten.

Definitie Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$. We zeggen dat de rij (a_n) *convergeert in* $\overline{\mathbb{R}}$ wanneer ofwel de rij convergeert in $\mathbb{R}$ of geldt dat $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ of $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (cf. syll. Analyse A, Definitie 6.13). In al die gevallen kunnen we dus schrijven dat $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ voor zekere unieke $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

2.13 Definitie Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$ en zij $a \in \overline{\mathbb{R}}$. We zeggen dat a een *limietpunt in* $\overline{\mathbb{R}}$ is van de rij (a_n) als de rij (a_n) een deelrij (a_{n_i}) heeft die in $\overline{\mathbb{R}}$ convergeert met limiet a.

Als we voor een rij in $\mathbb{R}$ zondermeer spreken van convergentie of van limietpunt, dus zonder de toevoeging "in $\overline{\mathbb{R}}$", dan zullen we altijd de oude definitie binnen $\mathbb{R}$ bedoelen, zoals gegeven in syll. Analyse A, Definitie 6.2 en in Definitie 2.3.

2.14 Opgave Zij gegeven een rij in $\mathbb{R}$. Bewijs het volgende.

a) De rij is naar boven begrensd in $\mathbb{R}$ desda ∞ geen limietpunt in $\overline{\mathbb{R}}$ is van de rij.

b) (*uitbreiding van de stelling van Bolzano-Weierstrass*)
De rij heeft minstens één limietpunt in $\overline{\mathbb{R}}$.

c) De rij is convergent in $\overline{\mathbb{R}}$ desda de rij precies één limietpunt in $\overline{\mathbb{R}}$ heeft.

2.3 Lim sup en lim inf van een rij

2.15 Definitie Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$. Zij E de verzameling van limietpunten in $\overline{\mathbb{R}}$ van de rij. Wegens Opgave 2.14 b) is de verzameling E niet leeg.
De *lim sup* of *limes superior* van de rij (a_n) is gedefinieerd als het supremum in $\overline{\mathbb{R}}$ van E. Notatie: $\limsup_{n\to\infty} a_n$.
De *lim inf* of *limes inferior* van de rij (a_n) is gedefinieerd als het infimum in $\overline{\mathbb{R}}$ van E. Notatie: $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Merk op dat op grond van het voorgaande $\limsup_{n\to\infty} a_n$ en $\liminf_{n\to\infty} a_n$ uniek bestaan als elementen van $\overline{\mathbb{R}}$.

2.16 Voorbeeld Om ons een concreet beeld te vormen van de begrippen lim sup en lim inf kunnen we eerst eens het geval beschouwen dat de reële rij (a_n) slechts eindig veel limietpunten in $\overline{\mathbb{R}}$ heeft. Dan geldt uiteraard dat $\limsup_{n\to\infty} a_n$ het grootste limietpunt in $\overline{\mathbb{R}}$ van de rij is en $\liminf_{n\to\infty} a_n$ het kleinste limietpunt in $\overline{\mathbb{R}}$. Bijvoorbeeld:

a) $a_n := (-1)^n$. Dan zijn -1 en 1 de limietpunten in $\overline{\mathbb{R}}$ van de rij (a_n), dus $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ en $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.

b) $a_n := \exp((-1)^n\, n)$. Dan zijn 0 en ∞ de limietpunten in $\overline{\mathbb{R}}$ van de rij (a_n), dus $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ en $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$.

We zullen zodadelijk zien dat ook in het geval van oneindig veel limietpunten nog geldt dat de lim sup het grootste limietpunt en de lim inf het kleinste limietpunt is. De Latijnse termen limes superior (= grootste limietpunt) en limes inferior (= kleinste limietpunt) zijn dus zeer adequaat.

2.17 Opgave Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$. Bewijs dat de rij convergent is in $\overline{\mathbb{R}}$ desda geldt dat $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

2.18 Stelling Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$. Zij E de verzameling van limietpunten in $\overline{\mathbb{R}}$ van de rij. Dan bevat E een maximum element en een minimum element. Anders gezegd:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup E = \max E = \text{het grootste limietpunt in } \overline{\mathbb{R}} \text{ van } (a_n),$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf E = \min E = \text{het kleinste limietpunt in } \overline{\mathbb{R}} \text{ van } (a_n).$$

Bewijs Veronderstel eerst dat $\sup E = \infty$. Dan is ∞ een limietpunt in $\overline{\mathbb{R}}$ van (a_n). Want stel dat dit niet het geval is. Dan volgt uit Opgave 2.14 dat de rij (a_n) naar boven begrensd is, dus er is een $M \in \mathbb{R}$ zo dat $a_n \le M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dus voor iedere in $\overline{\mathbb{R}}$ convergente deelrij (a_{n_i}) van (a_n) geldt dat $\lim_{i\to\infty} a_{n_i} \le M$ (dit volgt uit Propositie 2.5(i) als de limiet eindig is en is evident als de limiet gelijk is aan $-\infty$). Dus M is een bovengrens van E, dus $\sup E \le M$. Dit is een tegenspraak.

Veronderstel nu dat $\sup E = b \in \mathbb{R}$. We zullen een deelrij (a_{n_i}) van (a_n) produceren zo dat $|a_{n_i} - b| < 2/i$. Deze deelrij zal duidelijk naar b convergeren, waardoor b limietpunt van (a_n) is. Zij $i \in \mathbb{N}$ en veronderstel dat we reeds getallen $n_1 < n_2 < \cdots < n_{i-1}$ in $\mathbb{N}$ gevonden hebben waarvoor $|a_{n_j} - b| < 2/j$ $(j < i)$. We gaan een geschikte n_i opzoeken. Omdat $\sup E = b \in \mathbb{R}$, zal er een reële $c \in E$ zijn met $|c - b| < 1/i$. Dan is er een deelrij (a_{m_j}) van (a_n) die naar c convergeert, dus er is een j zo dat $m_j > n_{i-1}$ en $|a_{m_j} - c| < 1/i$. Dus $|a_{m_j} - b| < 2/i$. Neem nu $n_i := m_j$.

Neem tenslotte $\sup E = -\infty$. Dan is $E = \{-\infty\}$ (E is niet leeg), dus $-\infty$ is een limietpunt van (a_n).

Het bewijs betreffende $\inf E$ gaat analoog. □

2.19 Opgave (a_n) en (b_n) zijn rijen in $\mathbb{R}$. Geldt:
a) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$?
b) $\limsup_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = \big(\limsup_{n\to\infty} a_n\big)\big(\limsup_{n\to\infty} b_n\big)$?

2.20 Opgave Bewijs: Als (a_n) en (b_n) rijen zijn in $\mathbb{R}$ en (b_n) convergeert met $\lim_{n\to\infty} b_n > 0$, dan geldt

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = \big(\liminf_{n\to\infty} a_n\big)\big(\lim_{n\to\infty} b_n\big),$$
$$\limsup_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = \big(\limsup_{n\to\infty} a_n\big)\big(\lim_{n\to\infty} b_n\big),$$

[Hierbij volgen we de conventie dat $b \times \infty = \infty$ en $b \times (-\infty) = -\infty$ als $b \in (0, \infty)$.]
Hoe moeten deze twee formules luiden als $\lim_{n\to\infty} b_n < 0$?

2.21 We gaan nog een andere karakterisering geven van lim sup en lim inf die hopelijk zal bijdragen tot een goed intuïtief gevoel voor deze begrippen. We beginnen met een variant van de begrippen bovengrens en benedengrens.

Definitie Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$. Een element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ heet *uiteindelijke bovengrens in* $\overline{\mathbb{R}}$ *van de rij* (a_n) als er $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $x \ge a_n$ voor alle $n \ge N$,
i.e., als $x \ge a_n$ geldt met hoogstens eindig veel uitzonderingen,
i.e., als $x \ge a_n$ voor n voldoende groot,
i.e., als x voor zekere N een bovengrens is van de rij $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$.
Een element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ heet *uiteindelijke ondergrens in* $\overline{\mathbb{R}}$ *van de rij* (a_n) als er $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $x \le a_n$ voor alle $n \ge N$.

Neem bijvoorbeeld $a_n := (-1)^n/n$. De rij (a_n) heeft 0 als enige limietpunt in $\overline{\mathbb{R}}$. Zij $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Dan is x een uiteindelijke bovengrens van (a_n) desda $x > 0$, en x is een uiteindelijke ondergrens van (a_n) desda $x < 0$.

2.22 Propositie Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$ met $B := \limsup_{n\to\infty} a_n$ en $A := \liminf_{n\to\infty} a_n$, waarbij $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. Zij $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Dan geldt:
(a) Als $x > B$ dan is x een uiteindelijke bovengrens in $\overline{\mathbb{R}}$ van (a_n).
(b) Als $x < B$ dan is x geen uiteindelijke bovengrens in $\overline{\mathbb{R}}$ van (a_n).
(c) Als $x < A$ dan is x een uiteindelijke ondergrens in $\overline{\mathbb{R}}$ van (a_n).
(d) Als $x > A$ dan is x geen uiteindelijke ondergrens in $\overline{\mathbb{R}}$ van (a_n).

Bewijs We bewijzen eerst (a). Als (a) niet zou gelden dan is er een $x > B$ die geen uiteindelijke bovengrens is van de rij (a_n), dus dan zou $a_n > x$ voor oneindig veel waarden van n. In het bijzonder is dan $x \in \mathbb{R}$ en er is een deelrij (a_{n_i}) van (a_n) zo dat $a_{n_i} > x$ voor alle $i \in \mathbb{N}$. De rij (a_{n_i}) zal dan op zijn beurt een in $\overline{\mathbb{R}}$ convergente deelrij hebben (cf. Opgave 2.14 b)) en de limiet van deze rij in $\overline{\mathbb{R}}$ is $\geq x$ (waarom?). Dus (a_n) heeft een limietpunt $\geq x$ in $\overline{\mathbb{R}}$, in tegenspraak met het feit dat B het grootste limietpunt in $\overline{\mathbb{R}}$ is.

Voor het bewijs van (b) gebruiken we dat B een limietpunt is van (a_n) (cf. Stelling 2.18). Dus (a_n) heeft een deelrij (a_{n_i}) die in $\overline{\mathbb{R}}$ naar B convergeert, dus bij iedere $x < B$ is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $a_{n_i} > x$ als $i > N$ (waarom?). Dus als $x < B$ dan geldt $a_n > x$ voor oneindig veel waarden van n en kan x geen uiteindelijke bovengrens van (a_n) zijn.

De bewijzen van (c) en (d) gaan analoog. □

2.23 Opmerking Er is hoogstens één $B \in \overline{\mathbb{R}}$ die aan eigenschappen (a) en (b) van Propositie 2.22 voldoet, dus deze eigenschappen kunnen ook worden gebruikt als karakterisering van de lim sup. In andere woorden: de lim sup van een rij in $\mathbb{R}$ is het infimum in $\overline{\mathbb{R}}$ van de uiteindelijke bovengrenzen van deze rij.

Evenzo kunnen eigenschappen (c) en (d) van Propositie 2.22 worden gebruikt ter karakterisering van de lim inf: de lim inf van een rij in $\mathbb{R}$ is het supremum in $\overline{\mathbb{R}}$ van de uiteindelijke ondergrenzen van deze rij.

De lim sup zelf kan al of niet een uiteindelijke bovengrens zijn van (a_n), zoals eenvoudige voorbeelden laten zien (ga na). Het is dus niet algemeen juist om de lim sup de kleinste uiteindelijke bovengrens van de rij te noemen.

2.24 **Opmerking** Zij nu (a_n) een rij in $\mathbb{R}$ met lim sup gelijk B en lim inf gelijk A. Laat $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ met $x < y$. We zeggen dat de rij (a_n) *uiteindelijk bevat is in het interval* $[x, y]$ als er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $a_n \in [x, y]$ voor alle $n \geq N$. Nu hebben we de fraaie karakterisering van het interval $[A, B]$ als de doorsnede van alle intervallen $[x, y]$ waarin de rij (a_n) uiteindelijk bevat is.

2.25 **Opmerking** Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$. Dan geldt:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{m\geq n} a_m \right), \tag{2.2}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m\geq n} a_m \right). \tag{2.3}$$

Hieronder lichten we (2.2) wat toe. Iets analoogs zal gelden in verband met (2.3).

We vatten $b_n := \sup_{m\geq n} a_m$ op als het supremum in $\overline{\mathbb{R}}$ van de verzameling van alle (mogelijk herhaald optredende) reële getallen a_m met $m \geq n$. Dan is $b_{n+1} \leq b_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ (waarom?), dus (b_n) is een monotoon zwak dalende rij in $\overline{\mathbb{R}}$. Er zijn nu drie mogelijkheden voor de rij (b_n):

1) $b_n = \infty$ voor alle n. Dan definiëren we de limiet in (2.2) door $\lim_{n\to\infty} \infty := \infty$.
2) Er is een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $b_n \in \mathbb{R}$ als $n \geq N$.
   2a) De monotoon zwak dalende rij $b_N, b_{N+1}, \ldots$ in $\mathbb{R}$ is naar beneden begrensd. Dan bestaat $\lim_{n\to\infty} b_n$ in $\mathbb{R}$ wegens de monotone convergentie-stelling 2.2.
   2b) De monotoon zwak dalende rij $b_N, b_{N+1}, \ldots$ in $\mathbb{R}$ is niet naar beneden begrensd. Dan geldt $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ in $\overline{\mathbb{R}}$.

We geven nu het bewijs van (2.2) in het geval dat $B := \limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Geef zelf het bewijs als $B = \infty$ of $B = -\infty$. Er volgt uit Propositie 2.22(a) dat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ is zo dat $b_n \leq B + \varepsilon$ als $n \geq N$. Er volgt uit Propositie 2.22(b) dat voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt dat $b_n > B - \varepsilon$. Er volgt uit de twee ongelijkheden voor b_n dat $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, juist wat we wilden bewijzen.

Het is een curieus en gelukkig toeval dat de uitdrukking "$\limsup a_n$", die historisch gezien moet worden gelezen als "het grootste limietpunt van de rij (a_n)", ook kan worden gelezen als "$\lim(\sup a_n)$", zie formule (2.2).

Verdere vraagstukken

V2.1 Bepaal de limietpunten in $\overline{\mathbb{R}}$ en de lim sup en lim inf van de rij (a_n) als:

a) $a_n = n^{-1}$.
b) $a_{2n-1} = n^{-1}$, $a_{2n} := n^{-1} + 1$.
c) $a_n = n$.
d) $a_n = \cos(\frac{1}{2}\pi n^2)$.

V2.2 Bepaal $\limsup_{n\to\infty} a_n$ en $\liminf_{n\to\infty} a_n$ als $a_n = 1/\sin(\frac{1}{2}n\pi + n^{-1})$.

V2.3 Bepaal $\limsup_{n\to\infty} a_n$ en $\liminf_{n\to\infty} a_n$ als $a_n = \sin(n)$.

V2.4 Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$ en zij E de verzameling van limietpunten in $\overline{\mathbb{R}}$ van deze rij.

a) Geef een voorbeeld van een rij (a_n) zo dat $E = \{0, 1, 2\}$.
b) Geef een voorbeeld van een rij (a_n) met $E = \{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.
c) Bestaat er een rij (a_n) met $E = \{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$?

V2.5 Zij de rij (r_n) een aftelling van $\mathbb{Q}$, d.w.z. dat $n \mapsto r_n : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ een bijectieve afbeelding is. Wat zijn de limietpunten in $\overline{\mathbb{R}}$ en de lim sup en lim inf van deze rij?

V2.6 Zij $x \in (0, 1)$. Wat zijn de limietpunten van de rij (a_n) als $a_n = nx - [nx]$? Onderscheid de gevallen $x = p/q$ met $p, q \in \mathbb{N}$ zonder gemeenschappelijke delers, en x irrationaal.

V2.7 Bepaal de limietpunten van de rij (a_n) als:

a) $a_n = \sin n$.
b) $a_n = {}^2\log n - [\,{}^2\log n\,]$.

V2.8 Zij (a_n) een reële rij. Bewijs dat (a_n) een fundamentaalrij is of weerleg het d.m.v. een tegenvoorbeeld in de twee volgende situaties.

a) Er is bovendien gegeven dat $|a_n - a_{n+1}| \leq n^{-1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
b) Er is bovendien gegeven dat voor zekere $r \in (0,1)$ geldt dat $|a_n - a_{n+1}| \leq r^n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

V2.9 Zij $r \in (0,1)$ en zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een afbeelding zo dat $|f(x) - f(y)| \leq r\,|x - y|$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zij $x_0 \in \mathbb{R}$ willekeurig. Definieer op recurrente wijze $x_n := f(x_{n-1})$. Bewijs dat de rij (x_n) een fundamentaalrij is en daarom convergeert in $\mathbb{R}$.
[Dit is een onderdeel van de belangrijke *contractiestelling* die in het kader van metrische ruimtes nader behandeld zal worden in het college Topologie A.]

V2.10 Zij $N \in \{2, 3, \ldots\}$. Zij voor iedere $k \in \mathbb{N}$ een $n_k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ gegeven. Bewijs dat

$$\lim_{k\to\infty} (n_1\,N^{-1} + n_2\,N^{-2} + \cdots + n_k\,N^{-k}) \tag{2.4}$$

bestaat in $\mathbb{R}$. Bewijs dat er omgekeerd bij elke $x \in [0,1)$ op recurrente wijze getallen $n_k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ $(k \in \mathbb{N})$ gedefinieerd kunnen worden door de regel

$$n_k := [x\,N^k - n_1\,N^{k-1} - \cdots - n_{k-1}\,N].$$

en dat x dan gelijk is aan de limiet (2.4). Bewijs dat de zo verkregen rij (n_k) het getal $N-1$ slechts eindig vaak bevat.
[In het geval $N = 10$ hebben we te maken met oneindig voortlopende decimaalbreuken, vergelijk de opmerking hierover in syll. Analyse A, (3.1).]

3 Continuïteit

De eerste twee delen van dit hoofdstuk (deelhoofdstukken 3.1 en 3.2) herhalen begrippen over continue functies en limieten van functies uit syll. Analyse A, zij het nu in een iets gegeneraliseerde vorm. Deze twee delen zijn voornamelijk bedoeld om na te slaan, niet voor systematische behandeling.

3.1 Continue functies op willekeurige deelverzamelingen van $\mathbb{R}$

Eerst geven we een, vergeleken met syll. Analyse A, iets bijgestelde definitie van de begrippen omgeving en functie.

3.1 Definitie Zij $a \in \mathbb{R}$. Een *omgeving van a* (in $\mathbb{R}$) is een deelverzameling V van $\mathbb{R}$ zo dat $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset V$ voor zekere $\varepsilon > 0$.
[In syll. Analyse A, Definitie 8.17 werden slechts de intervallen $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ als omgeving (ε-omgeving) van a aangeduid.]

De verzameling $V := [-\frac{1}{2}, 1) \cup \mathbb{Q}$ is bijvoorbeeld een omgeving van 0. Algemener: zij $a \in \mathbb{R}$, dan is deze verzameling V een omgeving van a desda $-\frac{1}{2} < a < 1$.

3.2 Definitie Zij V een verzameling. We noemen f een *functie op V* als f een afbeelding van V naar $\mathbb{C}$ is, dus $f\colon x \mapsto f(x)\colon V \to \mathbb{C}$. Over het algemeen nemen we dus aan dat een functie *complexwaardig* is. Iedere *reëelwaardige* functie $f\colon V \to \mathbb{R}$ is automatisch een complexwaardige functie omdat $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
[In syll. Analyse A, Definitie 8.1 werd functie synoniem gesteld met afbeelding, dus kon, wanneer er over functie werd gesproken, niet stilzwijgend worden verondersteld dat de functie complexwaardig was.]

In de syll. Analyse A werden voornamelijk functies beschouwd op intervallen, zoals (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$, (a, ∞), etc. Voor de functies $f\colon V \to \mathbb{C}$ beschouwd in deze syllabus zal V vaak een deelverzameling van $\mathbb{R}$ zijn, maar lang niet altijd een interval.

3.3 In syll. Analyse A, Definitie 9.1, Opmerking 2 werd gedefinieerd wanneer een functie $f\colon V \to \mathbb{C}$ continu is in een punt $a \in V$, echter onder de veronderstelling dat de deelverzameling V van $\mathbb{R}$ een omgeving van a is. We herhalen deze definitie nu in een algemenere situatie.

Definitie Zij V een deelverzameling van $\mathbb{R}$. Zij $f\colon V \to \mathbb{C}$. Zij $a \in V$. Dan heet de functie f *continu in a* als er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in V$ geldt dat:

$$|x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Het enige verschil met de oude definitie uit de syll. Analyse A is dus dat de implicatie (3.1) niet meer moet gelden voor alle x (in $\mathbb{R}$) maar slechts voor alle $x \in V$.

We herschrijven de definitie met behulp van logische quantoren. De functie $f\colon V \to \mathbb{C}$ heet continu in $a \in V$ als:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in V \quad (\ |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon\ ). \tag{3.2}$$

3.4 Opgave Bewijs dat de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) := x^2$ continu is in elk punt $a \in \mathbb{R}$ door voor iedere $a \in \mathbb{R}$ en voor iedere $\varepsilon > 0$ een expliciete $\delta > 0$ te geven zo dat de implicatie (3.1) geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$.

3.5 Opmerking Merk, uitgaande van Definitie 3.3, het volgende op.

(a) De functie $f\colon [a, b) \to \mathbb{C}$ is continu in a desda er bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in [a, b)$ geldt: $a \leq x < a + \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
In syll. Analyse A, Definities 9.3, 9.1 en 8.6, werd f in deze situatie rechtscontinu in a genoemd.

(b) De functie $f\colon (b, a] \to \mathbb{C}$ is continu in a desda er bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in (b, a]$ geldt: $a - \delta < x \leq a \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
In syll. Analyse A, Definities 9.3, 9.1 en 8.5, werd f in deze situatielinkscontinu in a genoemd.

(c) Laat algemener $a \in V \subset \mathbb{R}$ en $f\colon V \to \mathbb{C}$. We zullen de functie f *rechtscontinu in a* noemen als de functie g die de beperking is van f tot $V \cap [a, \infty)$, continu in a is. Evenzo zullen we de functie f *linkscontinu in a* noemen als de functie g die de beperking is van f tot $V \cap (-\infty, a]$, continu in a is.

3.6 Het is vooral in bewijzen vaak nuttig om de bewering dat een functie niet continu is in een zeker punt a op een logisch equivalente manier te herformuleren. Dit kan bijvoorbeeld als volgt.

Propositie Zij $f\colon V \to \mathbb{C}$ en $a \in V$. Dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent.

(a) f is niet continu in a.

(b) Er bestaan een $\varepsilon > 0$ en een rij (x_n) in V zo dat $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ terwijl $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Bewijs We bewijzen de volgende serie implicaties: (a)$\Leftrightarrow$(c)$\Rightarrow$(d)$\Rightarrow$(e)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(c), waarbij de uitspraken (c), (d) en (e) hieronder gegeven zijn.

(c) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in V \quad (\, |x - a| < \delta \quad \& \quad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon \,)$.

(d) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta \in \{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \exists x \in V \quad (\, |x - a| < \delta \quad \& \quad |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon \,)$.

(e) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in V \quad (\, |x_n - a| < n^{-1} \quad \& \quad |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon \,)$.

Merk op dat (c) de ontkenning is van (3.2). Dit laat zien dat (a)$\Leftrightarrow$(c). De andere implicaties zijn triviaal of volgen direct uit de definitie van limiet van een rij. $\square$

Het is niet de bedoeling dat je deze Propositie uit je hoofd leert. In de praktijk moet je haar, vooral in de richting (a)$\Rightarrow$(b), kunnen gebruiken door haar in een paar seconden af te leiden.

3.7 Definitie Zij V een deelverzameling van $\mathbb{R}$. We noemen een element a van V een *geïsoleerd punt van V* als er een $\delta > 0$ bestaat zo dat het interval $(a - \delta, a + \delta)$ geen andere punten van V bevat dan a. Anders geformuleerd: a is een geïsoleerd punt van V als er een omgeving A van a bestaat zo dat $A \cap V = \{a\}$.

3.8 Opgave Zij $V \subset \mathbb{R}$ en zij a een geïsoleerd punt van V. Bewijs dat elke functie $f\colon V \to \mathbb{C}$ continu is in a.

3.9 Definitie Zij $V \subset \mathbb{R}$ en $f\colon V \to \mathbb{C}$. Dan heet de functie f *continu op V* als voor alle $a \in V$ geldt dat f continu is in a. We zeggen dan ook wel kortweg dat de functie f *continu* is.

3.10 Opgave Zij $W \subset V \subset \mathbb{R}$, zij $f\colon V \to \mathbb{C}$ en zij de functie $g\colon W \to \mathbb{C}$ de beperking van f tot W. Bewijs: Als f continu is op V dan is g continu op W.

3.11 Voorbeeld De functie $f: x \mapsto x^2: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ is continu op de verzameling $\mathbb{Q}$ van rationale getallen.

3.12 Opgave Zij $V := \{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Zij $f: V \to \mathbb{C}$. Bewijs dat f continu is op V desda $\lim_{n\to\infty} f(n^{-1}) = f(0)$.

3.13 Opgave Zij $f: \mathbb{Q} \cap (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(p/q) := q$, waarbij $p, q \in \mathbb{N}$ zonder gemeenschappelijke delers. Bewijs dat f in geen enkel punt continu is.

3.14 Propositie Zij $a \in V \subset \mathbb{R}$ en zij $f: V \to \mathbb{C}$. Dan zijn de volgende twee eigenschappen equivalent.
(a) f is continu in a.
(b) Voor elke rij (a_n) in V met $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ geldt dat $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.
[Zie voor de implicatie (a)⇒(b) in een iets specialer geval ook syll. Analyse A, Stelling 9.2.]

Bewijs Neem eerst aan dat (a) geldt. We bewijzen (b). Zij $\varepsilon > 0$. Omdat f continu is in a, bestaat er een $\delta > 0$ zo dat $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ als $x \in V$ en $|x - a| < \delta$. Omdat de rij (a_n) naar a convergeert bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $|a_n - a| < \delta$ als $n > N$. Omdat de a_n bovendien in V liggen, volgt er dat $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$ als $n > N$. Dus $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

Neem nu aan dat (a) niet geldt. We zullen (b) ontkennen. Omdat f niet continu is in a bestaan er wegens Propositie 3.6 een $\varepsilon > 0$ en een rij (x_n) in V zo dat $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ en $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dus er geldt niet dat $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Dit ontkent (b). □

3.2 Limieten van functies

3.15 Zij $V \subset \mathbb{R}$ en $f: V \to \mathbb{C}$. In syll. Analyse A, Definities 8.3, 8.4, 8.5, 8.6, 8.8, werd de definitie van limiet van de functie f gegeven in de volgende vijf gevallen. In de eerste drie gevallen is $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x\downarrow a} f(x)$ in het geval dat $(a, b) \subset V$ voor zekere $b > a$;
- $\lim_{x\uparrow a} f(x)$ in het geval dat $(b, a) \subset V$ voor zekere $b < a$;
- $\lim_{x\to a} f(x)$ in het geval dat $(b, a) \cup (a, c) \subset V$ voor zekere $b < a$ en $c > a$;
- $\lim_{x\to\infty} f(x)$ in het geval dat $(b, \infty) \subset V$ voor zekere $b \in \mathbb{R}$;
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ in het geval dat $(-\infty, b) \subset V$ voor zekere $b \in \mathbb{R}$.

Kijk nog eens na wat in deze gevallen de definitie is dat de limiet bestaat en eindig is.

Voor reëelwaardige functies is in syll. Analyse A, Definitie 8.16 ook gedefinieerd wat bedoeld wordt met een limiet gelijk ∞ of $-\infty$. Bij een limiet gelijk ∞ of $-\infty$ zeggen we echter niet meer dat de limiet bestaat. Als we zeggen dat de limiet van een functie bestaat dan bedoelen we dat de limiet bestaat als een eindig getal.

3.16 Soortgelijke uitspraken als in Propositie 2.5 kunnen gedaan worden voor limieten van functies. Een voorbeeld is de volgende propositie.

Propositie Zij $(a, b) \subset V \subset \mathbb{R}$, zij $f: V \to \mathbb{R}$ en neem aan dat $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \ell$ met $\ell \in \mathbb{R}$. Zij $m \in \mathbb{R}$.
(a) Als $f(x) \leq m$ voor alle $x \in (a, b)$ dan $\ell \leq m$.
(b) Als $f(x) \geq m$ voor alle $x \in (a, b)$ dan $\ell \geq m$.

Bewijs Uitspraak (b) volgt uit (a) toegepast op de functie $x \mapsto -f(x)$. We bewijzen (a). Daartoe veronderstellen we dat $\ell > m$ en we zullen bewijzen dat $f(x) > m$ voor elke $x > a$ die voldoende dicht bij a ligt. Uit de limiet-aanname voor $f(x)$ volgt het bestaan van $\delta > 0$ zo dat $|f(x) - \ell| < \ell - m$ als $a < x < a + \delta$. Dus $f(x) > \ell - (\ell - m) = m$ als $a < x < a + \delta$. □

Met kleine aanpassingen kan deze Propositie herformuleerd en bewezen worden voor het geval dat $\lim_{x\uparrow a} f(x)$ of $\lim_{x\to a} f(x)$ of $\lim_{x\to\infty} f(x)$ of $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ bestaat en gelijk is aan ℓ. [Het bewijs van al deze varianten zou ook kunnen worden teruggebracht tot Propositie 2.5.]

3.17 In syll. Analyse A, Definitie 9.1 was continuïteit van een functie f in a om te beginnen gedefinieerd door te zeggen dat de limiet voor $x \to a$ van $f(x)$ gelijk is aan $f(a)$. Deze definitie maakte gebruik van het begrip limiet gaande naar a van een functie die gegeven is op een interval rond a, waaruit het punt a mogelijk is weggelaten. We kunnen deze definitie van limiet uitbreiden tot het geval dat f op een willekeurige deelverzameling van $\mathbb{R}$ gedefinieerd is, en we kunnen vervolgens met dit uitgebreide limietbegrip continuïteit karakteriseren.

Definitie Zij $V \subset \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$. Zij $f\colon V \to \mathbb{C}$. Zij $\ell \in \mathbb{C}$. Dan bedoelen we met de schrijfwijze

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \tag{3.3}$$

dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in V$ geldt dat:

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Het voornaamste verschil van deze definitie met die in syll. Analyse A, Definitie 8.8 is dat de implicatie (3.4) nu alleen hoeft te gelden voor alle $x \in V$. Merk ook op dat het er voor de definitie niet toe doet of het punt a al of niet in V ligt. Als a wel in V ligt, dan speelt de functiewaarde $f(a)$ geen enkele rol in de definitie en is het mogelijk dat $\ell \neq f(a)$.

3.18 **Propositie** Zij $a \in V \subset \mathbb{R}$ en $f\colon V \to \mathbb{C}$. Dan is f continu in a desda $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Bewijs Dit volgt direct door de Definities 3.3 en 3.17 naast elkaar te leggen. Stel eerst dat er voldaan is aan Definitie 3.3. Zij $\varepsilon > 0$. Dan bestaat er $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in V$ de implicatie (3.1) geldt. Maar dan geldt zeker de implicatie (3.4) met $\ell := f(a)$, dus er is aan Definitie 3.17 met $\ell := f(a)$ voldaan.

Stel omgekeerd dat aan 3.17 met $\ell := f(a)$ voldaan is. Zij $\varepsilon > 0$. Dan bestaat er $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in V$ de implicatie (3.4) met $\ell := f(a)$ geldt. Bovendien, als $x = a$ dan $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. Voor deze $\delta > 0$ geldt dus voor alle $x \in V$ de implicatie (3.1). □

3.19 Als de limiet van een functie, zoals gedefinieerd door Definitie 3.17, bestaat dan zul je geneigd zijn te denken dat deze limiet uniek is. Dit hoeft echter niet altijd zo te zijn. Het hangt, in de notatie van Definitie 3.17, af van de ligging van het punt a t.o.v. de verzameling V:

Propositie Zij $V \subset \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$. Zij $f : V \to \mathbb{C}$.
(a) Als er een rij (x_n) in $V \backslash \{a\}$ bestaat met $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ dan is (3.3) geldig voor hoogstens één waarde van ℓ.
(b) Als er geen rij (x_n) in $V \backslash \{a\}$ bestaat met $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ (d.w.z., als a een geïsoleerd punt is van $V \cup \{a\}$), dan is (3.3) geldig voor alle $\ell \in \mathbb{C}$.

Bewijs Stel (x_n) is een rij in $V \backslash \{a\}$ met $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ en stel dat (3.3) geldt voor zekere $\ell \in \mathbb{C}$. Dan geldt dat $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.
[Immers, zij $\varepsilon > 0$. Dan kunnen we $\delta > 0$ nemen zo dat voor alle $x \in V$ de implicatie (3.4) geldt. Dan kunnen we $N \in \mathbb{N}$ nemen zo dat $0 < |x_n - a| < \delta$ als $n \geq N$. Dus $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$ als $n \geq N$. Dit bewijst de geclaimde limiet. Deze redenering werd in een iets specialere situatie reeds gegeven in syll. Analyse A, Bewijs van Stelling 8.10.]
Nu gebruiken we het feit dat de limiet van een rij, zo die bestaat, uniek is om te concluderen dat (3.3) geldt voor unieke ℓ.

Stel nu dat a een geïsoleerd punt is van $V \cup \{a\}$. Dan bestaat er een $\delta > 0$ zo dat voor geen enkele $x \in V$ geldt dat $0 < |x - a| < \delta$. Dus voor elke $\varepsilon > 0$ is voor die δ aan de implicatie (3.4) triviaal voldaan, ongeacht de keuze van ℓ. Dit bewijst dat (3.3) geldt, ongeacht de keuze van ℓ. □

3.20 **Opmerking** In Definitie 3.17 gaven we een uitbreiding van de limietdefinitie uit syll. Analyse A, Definitie 8.8 tot het geval dat de functie f op een willekeurige deelverzameling van $\mathbb{R}$ gedefinieerd is. Iets soortgelijks kan gedaan worden betreffende Definities 8.3–8.6 uit syll. Analyse A,

3.21 **Definitie** Zij $V \subset \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$. Zij $f : V \to \mathbb{C}$. Zij $\ell \in \mathbb{C}$.
(a) We bedoelen met de schrijfwijze $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \ell$ dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in V$ geldt dat $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ als $a < x < a + \delta$.
(b) We bedoelen met de schrijfwijze $\lim_{x\uparrow a} f(x) = \ell$ dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in V$ geldt dat $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ als $a - \delta < x < a$.

3.22 **Definitie** Zij $V \subset \mathbb{R}$, $f : V \to \mathbb{C}$, en $\ell \in \mathbb{C}$.
(a) We bedoelen met de schrijfwijze $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$ dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $c \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat voor alle $x \in V$ geldt dat $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ als $x > c$.
(b) We bedoelen met de schrijfwijze $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $c \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat voor alle $x \in V$ geldt dat $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ als $x < c$.

In al de gevallen van Definities 3.17, 3.21 en 3.22 kan de definitie ook aangepast worden voor het geval $\ell = \infty$ of $\ell = -\infty$, analoog aan syll. Analyse A, Definitie 8.16. Geef zelf de formuleringen.

3.23 In Propositie 3.14 werd de equivalentie bewezen tussen continuïteit van een functie f in a enerzijds en de rij-limieten $f(a_n) \to f(a)$ voor elke convergente rij $a_n \to a$ anderzijds. Zo'n equivalentie kan ook voor limieten van functies beschreven worden. Er bestaan allerlei varianten waarvan we er een formuleren:

Propositie Zij $f : [a, \infty) \to \mathbb{C}$ en $\ell \in \mathbb{C}$. Dan zijn de volgende twee eigenschappen equivalent:
(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$.
(b) Voor elke rij (a_n) in $[a, \infty)$ met $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ geldt dat $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$.

Opgave Bewijs deze Propositie.

3.24 Analoog aan de Stelling van Cauchy voor rijen (zie Stelling 2.8 en Propositie 2.9(c)) kunnen we een stelling van Cauchy-type formuleren voor functies. Zo'n stelling bestaat weer in alerlei varianten, omdat er verschillende types limieten van functies zijn. We formuleren en bewijzen één zo'n variant:

Stelling (*Cauchy-criterium voor limieten van functies*)
Zij $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{C}$. Dan zijn de volgende twee eigenschappen equivalent.
(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$ voor zekere $\ell \in \mathbb{C}$.
(b) Bij iedere $\varepsilon > 0$ is er een $M \geq a$ zo dat $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ als $x, y > M$.

Bewijs De implicatie (a) $\Rightarrow$ (b) volgt direct uit de definitie van de limiet in (a) (zie Definitie 3.22(a)). Stel nu dat (b) geldt. Dan geldt voor elke rij (a_n) in $[a,\infty)$ met $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ dat de rij $(f(a_n))$ een Cauchy-rij is, dus convergeert naar een zekere eindige limiet ℓ. Deze limiet ℓ zal niet van de keuze van de rij afhangen, want als (a_n) en (b_n) twee zulke rijen zijn en als $M = M(\varepsilon)$ geassocieerd is met ε zoals in onderdeel (b) van de stelling, dan zullen a_n en b_n groter dan $M(\varepsilon)$ zijn voor n voldoende groot, dus $|f(a_n) - f(b_n)| < \varepsilon$ voor n voldoende groot, dus $\lim_{n\to\infty}(f(a_n) - f(b_n)) = 0$. Door toepassing van Propositie 3.23 concluderen we nu (a). $\square$

3.3 Continue functies op intervallen; begrensde functies

3.25 Beschouw een reëelwaardige functie $f\colon V \to \mathbb{R}$ op een willekeurige verzameling V. We herhalen een paar definities uit syll. Analyse A, Definitie 8.11. De functie f heet *begrensd* als er een $M > 0$ bestaat zo dat $|f(x)| \leq M$ voor alle $x \in V$. Equivalent kunnen we dit uitdrukken door te zeggen dat de waardenverzameling $f(V) := \{f(x) \mid x \in V\}$ een begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ is. We noemen de functie f *naar boven begrensd* als de verzameling $f(V)$ een bovengrens heeft in $\mathbb{R}$ en *naar beneden begrensd* als $f(V)$ een benedengrens heeft. Als de functie f naar boven (resp. naar beneden) begrensd is, dan gebruiken we de notatie

$$\sup_{x\in V} f(x) := \sup f(V) \quad \text{resp.} \quad \inf_{x\in V} f(x) := \inf f(V). \tag{3.5}$$

Als de functie f niet naar boven begrensd is, dan stellen we het supremum in (3.5) gelijk aan ∞. Als de functie f niet naar beneden begrensd is, dan stellen we het infimum in (3.5) gelijk aan $-\infty$.

Een functie kan naar boven begrensd zijn zonder dat er een $a \in V$ bestaat waarvoor $f(a) = \sup_{x\in V} f(x)$. Neem bijv. $V := (-1,1)$ en $f(x) := x$. Als zo'n $a \in V$ wel bestaat, dus als $f(x) \leq f(a)$ voor alle $x \in V$, dan zeggen we dat f een *maximum aanneemt in* a. [Soms is het goed om in deze situatie te zeggen dat f in a een *absoluut maximum* aanneemt, omdat onder maximum meer algemeen een lokaal maximum kan worden verstaan. Neem bijv. $V := \mathbb{R}$ en $f(x) := x(x-1)(x-2)$, dan neemt f geen absoluut maximum aan in enig punt van $\mathbb{R}$, maar wel een lokaal maximum in $1 - 3^{-\frac{1}{2}}$.]
Als $a \in V$ en $f(x) \geq f(a)$ voor alle $x \in V$, dan zeggen we dat f een *(absoluut) minimum aanneemt in* a. We zeggen dat f een *maximum (resp. minimum) aanneemt op* V als f een maximum (resp. minimum) aanneemt in a voor zekere $a \in V$.

3.26 Stelling Zij $[a,b]$ een gesloten begrensd interval en zij $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continu. Dan is f een begrensde functie en f neemt op $[a,b]$ een maximum en minimum aan.

Bewijs Eerst bewijzen we dat f naar boven begrensd is, vervolgens dat f een maximum aanneemt op $[a,b]$. Omdat deze eigenschappen daarmee ook bewezen zijn voor de functie $x\mapsto -f(x)$, volgt er dan dat f naar beneden begrensd is en een minimum aanneemt op $[a,b]$.

Stel dat f niet naar boven begrensd is. Dan is er voor iedere $n\in\mathbb{N}$ een $x_n\in[a,b]$ zo dat $f(x_n)>n$. De rij (x_n) is begrensd, dus wegens de Stelling van Bolzano-Weierstrass heeft die rij een convergente deelrij (x_{n_i}) met zekere limiet c. Omdat $a\le x_{n_i}\le b$, zal ook $a\le c\le b$ (cf. Propositie 2.5). Er volgt uit de continuïteit van f samen met Propositie 3.14 dat $\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i})=f(c)$, dus eindig. Aan de andere kant volgt uit $f(x_n)>n$ dat $\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i})=\infty$. Dit is een tegenspraak.

Stel nu dat $\sup_{x\in[a,b]} f(x)=M<\infty$. Dan is er voor iedere $n\in\mathbb{N}$ een $x_n\in[a,b]$ zo dat $M-n^{-1}<f(x_n)\le M$. (Als $f(x_n)=M$ voor zekere n dan zijn we al klaar.) Net als in het eerste deel van het bewijs vinden we een convergente deelrij (x_{n_i}) van (x_n) met limiet $c\in[a,b]$ en geldt er dat $\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i})=f(c)$. Omdat $n_i\ge i$ en dus $M-i^{-1}<f(x_{n_i})\le M$, volgt er met behulp van Gevolg 2.7 (of met behulp van de insluitstelling voor reële rijen, zie syll. Analyse A, Stelling 6.9) dat $\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i})=M$. Dus $f(c)=M$. $\square$

Merk op dat de drie aannamen in bovenstaande stelling dat (i) het interval begrensd is, (ii) het interval gesloten is, (iii) de functie f continu is, reeds essentieel gebruikt worden in het eerste deel van het bewijs van de stelling.

3.27 Opgave Zij $V\subset\mathbb{R}$ en $f:V\to\mathbb{R}$. Geef in elk van de volgende drie gevallen een voorbeeld dat f niet naar boven begrensd is en een voorbeeld dat f geen maximum aanneemt op V.
(a) $V=[0,\infty)$, f is continu op V.
(b) $V=[0,1)$, f is continu op V.
(c) $V=[0,1]$, f is niet continu op V.

3.28 In syll. Analyse A, Stelling 9.8 is de *tussenwaardestelling* behandeld:

Stelling Zij $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continu. Als $f(a)<0$ en $f(b)>0$ dan is er een $\xi\in(a,b)$ met $f(\xi)=0$.

Kijk het bewijs van die stelling nog eens na. Algemener kunnen we het volgende zeggen (zie ook syll. Analyse A, Gevolg 9.9).

3.29 Stelling Zij $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continu. Laat $m:=\min\{f(a),f(b)\}$ en $M:=\max\{(f(a),f(b)\}$. Als $m\le\gamma\le M$ dan is er een $\xi\in[a,b]$ met $f(\xi)=\gamma$.

Bewijs Als $\gamma=m$ of $\gamma=M$ dan kunnen we ξ gelijk aan a of b kiezen. Zij nu $m=f(a)<\gamma<f(b)=M$, dan $a<b$. Pas Stelling 3.28 toe op de functie $x\mapsto f(x)-\gamma$. Dit levert een $\xi\in(a,b)$ zo dat $f(\xi)-\gamma=0$. Tenslotte kunnen we het geval $f(a)>\gamma>f(b)$ terugvoeren tot het reeds behandelde geval $f(a)<\gamma<f(b)$ toegepast op de functie $x\mapsto -f(x)$. $\square$

Combinatie van Stelling 3.29 met Stelling 3.26 geeft nu:

3.30 Propositie Het beeld van een gesloten begrensd interval onder een continue reëelwaardige functie is weer een gesloten begrensd interval.

Bewijs Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu. Vanwege Stelling 3.26 zijn er elementen c, d van $[a,b]$ zo dat $f(c) \le f(x) \le f(d)$ voor alle $x \in [a,b]$. Door toepassing van Lemma 3.29 voor f beperkt tot het interval I gelijk aan $[c,d]$ of $[d,c]$ volgt er dat er voor iedere $\gamma \in [f(c), f(d)]$ een $\xi \in I$ is waarvoor $f(\xi) = \gamma$. Dus $f([a,b]) \subset [f(c), f(d)] \subset f(I) \subset f([a,b])$, dus $f([a,b]) = [f(c), f(d)]$. □

3.31 Opgave In het algemeen geldt niet dat het beeld onder een continue reëelwaardige functie van een open begrensd interval weer een open begrensd interval is. Laat dit door een tegenvoorbeeld zien.

3.32 Opgave Zij I een interval en $f\colon I \to \mathbb{R}$ continu. Bewijs dat $f(I)$ een interval is.

3.33 Opmerking We benadrukken nog eens dat de tussenwaardestelling het instrument is, waardoor de n-de machtswortel $a^{1/n}$ van een positief reëel getal a en ook de cyclometrische functies en inversen van de hyperbolische functies (zie syll. Analyse A, §5.3 en §5.5) zinvol gedefinieerd kunnen worden. Bekijk hiertoe nog eens syll. Analyse A, Stelling 9.10 over de continuïteit van de inverse functie en merk op dat daar allereerst met behulp van de tussenwaardestelling de existentie van de inverse functie aangetoond wordt. Zie syll. Analyse A, begin van hst. 16, hoe dit toegepast wordt op de functie $x \mapsto x^{1/n}\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$.

3.4 *Uniforme continuïteit*

In dit deelhoofdstuk veronderstellen we voor het gemak dat de beschouwde functies reëelwaardig zijn.

3.34 Zij $V \subset \mathbb{R}$ en zij $f\colon V \to \mathbb{R}$ continu. Dan is f dus continu in alle punten van V, dus Definitie 3.3 geldt voor alle $a \in V$. Met andere woorden, f is continu op V desda er voor iedere $a \in V$ en iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ (afhangend van ε en a) bestaat zo dat voor alle $x \in V$ de implicatie (3.1) geldt. Uitgeschreven in logische quantoren kunnen we zeggen dat de functie $f\colon V \to \mathbb{R}$ continu is op V desda

$$\forall y \in V \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in V \quad (\ |x-y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ ). \tag{3.6}$$

3.35 We bekijken nu een vorm van continuïteit van f op V waarbij de δ in (3.6) afhangend van ε maar onafhankelijk van y gekozen kan worden.

Definitie Zij $V \subset \mathbb{R}$ en $f\colon V \to \mathbb{R}$. De functie f heet *uniform continu op V* als er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle x en y in V geldt dat:

$$|x-y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Met behulp van quantoren: f is uniform continu op V desda

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in V \quad (\ |x-y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ ). \tag{3.7}$$

Vergeleken met (3.6) is in (3.7) de universele quantor $\forall y \in V$ dus door de existentiële quantor $\exists \delta > 0$ heen gehaald.

Uniforme continuïteit van f op V impliceert continuïteit van f in alle punten van V, maar niet omgekeerd. Immers, zij $B(y,\delta)$ een bewering waarvan het al of niet waar zijn afhangt van variabelen y en δ. Vergelijk dan de uitspraken

$$\exists\delta \quad \forall y \quad B(y,\delta) \qquad\qquad \text{en} \qquad\qquad \forall y \quad \exists\delta \quad B(y,\delta).$$

De eerste uitspraak impliceert de tweede, maar de tweede uitspraak impliceert niet noodzakelijk de eerste.

Om wat meer gevoel voor uniforme continuïteit te krijgen bekijken we twee eenvoudige voorbeelden.

3.36 Voorbeeld Bekijk eerst de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) := x^2$. Zij voor een willekeurige deelverzameling V van $\mathbb{R}$ de functie f_V gedefinieerd als de beperking van f tot V. De functie f en alle functies f_V zijn uiteraard continu. Voor willekeurige $x, y \in \mathbb{R}$ geldt dat $|f(x) - f(y)| = |x + y|\,|x - y|$.

Als V een begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ is, dus als $V \subset [-M, M]$ voor zekere $M > 0$, dan zal dus $|f_V(x) - f_V(y)| \le 2M\,|x - y|$ voor alle $x, y \in V$. Dus f_V is dan uniform continu op V. Immers, kies bij gegeven $\varepsilon > 0$ voor δ het getal $\varepsilon/(2M)$.

De functie f is echter niet uniform continu op $\mathbb{R}$. Want $f(n+n^{-1})-f(n) = 2+n^{-2} > 2$ voor $n \in \mathbb{N}$. Dus voor geen enkele $\delta > 0$ kan het waar zijn dat $|f(x) - f(y)| < 2$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ met $|x - y| < \delta$. Immers, kies $n \in \mathbb{N}$ met $1/n < \delta$ en neem dan $x := n$, $y := n + n^{-1}$.

3.37 Voorbeeld Bekijk nu de functie $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) := x^{-1}$ en zij f_a de beperking van f tot $[a,\infty)$, waarbij $a > 0$. Dan zijn f en alle f_a continu. Voor willekeurige $x, y > 0$ geldt dat $|f(x) - f(y)| = |x - y|/(xy)$.

Als $x, y \ge a > 0$ dan $|f_a(x) - f_a(y)| \le a^{-2}\,|x - y|$. Dus f_a is uniform continu op $[a,\infty)$. Ga na!

De functie f is echter niet uniform continu op $(0,\infty)$. Want voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $f((n+1)^{-1}) - f(n^{-1}) = 1$, terwijl $|(n+1)^{-1} - n^{-1}| < n^{-2}$ (ga na). Dus voor geen enkele $\delta > 0$ kan het waar zijn dat $|f(x) - f(y)| < 1$ voor alle $x, y \in (0,\infty)$ met $|x - y| < \delta$. Immers, kies $n \in \mathbb{N}$ met $n^{-2} < \delta$ en neem dan $x := (n+1)^{-1}$, $y := n^{-1}$.

3.38 In Voorbeeld 3.36 bereikten we uniforme continuïteit als we weg van $\pm\infty$ bleven, en in Voorbeeld 3.37 als we weg van 0 bleven. De plaatsen waarvan we weg moesten blijven waren ook juist de plaatsen waar de functie willekeurig sterk ging stijgen of dalen. Dit suggereert een algemeen verband tussen uniforme continuïteit en begrensdheid van de eerste afgeleide.

We kunnen in de twee voorbeelden ook constateren dat er uniforme continuïteit geldt als we ons beperken tot een gesloten en begrensd interval. De voorbeelden laten bovendien zien dat continuïteit niet noodzakelijk uniform hoeft te zijn voor een functie op een onbegrensd of een niet-gesloten interval.

We formuleren en bewijzen nu uitspraken die stroken met deze experimentele waarnemingen. Eerst roepen we de middelwaardestelling (zie syll. Analyse A, Stelling 10.9) in herinnering.

Stelling (*middelwaardestelling*) Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Als f continu is op $[a,b]$ en f differentieerbaar op (a,b), dan is er een $\xi \in (a,b)$ zo dat $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

3.39 Propositie Zij $I \subset \mathbb{R}$ een willekeurig interval, zij $f\colon I \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie en neem aan dat er een $M \geq 0$ bestaat zo dat $|f'(x)| \leq M$ voor alle $x \in I$ (dus f' is begrensd op I). Dan geldt dat

$$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y| \quad \text{voor alle } x, y \in I, \tag{3.8}$$

waardoor f uniform continu is op I.

Bewijs Voor het bewijs van (3.8) mogen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $x, y \in I$ met $x < y$. De middelwaardestelling 3.38 voor f beperkt tot het interval $[x, y]$ levert het bestaan van een $\xi \in (x, y)$ zo dat

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = |f'(\xi)| \leq M.$$

Dit bewijst (3.8). Zij nu $\varepsilon > 0$. In het geval $M > 0$ kunnen we $\delta := \varepsilon/M$ nemen en en verifiëren dat aan Definitie 3.35 voldaan is. Als $M = 0$ dan kan δ willekeurig gekozen worden. □

Een functie f op een open interval I die aan de voorwaarde (3.8) voldoet voor zekere $M \geq 0$, heet *Lipschitz-continu* op I. Merk op dat voor een functie f op een open interval I de implicaties (a)⇒(b)⇒(c)⇒(d) gelden, waarbij:
(a) f heeft een begrensde afgeleide op I;
(b) f is Lipschitz-continu op I;
(c) f is uniform continu op I;
(d) f is continu op I.

3.40 Analoog aan Propositie 3.6 kunnen we een equivalente formulering geven voor de situatie dat een functie niet uniform continu is.

Propositie Zij $V \subset \mathbb{R}$ en $f\colon V \to \mathbb{R}$. Dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent.
(a) f is niet uniform continu op V.
(b) Er bestaan een $\varepsilon > 0$ en twee rijen (x_n) en (y_n) in V zo dat $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ terwijl $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Bewijs Er geldt de volgende serie implicaties: (a)⇔(c)⇒(d)⇒(e)⇒(b)⇒(c), waarbij de uitspraken (c), (d) en (e) hieronder gegeven zijn.

(c) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in V \quad (\ |x - y| < \delta \quad \& \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\ ).$
(d) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta \in \{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \exists x, y \in V \quad (\ |x - y| < \delta \quad \& \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\ ).$
(e) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n, y_n \in V \quad (\ |x_n - y_n| < n^{-1} \quad \& \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon\ ).$

Merk op dat (c) de ontkenning is van (3.7). □

Netzo als werd opgemerkt na Propositie 3.6 geldt voor bovenstaande Propositie dat je haar niet uit je hoofd moet leren, maar haar in de praktijk moet kunnen reproduceren (vooral (a)⇒(b)) door haar snel af te leiden.

3.41 Stelling Zij $[a, b]$ een gesloten begrensd interval en zij $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continu. Dan is f uniform continu op $[a, b]$.

Bewijs Stel dat f niet uniform continu is op $[a, b]$. We kunnen dan $\varepsilon > 0$ en rijen (x_n) en (y_n) in $[a, b]$ nemen als in Propositie 3.40, dus $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ en $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. De rij (x_n) is begrensd, dus wegens de Stelling van Bolzano-Weierstrass heeft die rij een convergente deelrij (x_{n_i}) met zekere limiet z. Omdat $a \leq x_{n_i} \leq b$, zal ook $a \leq z \leq b$ (cf. Propositie 2.5). Omdat $y_{n_i} = x_{n_i} + (y_{n_i} - x_{n_i})$, convergeert de rij (y_{n_i}) naar $z + 0 = z$. Dus, wegens de continuïteit van f zal $\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = f(z) = \lim_{i\to\infty} f(y_{n_i})$. Dus enerzijds $|f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})| \geq \varepsilon$, anderzijds $\lim_{i\to\infty} |f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})| = 0$. Dit is een tegenspraak. $\square$

Merk op dat de geslotenheid van het interval, de begrensdheid van het interval en de continuïteit van f allemaal gebruikt zijn in bovenstaand bewijs.

3.42 Opgave Zij $W \subset V \subset \mathbb{R}$, zij $f\colon V \to \mathbb{R}$ en zij de functie $g\colon W \to \mathbb{R}$ de beperking van f tot W. Bewijs: Als f uniform continu is op V dan is g uniform continu op W.

3.43 Opgave Laten I_1, I_2 intervallen zijn met $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ en laat $I := I_1 \cup I_2$, $f\colon I \to \mathbb{R}$. Zij $f|_{I_1}$ uniform continu op I_1 en $f|_{I_2}$ uniform continu op I_2. Bewijs dat f uniform continu is op I.

3.44 Opgave Zij $I := [a, \infty)$ of $I := (a, \infty)$ en zij $f\colon I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar en neem aan dat $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$. Bewijs dat f niet uniform continu is op I.

3.45 Opgave Geef een voorbeeld van een functie $f\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$ die differentieerbaar is met $\lim_{x\downarrow 0} f'(x) = \infty$, terwijl f uniform continu is op $(0, 1]$.

3.46 Opgave Zij $I \to \mathbb{R}$ een open interval en zij $f\colon I \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar. Zij $[a, b] \subset I$. Stelling 3.41 impliceert dat f uniform continu is op $[a, b]$. Geef een alternatief bewijs hiervoor door gebruikmaking van Propositie 3.39 en Stelling 3.26.

3.47 Opgave Zij $V \subset \mathbb{R}$ en zij $f\colon V \to \mathbb{R}$ uniform continu.

a) Laat zien dat f een begrensde functie is als de verzameling V begrensd is.
b) Laat d.m.v. een voorbeeld zien dat f niet begrensd hoeft te zijn als V niet begrensd is.
c) Bewijs dat een onbegrensde functie $f\colon V \to \mathbb{R}$ op een begrensde deelverzameling V van $\mathbb{R}$ niet uniform continu is.
d) Zij $f(x) := \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$. Voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ is f uniform continu op $(0, 1)$?

3.48 Opgave Zij f een continue reëelwaardige begrensde functie op een begrensd maar niet-gesloten interval. Is f noodzakelijk uniform continu?

3.49 Opgave

a) Zij $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ continu en neem aan dat $\lim_{x\downarrow a} f(x)$ bestaat. Bewijs dat f uniform continu is op $(a, b]$.
b) Zij $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continu en neem aan dat $\lim_{x\to\infty} f(x)$ bestaat. Bewijs dat f uniform continu is op $[0, \infty)$.

3.50 Opmerking De meeste definities en stellingen uit dit hoofdstuk zullen bij het vak Topologie in een algemener kader terugkomen. We noemen Definities 3.3, 3.7, 3.17, 3.35, Proposities 3.14, 3.18, 3.19, 3.30, en Stellingen 3.26, 3.41.

3.51 Recapitulatie van enige stellingen over uniforme continuïteit

1. ALS $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu,
   DAN f uniform continu op $[a,b]$

2. ALS I interval, $f\colon I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar, f' begrensd op I,
   DAN f uniform continu op I.

3. ALS $W \subset V \subset \mathbb{R}$, $f\colon V \to \mathbb{R}$, f uniform continu op V,
   DAN $f|_W$ uniform continu op W.

4. ALS I_1, I_2 intervallen, $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, $I = I_1 \cup I_2$, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f|_{I_1}$ uniform continu op I_1, $f|_{I_2}$ uniform continu op I_2,
   DAN f uniform continu op I.

5. ALS $V \subset \mathbb{R}$, V begrensd, $f\colon V \to \mathbb{R}$, f niet begrensd op V,
   DAN f niet uniform continu op V.

6. ALS $I = (a,\infty)$ of $I = [a,\infty)$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$,
   DAN f niet uniform continu op I.

7. ALS $V \subset \mathbb{R}$, $f\colon V \to \mathbb{R}$, er bestaat een $\varepsilon > 0$ en er bestaan twee rijen (x_n) en (y_n) in V met $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ en $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ voor elke $n \in \mathbb{N}$,
   DAN f niet uniform continu op V.

Verdere vraagstukken

V3.1 Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) := 0$ als $x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cup \{0\}$, en $f(\pm p/q) := 1/q$ als $p, q \in \mathbb{N}$ zonder gemeenschappelijke delers. Bewijs dat f in elk punt van $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cup \{0\}$ continu is en in elk punt van $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ niet continu is.

V3.2 Bewijs dat de vergelijking $x^3 + px + q = 0$ minstens één reële wortel heeft ($p, q \in \mathbb{R}$).

V3.3 Zij $f\colon [0,1] \to [0,1]$ continu. Toon aan dat er een $x \in [0,1]$ is met $f(x) = x$.

V3.4
a) De functie $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ is continu met $f(0) = f(2)$. Bewijs dat er een $x \in [0,1]$ is met $f(x) = f(x+1)$.
b) De temperatuur op het aardoppervlak is een continue functie van de plaats. Toon aan dat er op iedere grote cirkel op de aarde twee antipodale punten zijn met dezelfde temperatuur.

V3.5 Bewijs dat de volgende functies f uniform continu zijn op het gegeven interval.
a) $f(x) := x \sin(1/x)$ op $(0,1]$
b) $f(x) := x^{-1} \sin x$ op $(0,1]$
c) $f(x) := x^{-1} \sin x$ op $(0,\infty)$

V3.6 Zij $f(x) := \sqrt{x}$. Is f uniform continu op $[0,1]$? Is f uniform continu op $[1,\infty)$? Is f uniform continu op $[0,\infty)$?

V3.7 Zijn de volgende functies uniform continu op $\mathbb{R}$?
a) $x \mapsto (\sin x)^2$
b) $x \mapsto \sin(x^2)$

V3.8 Zijn de volgende functies uniform continu op $(0,\infty)$?
a) $x \mapsto x \sin x$
b) $x \mapsto x \log x$

V3.9 Laat f een functie op $(0,1]$ zijn. Definieer g op $[1,\infty)$ door $g(x) := f(1/x)$.
a) Bewijs: als f uniform continu is op $(0,1]$ dan is g uniform continu op $[1,\infty)$.
b) Geldt ook: als g uniform continu is op $[1,\infty)$ dan is f uniform continu op $(0,1]$?

V3.10 Geef een voorbeeld van een differentieerbare functie f op $[0,\infty)$ zo dat er een rij (x_n) in $[0,\infty)$ is met $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ en $\lim_{n\to\infty} f'(1/x_n) = \infty$, terwijl toch f uniform continu is op $[0,\infty)$.

V3.11 Zij de functie $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) := \displaystyle\int_0^x e^{-t^2+\sin t}\,dt$. Bewijs dat f uniform continu is op $[0,\infty)$.

4 Extrema en convexiteit

4.1 Extrema

Dit deelhoofdstuk geeft wat verdere theoretische onderbouwing van een aspect van het functie-onderzoek dat al veel in de praktijk op het VWO is geoefend.

4.1 Definitie Zij I een interval en $f\colon I \to \mathbb{R}$.

(a) De functie f neemt een *lokaal maximum* aan in een punt $a \in I$ als er $\delta > 0$ bestaat zo dat $f(x) \leq f(a)$ voor alle $x \in I$ met $|x - a| < \delta$, d.w.z. als er een omgeving U van a bestaat zo dat $\max_{x \in U \cap I} f(x) = f(a)$.
Analoog zeggen we dat de functie f een *lokaal minimum* aanneemt in een punt $a \in I$ als er $\delta > 0$ bestaat zo dat $f(x) \geq f(a)$ voor alle $x \in I$ met $|x - a| < \delta$.
De functie f neemt een *lokaal extremum* aan in een punt $a \in I$ als f in dat punt een lokaal maximum of een lokaal minimum aanneemt.

(b) Bij lokale maxima maken we onderscheid tussen tussen *absolute* en *relatieve* maxima. De functie f neemt een *absoluut maximum* aan in een punt $a \in I$ als $f(x) \leq f(a)$ voor alle $x \in I$, d.w.z. als $\max_{x \in I} f(x) = f(a)$. De functie f neem een *relatief maximum* aan in a als f in a een lokaal maximum aanneemt dat niet absoluut is, d.w.z. dat de eigenschap heeft dat $f(b) > f(a)$ voor zekere $b \in I$.
Analoog kunnen we definiëren wanneer f een *absoluut* of *relatief minimum* aanneemt.

(c) Bij lokale maxima maken we voorts onderscheid tussen *sterke* en *zwakke* lokale maxima De functie f neemt een *sterk lokaal maximum* aan in a als we $\delta > 0$ zelfs zo kunnen kiezen dat de strikte ongelijkheid $f(x) < f(a)$ geldt voor alle $x \in I$ met $0 < |x-a| < \delta$.
De functie f neemt een *zwak lokaal maximum* aan in a als f in a een lokaal maximum aanneemt dat niet sterk is, d.w.z. dat de eigenschap heeft dat er bij iedere $\delta > 0$ een $x \in I$ is met $0 < |x - a| < \delta$ zo dat $f(x) = f(a)$.
Analoog kunnen we definiëren wanneer f een *sterk* of *zwak lokaal minimum* aanneemt.

(d) Bij lokale maxima kunnen we tenslotte onderscheid maken tussen *inwendige maxima* en *randmaxima*. Als f een lokaal maximum aanneemt in $a \in I$ dan spreken we van een *lokaal inwendig maximum* als a een inwendig punt is van het interval I is, en we spreken van een *lokaal randmaximum* als a een randpunt is van het interval I.
Analoog kunnen we een *lokaal inwendig minimum* en een *lokaal randminimum* definiëren.

4.2 Opgave Zij I een interval en $f\colon I \to \mathbb{R}$. Bepaal in de onderstaande gevallen de punten waar f een lokaal maximum of minimum aannneemt en ga na of deze lokale extrema absoluut of relatief, sterk of zwak, rand- of inwendig zijn.

a) $I := (0, 1]$, $f(x) := x(1 - x)$.
b) $I := [0, 2]$, $f(x) := x(1 - x)$.
c) $I := [0, 2\pi]$, $f(x) := \sin x$.
d) $I := [-1, 1]$, $f(x) := x$ als $0 \leq x \leq 1$, $f(x) := 0$ als $-1 \leq x < 0$.

4.3 Opgave Zij I een interval en zij J het deelinterval van I bestaande uit alle inwendige punten van I. Zij $f\colon I \to \mathbb{R}$ en zij $g\colon J \to \mathbb{R}$ de beperking van f tot J. Bewijs dat, als g een lokaal maximum resp. minimum aanneemt in een punt $a \in J$, dan f ook een lokaal maximum resp. minimum aanneemt in a, en dat dit lokale extremum van f sterk of zwak is al naar gelang het extremum van g sterk of zwak is. Gelden deze implicaties ook als J een willekeurig deelinterval van I is?

4.4 We zullen nu, onder zekere differentieerbaarheidsaannnamen voor f, noodzakelijke danwel voldoende voorwaarden afleiden opdat f in een zeker inwendig punt van I een lokaal maximum of minimum aanneemt. Voor het gemak nemen we reeds aan dat het interval I open is. Zoniet, dan kunnen we het onderstaande toepassen op de beperking van f tot het inwendige van I.

Propositie Zij I een open interval, zij $a \in I$ en zij $f\colon I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar in a. Als f een lokaal extremum aanneemt in a dan $f'(a) = 0$.

Bewijs Stel f neemt een lokaal minimum aan in a. Dan geldt voor voldoende kleine $\delta > 0$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \quad \text{als } a < x < a + \delta; \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 \quad \text{als } a - \delta < x < a.$$

Nu volgt er uit Propositie 3.16 dat

$$f'(a) = \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \quad \text{en} \quad f'(a) = \lim_{x \uparrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

dus $f'(a) = 0$.
In het geval dat f een lokaal maximum in a aanneemt, passen we het juist bewezene toe op de functie $x \mapsto -f(x)$. $\square$

Merk op dat omgekeerd uit $f'(a) = 0$ niet volgt dat f een lokaal extremum aanneemt in a. Er zou een horizontaal buigpunt kunnen zijn. Kijk bijv. naar $f(x) := x^3$ in het punt 0.

Als $f\colon V \to \mathbb{R}$, met V een omgeving van a, en als $f'(a) = 0$, dan heet a een *stationair punt* van f.

4.5 Propositie Zij I een open interval en $f\colon I \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Zij $a \in I$ en $\delta > 0$ zo dat $(a - \delta, a + \delta) \subset I$.

(a) Als $f'(x) \leq 0$ voor alle $x \in (a - \delta, a)$ en $f'(x) \geq 0$ voor alle $x \in (a, a + \delta)$ dan neemt f een lokaal minimum aan in a. Als bovenstaande twee ongelijkheden strikt zijn voor de vermelde waarden van x dan is het lokale minimum sterk.

(b) Als $f'(x) \geq 0$ voor alle $x \in (a - \delta, a)$ en $f'(x) \leq 0$ voor alle $x \in (a, a + \delta)$ dan neemt f een lokaal maximum aan in a. Als bovenstaande twee ongelijkheden strikt zijn voor de vermelde waarden van x dan is het lokale maximum sterk.

(c) Als $f'(x) > 0$ voor alle $x \in (a - \delta, a)$ en alle $x \in (a, a + \delta)$ dan neemt f geen lokaal extremum aan in a.

(d) Als $f'(x) < 0$ voor alle $x \in (a - \delta, a)$ en alle $x \in (a, a + \delta)$ dan neemt f geen lokaal extremum aan in a.

Bewijs Alle onderdelen zijn een direct gevolg van de middelwaardestelling 3.38, die we hier toepassen in de volgende vorm. Bij elke h met $0 < |h| < \delta$ is er een $\theta \in (0, 1)$ zo dat $f(a + h) - f(a) = h\, f'(a + \theta h)$. $\square$

4.6 **Opgave** Neem de gegevens aan van Propositie 4.5. Stel dat $f'(x) \leq 0$ voor alle $x \in (a - \delta, a)$ en $f'(x) \geq 0$ voor alle $x \in (a, a + \delta)$. Bewijs dat het door f in a aangenomen lokaal minimum sterk is desda als er bij elke $\gamma \in (0, \delta]$ een $x \in (a - \gamma, a)$ en $y \in (a, a + \gamma)$ zijn zo dat $f'(x) < 0$ en $f'(y) > 0$.

4.7 Opgave Propositie 4.5 zal niet altijd uitsluitsel geven of in zeker punt a een lokaal extremum wordt aangenomen. Bekijk bijv. de functie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) := x^2 \left(1 + (\sin(x^{-1}))^2\right)$ als $x \neq 0$ en $f(0) := 0$. Bewijs dat f een differentieerbare functie die in 0 een sterk lokaal minimum aanneemt (dat bovendien absoluut is), terwijl zowel $f'(x)$ als $f'(-x)$ voor willekeurig kleine $x > 0$ zowel positieve als negatieve waarden kunnen aannemen.

4.8 In plaats van het nagaan van het tekenverloop van $f'(x)$ kunnen we ook uit het teken van $f''(a)$ voor een punt a met $f'(a) = 0$ concluderen of we met een lokaal maximum of minimum te maken hebben.

Propositie Zij I een open interval en zij $f: I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar. Zij $a \in I$ zo dat $f''(a)$ bestaat.
(a) Als $f'(a) = 0$ en $f''(a) > 0$ (resp. < 0) dan neemt f een sterk lokaal minimum (resp. maximum) aan in a.
(b) Als f een lokaal minimum (resp. maximum) aanneemt in a dan $f'(a) = 0$ en $f''(a) \geq 0$ (resp. ≤ 0).

Bewijs We bewijzen eerst (a). Zij $f'(a) = 0$ en $f''(a) > 0$. Er geldt dat $f''(a) = \lim_{h \to 0} h^{-1} f'(a + h)$. Omdat $f''(a) > 0$ is er dus een $\delta > 0$ zo dat $f'(a + h) > 0$ en $f'(a - h) < 0$ voor $0 < h < \delta$. Pas nu Propositie 4.5(a) toe om te concluderen dat f in a een sterk lokaal minimum aanneemt. Het andere geval van (a) volgt door het zojuist bewezen resultaat toe te passen op de functie $x \mapsto -f(x)$.

Nu bewijzen we (b). Stel f neemt een lokaal minimum aan in a. Er volgt uit Propositie 4.4 dat $f'(a) = 0$. Stel dat $f''(a) < 0$. Dan volgt uit (a) dat f in a een sterk lokaal maximum aanneemt. Dit is in tegenspraak met het feit dat f in a een lokaal minimum aanneemt. Dus $f''(a) \geq 0$. Toepassing van het net bewezene op de functie $x \mapsto -f(x)$ geeft het andere geval van (b). $\square$

4.9 Opmerking In de praktijk, als I een open interval is en $f: I \to \mathbb{R}$ een expliciet gegeven twee keer differentieerbare functie is, dan kunnen we lokale extrema van f zoeken door eerst alle $a \in I$ te vinden waarvoor $f'(a) = 0$ en dan voor elk van deze punten a na te gaan of $f''(a) > 0$ danwel $f''(a) < 0$ en Propositie 4.8 toe te passen. De enige punten waarvan we dan nog niet met zekerheid kunnen zeggen of f er een lokaal extremum aanneemt, zijn die $a \in I$ waarvoor $f'(a) = 0 = f''(a)$. In dat geval kunnen we het tekenverloop van $f'(x)$ voor x in de buurt van a nagaan en Propositie 4.5 proberen toe te passen. We zouden ook kunnen volstaan met het tekenverloop van f' en de berekening van de tweede afgeleide achterwege kunnen laten. Het zal van de situatie afhangen welke methode het snelste tot resultaat leidt, maar de keuze van de methode is ook een kwestie van smaak.

4.10 Opmerking Soms kan toepassing van Stelling 3.26 ons al sneller informatie geven over de ligging van de lokale extrema. Laat I weer een open interval zijn en $f: I \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Stel $[a, b] \subset I$ met $a < b$ zo dat $f(a) = f(b) = 0$ en $f(x) > 0$ voor alle $x \in (a, b)$. Stel we hebben precies één nulpunt, zeg c, van f' gevonden tussen a en b. Wegens Propositie 4.4 neemt f dan hoogstens in één punt van (a, b), nl. c, een lokaal extremum aan. Anderzijds zegt Stelling 3.26 dat f beperkt tot $[a, b]$ een absoluut maximum moet aannemen op $[a, b]$. De waarde van dit absolute maximum moet zeker > 0 zijn, dus het wordt in (a, b) aangenomen, dus in c. Het in c aangenomen lokale maximum is bovendien sterk. Want anders waren er willekeurig dicht bij c andere punten x waar $f(x) = f(c)$. In deze punten zou dan ook een absoluut maximum voor f beperkt tot $[a, b]$ worden aangenomen, dus f' zou daar ook nul zijn, wat is uitgesloten.

Evenzo, als $[a, b] \subset I$ zo dat $f(a) = f(b) = 0$ en $f(x) < 0$ voor alle $x \in (a, b)$, en als f' precies één nulpunt c zou hebben op (a, b), dan neemt f op (a, b) een uniek lokaal minimum aan, nl. een sterk lokaal minimum in c.

4.11 Voorbeeld Zij $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) := x^3 - x$. Dan heeft f nulpunten -1, 0 en 1 en $f'(x) = 3x^2 - 1$, dus f' heeft nulpunten $\pm 3^{-\frac{1}{2}}$. Omdat $f(x) < 0$ als $0 < x < 1$ en $f(x) > 0$ als $-1 < x < 0$, kunnen we Opmerking 4.10 toepassen en concluderen dat f een sterk lokaal minimum aanneemt in $3^{-\frac{1}{2}}$ en een sterk lokaal maximum in $-3^{-\frac{1}{2}}$ en verder geen lokale extrema aanneemt.

4.12 We brengen nu ook de mogelijke randpunten van het interval in het spel. Zij I een interval en $f: I \to \mathbb{R}$. Als I een linker randpunt a bevat, dan noemen we f *differentieerbaar in* a met *afgeleide* $f'(a)$ als f rechts differentieerbaar is in a en we gebruiken dan $f'(a)$ als notatie voor de rechter afgeleide $f'_{\mathrm{R}}(a)$ (zie syll. Analyse A, Definitie 10.1). Evenzo, als I een rechter randpunt b bevat, dan bedoelen we met differentieerbaarheid van f in b en afgeleide $f'(b)$ dat f links differentieerbaar is in b met linker afgeleide $f'_{\mathrm{L}}(b)$. Zoals in syll. Analyse A, Definitie 10.2 noemen we f *differentieerbaar op* I als f differentieerbaar is in alle punten van I, ook in de eventuele randpunten.

Propositie Zij I een interval dat zijn linker randpunt a bevat. Zij $f: I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar.

(a) Als f een lokaal minimum (resp. maximum) aanneemt in a dan $f'(a) \geq 0$ (resp. ≤ 0).
(b) Als $f'(a) > 0$ (resp. < 0) dan neemt f een sterk lokaal minimum (resp. maximum) aan in a.

Bewijs Er geldt dat
$$f'(a) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,. \tag{4.1}$$
Eerst bewijzen we (a) Als f een lokaal minimum aanneemt in a dan $f(a+h) - f(a) \geq 0$ voor $h > 0$ voldoende klein, dus $f'(a) \geq 0$ wegens Propositie 3.16. Het geval met een lokaal maximum gaat analoog. Voor het bewijs van (b) nemen we omgekeerd aan dat $f'(a) > 0$. Dan bestaat er wegens (4.1) een $\delta > 0$ zo dat $f(a+h) - f(a) > 0$ als $0 < h < \delta$. Dit bewijst één helft van (b). De andere helft gaat analoog. □

Evenzo geldt:

4.13 Propositie Zij I een interval dat zijn rechter randpunt b bevat. Zij $f: I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar.

(a) Als f een lokaal minimum (resp. maximum) aanneemt in b dan $f'(b) \leq 0$ (resp. ≥ 0).
(b) Als $f'(b) < 0$ (resp. > 0) dan neemt f een sterk lokaal minimum (resp. maximum) aan in a.

4.14 Als f' een nulpunt heeft in een randpunt van I dan geven Proposities 4.12 en 4.13 nog geen uitsluitsel of daar een extremum wordt aangenomen. De resultaten in de volgende Propositie geven dan mogelijk uitsluitsel.

Propositie Zij I een interval en $f\colon I \to \mathbb{R}$ een continue functie die differentieerbaar is in alle inwendige punten van I.

(a) Neem aan dat I zijn linker randpunt a bevat en zij $\delta > 0$ zo dat $[a, a+\delta) \subset I$. Dan geldt: Als $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0) voor alle $x \in (a, a+\delta)$ dan neemt f een lokaal minimum (resp. maximum) aan in a. In het geval van een strikte ongelijkheid is er sprake van een sterk lokaal extremum.

(b) Neem aan dat I zijn rechter randpunt b bevat en zij $\delta > 0$ zo dat $(b-\delta, b] \subset I$. Dan geldt: Als $f'(x) \leq 0$ (resp. ≥ 0) voor alle $x \in (b-\delta, b)$ dan neemt f een lokaal minimum (resp. maximum) aan in b. In het geval van een strikte ongelijkheid is er sprake van een sterk lokaal extremum.

Bewijs Analoog aan het bewijs van Propositie 4.5, met gebruik van de middelwaardestelling. Merk in 3.38 op dat de middelwaardestelling in de randpunten geen differentieerbaarheid, doch slechts continuïteit vereist. $\square$

4.15 Opmerking Voor randextrema kan ook een soortgelijke opmerking worden gemaakt als in Opmerking 4.10. Zij bijvoorbeeld I een interval dat zijn linker randpunt a bevat en zij $f\colon I \to \mathbb{R}$ continu op I en differentieerbaar in alle inwendige punten van I. Stel dat c een inwendig punt van I is zo dat $f(c) = 0$, $f(x) > 0$ als $x \in [a, c)$, en $f'(x) \neq 0$ als $x \in (a, c)$. Vanwege Stelling 3.26 moet f beperkt tot $[a, c]$ een absoluut maximum aannemen in zeker punt x. Omdat $f(x) > 0$, zal $x \in [a, c)$. Omdat $f'(x) \neq 0$ als $x \in (a, c)$, zal $x = a$ gelden. Bovendien neemt f een sterk lokaal maximum aan in a, want anders zou er een $y \in (a, c)$ zijn waar ook een lokaal maximum wordt aangenomen, maar $f'(y) \neq 0$ als $y \in (a, c)$. Het tekenverloop van f en de nulpunten van f' hebben ons dus reeds de benodigde informatie gegeven om te kunnen concluderen of er in a een randextremum wordt aangenomen.

Kijk bijv. naar Voorbeeld 4.11. Zij g de daar gegeven functie f beperkt tot $[-2, 2]$. Dan kunnen we onmiddellijk concluderen dat g in -2 een sterk lokaal minimum en in 2 een sterk lokaal maximum aannneemt.

4.2 Convexe functies

In het eerste deel van dit hoofdstuk hebben we gezien dat het tekenverloop van de eerste afgeleide belangrijke informatie geeft over eventuele lokale extrema. Enigszins verwant hiermee is het begrip convexe functie.

4.16 Definitie Zij I een interval en zij $f\colon I \to \mathbb{R}$. De functie f heet *convex* als voor alle $x, y \in I$ en voor alle $\lambda \in (0, 1)$ geldt dat

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(y). \tag{4.2}$$

Meetkundig gezegd: De grafiek van f tussen x en y komt niet boven het lijnstuk uit dat $(x, f(x))$ met $(y, f(y))$ verbindt.

De functie f heet *concaaf* als de functie $-f$ convex is, i.e., als (4.2) geldt met $\geq$ i.p.v. $\leq$. De onderstaande eigenschappen i.v.m. convexe functies hebben evidente analoga voor concave functies (formuleer deze zelf).

4.17 Opgave Geef de meest algemene vorm van een functie $f\colon I \to \mathbb{R}$ (I een interval) die zowel convex als concaaf is.

4.18 Noem een deelverzameling V van $\mathbb{R}^n$ *convex* als voor elke $x, y \in V$ en elke $\lambda \in (0,1)$ geldt dat $\lambda x + (1-\lambda)y \in V$. Zij I een interval en zij $f\colon I \to \mathbb{R}$. Zij $V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I,\ y \geq f(x)\}$. Bewijs: de functie f is convex desda de verzameling V convex is.

4.19 Zij I een open interval en zij $f\colon I \to \mathbb{R}$ convex. Stel dat f een lokaal extremum aanneemt in zekere $a \in I$. Bewijs dat f dan in a een lokaal minimum aanneemt.

4.20 Bewijs het volgende. Zij I een *open* interval en zij $f\colon I \to \mathbb{R}$ een convexe functie. Dan is f continu.

4.21 Propositie Zij I een open interval en zij $f\colon I \to \mathbb{R}$.
(a) Als f differentieerbaar is op I en f' is monotoon zwak stijgend, dan is de functie f convex.
(b) Als f twee keer differentieerbaar is op I en $f''(x) \geq 0$ voor alle $x \in I$, dan is de functie f convex.

Opgave Bewijs (a) van deze Propositie door op te merken dat, voor $x, y \in I$ met $x < y$ en voor $\lambda \in (0,1)$ de ongelijkheid (4.2) equivalent is met

$$\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)}{(1-\lambda)\,(y-x)} \leq \frac{f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)}{\lambda(y-x)},$$

en door vervolgens de middelwaardestelling 3.38 toe te passen. Daarna kan (b) tot (a) teruggebracht worden door nogmaals de middelwaardestelling toe te passen, maar nu voor f'.

4.22 **Opgave** Zij I een open interval en zij $f\colon I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar. Bewijs het volgende.
a) f is convex desda f' monotoon zwak stijgend is.
b) Neem bovendien aan dat de tweede afgeleide van f bestaat op I. Dan is f convex desda $f''(x) \geq 0$ voor alle $x \in I$.

Verdere vraagstukken

V4.1 Bepaal in welke punten de functie $f\colon I \to \mathbb{R}$ een lokaal maximum of minimum aanneemt en zeg van elk lokaal extremum of het (i) sterk of zwak is, (ii) absoluut of relatief is, en (iii) een rand- of inwendig extremum is, als:
a) $I := [-1, 4]$ en
$$f(x) := \begin{cases} x^2 - 2x & \text{als } 0 \leq x \leq 4, \\ x & \text{als } -1 \leq x < 0. \end{cases}$$
b) $I := [-10, 10]$ en $f(x) := 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$.
c) $I := \mathbb{R}$ en $f(x) := x + \sin x$.

V4.2 Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een polynoom van graad n met reële coëfficiënten en met positieve coëfficiënt in de term van graad n. Veronderstel dat f n reële nulpunten $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ heeft. Kan er een lokaal extremum van f in een nulpunt x_k worden aangenomen? Ga voor elk van de intervallen $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \ldots (x_{n-1}, x_n), (x_n, \infty)$ na hoeveel lokale minima en hoeveel lokale maxima er worden aangenomen.

V4.3 Vind een zo groot mogelijk open interval I waarop de functie $x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ convex is.

V4.4 Bewijs dat de functie $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ convex is en de functie $\log\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ concaaf (cf. Definitie 4.16).
Opmerking Zie het hoofdstuk “Invoering van de elementaire functies” voor de rigoureuze definitie van de functies exp en log.

5 Reeksen

In syll. Analyse A, hst. 7 is de definitie gegeven van een (oneindige) reeks $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ van reële of complexe getallen en zijn een aantal convergentiecriteria voor zo'n reeks behandeld. Lees dit hoofdstuk nog eens door. In het nu volgende hoofdstuk zullen sommige toen behandelde criteria worden gegeneraliseerd en zullen nieuwe convergentiecriteria worden behandeld. Er zal ook veel aandacht aan het belangrijke begrip "machtreeks" worden besteed. [We gebruiken de woorden *criterium* en *toets* door elkaar.]

We zullen in het vervolg bij een reeks van complexe getallen spreken van een *reeks in* $\mathbb{C}$ en bij een reeks van reële getallen van een *reeks in* $\mathbb{R}$. We zullen de resultaten hieronder doorgaans alleen formuleren voor het geval dat de ondergrens van sommatie gelijk 1 is, dus voor een reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, maar deze beperking is in het geheel niet essentieel.

5.1 *Het Cauchy-criterium en zijn gevolgen*

Zoals in de syll. Analyse A reeds werd opgemerkt, is convergentie (met som s) van de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ per definitie hetzelfde als convergentie (met limiet s) van de rij (s_n) van *partiële sommen*

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{5.1}$$

Dus iedere voor rijen bewezen stelling kan onmiddellijk herformuleerd worden in termen van reeksen. Bijvoorbeeld:

5.1 Stelling Zij $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ een reeks van reële getallen $a_k \geq 0$.
(a) (zie syll. Analyse A, Stelling 7.6) Als de rij (s_n) van partiële sommen (5.1) naar boven begrensd is, dan convergeert de reeks.
(b) Als de rij (s_n) van partiële sommen (5.1) niet naar boven begrensd is, dan divergeert de reeks.

Opgave Bewijs onderdeel (b) van bovengenoemde stelling.

5.2 Opgave Bewijs het volgende:
(a) Als de rij (a_n) in $\mathbb{C}$ convergeert met limiet a dan convergeert de rij $(\,\overline{a_n}\,)$ met limiet $\overline{a}$.
(b) Als de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{C}$ convergeert met som s dan convergeert de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k}$ met som $\overline{s}$.

5.3 Ook de stelling van Cauchy (zie Stelling 2.8 en Propositie 2.9(c)) kan herschreven worden voor reeksen.

Stelling (*criterium van Cauchy voor reeksen*)
De reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{C}$ is convergent desda er bij elke $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ is zo dat voor elke $m, n \in \mathbb{N}$ geldt dat:

$$m \geq n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Bewijs Zij s_n als in (5.1). Merk op dat $\sum_{k=n}^{m} a_k = s_m - s_{n-1}$ als $m \geq n > 1$. Pas nu de stelling van Cauchy toe op de rij (s_n). $\square$

5.4 Een onmiddellijk gevolg van het criterium van Cauchy is dat het weglaten of toevoegen van eindig veel termen in een gegeven reeks geen invloed heeft op de convergentie of divergentie ervan. Hieronder noemen we enige andere stellingen over reeksen die in in de syll. Analyse A reeds zonder Cauchy bewezen waren, maar die we nu met behulp van Stelling 5.3 kunnen inzien.

Stelling (zie syll. Analyse A, Stelling 7.4 en Gevolg 7.5) Zij $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een reeks in $\mathbb{C}$.
(a) Als de reeks convergeert dan geldt dat $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
(b) Als de rij (a_n) niet naar 0 convergeert dan divergeert de reeks.
(c) Als $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dan kan zowel convergentie als divergentie van de reeks optreden.

5.5 Een belangrijke reeks van eenvoudige gedaante is de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \tag{5.2}$$

waarbij α reëel verondersteld wordt. [Zie syll. Analyse A, Definitie 16.4 voor de definitie van a^x met $a > 0$ en x willekeurig reëel. Op deze definitie komen we in een volgend hoofdstuk terug.] Er volgt uit Stelling 5.4(b) dat de reeks (5.2) divergeert als $\alpha \leq 0$. In syll. Analyse A, Voorbeelden 7.2 en 7.7, werd achtereenvolgens bewezen dat de reeks (5.2) divergeert als $\alpha = 1$ en convergeert als $\alpha = 2$. In syll. Analyse A, Vraagstuk V7.1 werd gevraagd te bewijzen dat de reeks (5.2) convergeert als $\alpha \geq 2$ en divergeert als $\alpha \leq 1$. Ook voor $1 < \alpha < 2$ convergeert de reeks (5.2):

Propositie De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ convergeert als $\alpha > 1$ en divergeert als $\alpha \leq 1$.
Bewijs Zij $\alpha > 1$. Schrijf $a_n := n^{-\alpha}$. Als $2^m \leq n < 2^{m+1}$ dan geldt dat $a_n \leq 2^{-m\alpha}$. Dus

$$\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} a_k \leq 2^m\, 2^{-m\alpha} = 2^{-m(\alpha-1)}.$$

Dus als $n < 2^{m+1}$ dan geldt voor de partiële som $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ dat

$$s_n \leq \sum_{k=0}^{m} 2^{-k(\alpha-1)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(\alpha-1)} = \frac{1}{1-2^{-(\alpha-1)}}.$$

De convergentie van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ volgt nu uit Stelling 5.1(a). □

Later in deze syllabus zal nog een tweede bewijs van deze Propositie aan de orde komen, dat de reeks vergelijkt met een overeenkomstige oneigenlijke integraal.

Merk op dat de verschillende mogelijkheden voor Stelling 5.4(c) gerealiseerd kunnen worden met behulp van de reeks (5.2) voor verschillende keuzen van α, bijv. $\alpha = 1$ en $\alpha = 2$.

5.6 **Opgave** Zij (a_n) een rij in $\mathbb{R}$ zo dat $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$. Bewijs dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert desda de reeks $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ convergeert.
Opmerking Propositie 5.5 voor $\alpha > 0$ is een speciaal geval van dit resultaat.

5.7 Opgave Toon aan dat de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ convergeert desda $\alpha > 1$.

5.8 In syll. Analyse A, Stelling 7.12 werd het criterium van Leibniz voor alternerende reeksen geformuleerd en bewezen. Het werd o.a. gebruikt om de convergentie in te zien van de alternerende reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \,. \tag{5.3}$$

We formuleren het criterium nogmaals:

Stelling (*criterium van Leibniz*) Zij (b_n) een monotoon zwak dalende rij van positieve getallen, i.e., $b_1 \geq b_2 \geq \cdots > 0$, en zij $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Dan convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\, b_n$.

Opgave Geef een nieuw bewijs van bovenstaande stelling met behulp van het Criterium van Cauchy. Laat daartoe eerst zien dat $|\sum_{k=n}^{m}(-1)^{k+1}\, b_k| \leq b_n$ als $m \geq n$.

5.9 In syll. Analyse A, Definities 7.8 en 7.13, werden de definities van *absolute convergentie* en *relatieve convergentie* voor een reeks gegeven. Voor een reeks in $\mathbb{R}$ werd daar bewezen dat convergentie volgt uit absolute convergentie. Het bewijs werd daar gegeven met behulp van het vergelijkingskenmerk (syll. Analyse A, Stelling 7.7). We zullen nu beide stellingen algemener formuleren voor reeksen in $\mathbb{C}$ en de bewijzen geven met behulp van het Criterium van Cauchy.

Stelling Als een reeks in $\mathbb{C}$ absoluut convergeert dan convergeert die reeks.

Bewijs Stel dat de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absoluut convergeert. Dan convergeert de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Voor $m, n \in \mathbb{N}$ met $m \geq n$ geldt wegens de driehoeksongelijkheid dat

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k|.$$

Wegens Stelling 5.3 is er bij elke $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ zo dat het rechter lid van deze ongelijkheid kleiner is dan ε voor $m \geq n \geq N$. Dat geldt dan ook voor het linker lid van de ongelijkheid, dus wegens Stelling 5.3 convergeert de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. □

5.10 Opgave Stel dat de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absoluut convergeert. Bewijs dat

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

5.11 Stelling (*vergelijkingstoets: majorantencriterium*) Zij $a_k \in \mathbb{C}$ $(k \in \mathbb{N})$ en $b_k \geq 0$ $(k \in \mathbb{N})$ en stel dat er $N \in \mathbb{N}$ en $C > 0$ bestaat zo dat $|a_k| \leq C\, b_k$ als $k \geq N$. Dan geldt: als de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergeert dan convergeert de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absoluut.

Bewijs Neem aan dat de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergeert. Zij $\varepsilon > 0$. Wegens Stelling 5.3 is er een $N_1 \in \mathbb{N}$ zo dat $\sum_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon/C$ als $m \geq n \geq N_1$. Dan mogen we $N_1 \geq N$ nemen, dus geldt er dat $|a_k| \leq C\, b_k$ als $k \geq N_1$. We concluderen dat $\sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon$ als $m \geq n \geq N_1$. Dus wegens Stelling 5.3 convergeert de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. □

Gevolg (*minorantencriterium*, reeds genoemd in syll. Analyse A, Opmerking 7.7) Laat $C > 0$. Zij $0 \leq C\,a_k \leq b_k$ voor $k \in \mathbb{N}$ voldoende groot. Dan geldt: Als de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergeert dan divergeert de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

5.12 Een direct gevolg van de vergelijkingstoets is het volgende limietcriterium, dat vaak in de praktijk van nut is.

Stelling (*limietcriterium*) Laten (a_n) en (b_n) rijen zijn van positieve getallen. Neem aan dat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ bestaat met limiet $L \in (0,\infty)$. Dan zijn de reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ òf beide convergent òf beide divergent.

Bewijs Er volgt uit de limietaanname dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $\frac{1}{2}L \leq \dfrac{a_n}{b_n} \leq 2L$ als $n \geq N$. Pas nu Stelling 5.11 en Gevolg 5.11 toe. □

Opgave Laten (a_n) en (b_n) rijen zijn van positieve getallen. Neem aan dat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ bestaat in $\overline{\mathbb{R}}$ met limiet L. Bewijs het volgende.

(a) Als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergeert en als $0 \leq L < \infty$ dan convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergeert en als $0 < L \leq \infty$ dan divergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

In bovenstaande Stelling en Opgave kunnen we uiteraard de voorwaarden verzwakken door slechts te eisen dat a_n en b_n positief zijn voor n voldoende groot.

5.13 Opgave Laten (a_n) en (b_n) rijen zijn van reële getallen zo dat de getallen a_n òf alle > 0 òf alle < 0 zijn en ook de getallen b_n òf alle > 0 òf alle < 0 zijn. Neem aan dat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ bestaat met limiet L in $\mathbb{R}$ maar $\neq 0$. Bewijs dat de reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ òf beide convergent òf beide divergent zijn.

Bij de toepassing van het limietcriterium zullen we doorgaans voor de ene reeks, zeg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, een bekende reeks nemen waarvan we convergentie of divergentie goed kennen. In het bijzonder wordt de reeks (5.2) voor zekere α hiertoe vaak gebruikt. Als nu een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gegeven is dan gaan we na of er mogelijk een $\alpha \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n$ een eindige positieve limiet L heeft. De convergentie of divergentie van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ volgt dan uit Stelling 5.12 en Propositie 5.5. Gezien Opgave 5.12 zouden we ook tot convergentie kunnen besluiten als $L = 0$ en $\alpha > 1$ en tot divergentie als $L = \infty$ en $\alpha \leq 1$.

5.14 Voorbeeld

a) De reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\,(n+2)}$ divergeert, want de termen zijn positief, er geldt dat $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\,\frac{n}{(n+1)\,(n+2)} = 1$, en $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergeert.

b) De reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\,\sin(n^{-1})$ convergeert, want de termen zijn positief, er geldt dat

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\,n^{-1}\,\sin(n^{-1}) = 1$, en de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergeert.

5.2 *De worteltoets en quotiëntentoets*

We komen nu toe aan de twee meest gebruikte convergentiecriteria voor reeksen: de worteltoets van Cauchy en de quotiëntentoets van d'Alembert. Laatstgenoemde toets is reeds behandeld in syll. Analyse A, Stelling 7.10, maar zal hier algemener gegeven worden, met gebruik van lim sup (cf. Hst. 2). Eerst formuleren we beide criteria op een zodanige manier dat het bewijs met behulp van de vergelijkingstoets bijna onmiddellijk duidelijk is.

5.15 Propositie Zij $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een reeks in $\mathbb{C}$. Dan geldt:
(a) Als er een $\rho \in (0, 1)$, een $C > 0$ en een $N \in \mathbb{N}$ bestaan zo dat $|a_n| \leq C\rho^n$ voor $n \geq N$ dan convergeert de reeks absoluut.
(b) Neem bovendien aan dat $a_n \neq 0$ voor n voldoende groot. Als er een $\rho \in (0, 1)$ en een $N \in \mathbb{N}$ bestaan zo dat $|a_{n+1}/a_n| \leq \rho$ voor $n \geq N$ dan convergeert de reeks absoluut.

Bewijs Merk voor het bewijs van (a) op dat $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$ convergeert als $0 < \rho < 1$, dus de bewering volgt uit Stelling 5.11.

Voor het bewijs van (b) mogen we aannemen dat $a_n \neq 0$ als $n \geq N$. Door iteratie volgt nu dat $|a_n| \leq |a_N|\rho^{n-N} = \dfrac{|a_N|}{\rho^N}\rho^n$ als $n \geq N$. Omdat $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$ convergeert, volgt de bewering weer uit Stelling 5.11. □

5.16 Nu herschrijven we de twee convergentiecriteria uit Propositie 5.15 in de meest gebruikte vorm: met behulp van lim sup.

Stelling (*worteltoets van Cauchy*)
Zij $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een reeks in $\mathbb{C}$ en zij $\lambda := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ (dus $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ en $0 \leq \lambda \leq \infty$). Dan geldt:
(a) Als $\lambda < 1$ dan convergeert de reeks absoluut.
(b) Als $\lambda > 1$ dan divergeert de reeks.
(c) Als $\lambda = 1$ dan kan zowel convergentie (absoluut of relatief) als divergentie optreden.

Bewijs (a) Zij $\lambda < 1$. Neem ρ zo dat $\lambda < \rho < 1$. Volgens Propositie 2.22(a) is ρ een uiteindelijke bovengrens van de rij $(|a_n|^{1/n})$, dus er is een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $|a_n|^{1/n} \leq \rho$ voor $n \geq N$, dus $|a_n| \leq \rho^n$ voor $n \geq N$. Pas nu Propositie 5.15(a) toe.

(b) Zij $\lambda > 1$. Volgens Propositie 2.22(b) is 1 dan geen uiteindelijke bovengrens van de rij $(|a_n|^{1/n})$, dus voor oneindig veel waarden van n volgt er dat $|a_n|^{1/n} > 1$. Dus $|a_n| > 1$ voor oneindig veel waarden van n, dus de rij (a_n) convergeert niet naar 0. Pas nu Stelling 5.4(b) toe.

(c) Bekijk de reeks (5.2) voor $\alpha = 1$ en $\alpha = 2$, en de reeks (5.3). Voor al die reeksen geldt dat $\lambda = 1$ (gebruik de standaardlimiet $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$, zie syll. Analyse A, p.23). □

Uit het bewijs van bovenstaande stelling blijkt dat (a) als convergentiecriterium niet krachtiger is dan de vergelijkingstoets Stelling 5.11 gecombineerd met het convergentiegedrag van de meetkundige reeks, en dat (b) als divergentiecriterium niet krachtiger is dan het divergentiecriterium van Stelling 5.4(b). Cauchy's worteltoets heeft echter het voordeel dat je strak en algoritmisch te werk kunt gaan. Je rekent het getal λ in Stelling 5.16 uit en de ligging van λ t.o.v. 1 geeft je mogelijk uitsluitsel over convergentie of divergentie. De methode is vooral aantrekkelijk als de rij $(|a_n|^{1/n})$ convergeert in $\overline{\mathbb{R}}$, want dan geldt dat $\lambda = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$.

5.17 Stelling (*quotiëntentoets van d'Alembert*)
Zij $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een reeks in $\mathbb{C}$. Neem aan dat $a_n \neq 0$ voor n voldoende groot. Dan geldt: Als $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$ dan convergeert de reeks absoluut.

Bewijs Neem ρ zo dat $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < \rho < 1$. Volgens Propositie 2.22(a) is ρ een uiteindelijke bovengrens van de rij $(|a_{n+1}/a_n|)$, dus er is een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $|a_{n+1}/a_n| \le \rho$ voor $n \ge N$. Pas nu Propositie 5.15(b) toe. □

We zien wederom dat dit convergentiecriterium niet krachtiger is dan de vergelijkingstoets. Maar het is een in de praktijk erg handig criterium omdat het quotiënt van twee opeenvolgende termen uit een reeks zo gemakkelijk is uit te rekenen. Als de rij $(|a_{n+1}/a_n|)$ convergeert in $\overline{\mathbb{R}}$ dan zal zijn lim sup gelijk zijn aan zijn limiet. Dat geval werd reeds in syll. Analyse A, Stelling 7.10 besproken, en er werd ook een divergentiecriterium aan gekoppeld. We herhalen dit geval hier.

5.18 Propositie Zij $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een reeks in $\mathbb{C}$. Neem aan dat $a_n \neq 0$ voor n voldoende groot en dat $\lambda := \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ bestaat in $\overline{\mathbb{R}}$ (dus $0 \le \lambda \le \infty$). Dan geldt:
(a) Als $\lambda < 1$ dan convergeert de reeks absoluut.
(b) Als $\lambda > 1$ dan divergeert de reeks.
(c) Als $\lambda = 1$ dan kan zowel convergentie (absoluut of relatief) als divergentie optreden.

Bekijk voor (c) weer de drie voorbeelden gegeven in het bewijs van Stelling 5.16(c).

5.19 Voorbeeld We bekijken twee voorbeelden, waar de worteltoets of de quotiëntentoets wordt toegepast op een gegeven reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:
(a) $a_n := n^3\, 2^{-n}$, dus $a_n > 0$. Eerst passen we de worteltoets toe. Er geldt dat $(a_n)^{1/n} = \frac{1}{2}\, n^{3/n}$, dus $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = \frac{1}{2} < 1$. Dus de reeks convergeert absoluut. Ter vergelijking proberen we ook de quotiëntentoets. Er geldt dat $a_{n+1}/a_n = \frac{1}{2}\big((n+1)/n\big)^3$. Dus $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \frac{1}{2} < 1$. Ook deze toets levert abolute convergentie.
(b) Zij $z \in \mathbb{C}$ en $a_n := z^n/n!$. Het geval $z = 0$ is triviaal. Als $z \neq 0$ dan is de quotiëntentoets het gemakkelijkst toepasbaar. We zien dat $|a_{n+1}/a_n| = |z|/(n+1)$, dus $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 0$. Dus de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ is absoluut convergent voor elke $z \in \mathbb{C}$. [We hebben hier een voorbeeld van een machtreeks (cf. syll. Analyse A, Vraagstuk V7.3) en wel de machtreeks van de functie $z \mapsto e^z$ (cf. syll. Analyse A, p.79 voor het geval $z \in \mathbb{R}$). We komen hier later nog uitgebreid op terug.]
De worteltoets zou hier ook kunnen worden toegepast. Men kan dan nagaan dat $|a_n|^{1/n} = |z|/(n!)^{1/n}$ en dat dit naar 0 convergeert als $n \to \infty$. We zouden dat hier ad hoc kunnen bewijzen, maar verwijzen liever naar de algemenere Propositie 5.22 even verderop.

5.20 In de situatie van Stelling 5.17 geeft $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| > 1$ geen divergentiecriterium. Kijk bijv. naar de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ met $a_{2m-1} := 2^{-m}$ en $a_{2m} := 2^{-m-2}$. Deze reeks convergeert, maar de rij (a_{n+1}/a_n) heeft limietpunten $1/4$ en 2, dus heeft lim sup gelijk aan $2 > 1$. We kunnen wel het volgende zeggen (zoals je zelf eenvoudig kunt nagaan):

Propositie Zij $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een reeks in $\mathbb{C}$. Neem aan dat $a_n \neq 0$ voor n voldoende groot. Dan geldt dat (a)⇒(b)⇒(c)⇒(d), waarbij:
(a) $\liminf_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| > 1$.
(b) $|a_{n+1}/a_n| \ge 1$ voor n voldoende groot.
(c) De rij (a_n) convergeert niet naar 0.
(d) De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergeert.

5.21 Opgave Zij $a_{2n-1} := 2^{-n}$ en $a_{2n} := 3^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Bewijs dat:

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 2^{-\frac{1}{2}}, \quad \liminf_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 3^{-\frac{1}{2}},$$
$$\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = \infty, \quad \liminf_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 0.$$

Concludeer dat voor de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de worteltoets van Cauchy toepasbaar is en convergentie oplevert, terwijl de quotiëntentoets van d'Alembert geen uitsluitsel geeft.

Opmerking In bovenstaand voorbeeld gaf de worteltoets betere resultaten dan de quotiëntentoets. Je zou je zelfs altijd, als je de keuze hebt tussen de twee toetsen, tot de worteltoets kunnen beperken, omdat elk convergentiebewijs verkregen met de quotiëntentoets ook met de worteltoets kan worden verkregen. Echter, als $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ bestaat in $\overline{\mathbb{R}}$ dan zijn beide toetsen gelijkwaardig. Het een en ander volgt uit onderstaande propositie.

5.22 **Propositie** Voor elke rij (a_n) van positieve getallen geldt:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty} a_n^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \tag{5.4}$$

Als $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ bestaat in $\overline{\mathbb{R}}$ dan bestaat $\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n}$ ook in $\overline{\mathbb{R}}$ en beide limieten zijn gelijk.

Bewijs De laatste bewering volgt direct uit (5.4). De middelste ongelijkheid in (5.4) is evident. We bewijzen hier de laatste ongelijkheid van (5.4) en geven het bewijs van de eerste ongelijkheid als opgave. Zij $\lambda := \limsup_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$. Als $\lambda = \infty$ dan valt er niets te bewijzen. Neem dus aan dat $\lambda < \infty$. Kies $\rho \in (\lambda, \infty)$ willekeurig. Redenerend als in de bewijzen van Stelling 5.17 en Propositie 5.15(b) vinden we $N \in \mathbb{N}$ zo dat $a_{n+1}/a_n \le \rho$ voor $n \ge N$, dus $a_n \le a_N\, \rho^{n-N}$ voor $n \ge N$. Er geldt dus voor $n \ge N$ dat

$$a_n^{1/n} \le (a_N \rho^{-N})^{1/n}\, \rho.$$

Omdat het rechter lid van bovenstaande ongelijkheid convergeert naar ρ voor $n \to \infty$, zal dus voor elke $\varepsilon > 0$ het getal $\rho + \varepsilon$ een uiteindelijke bovengrens zijn van de rij $(a_n^{1/n})$. Dus voor elke $\rho > \lambda$ en voor elke $\varepsilon > 0$ geldt dat $\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} \le \rho + \varepsilon$. Dus $\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} \le \lambda$. □

Opgave Bewijs de eerste ongelijkheid in (5.4). Concludeer ook uit (5.4) dat, als het divergentiecriterium (a) uit Propositie 5.20 geldt, dan ook het divergentiecriterium 5.16(b) geldt. Geef een voorbeeld van een reeks waarvoor (b) van Propositie 5.20 geldig is, maar niet (a) of (b) van Propositie 5.16.

5.3 Het getal e

In syll. Analyse A, p.25 was het getal e gedefinieerd als de limiet van de monotoon stijgende, naar boven begrensde rij (a_n) met $a_n := (1 + n^{-1})^n$, dus

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{5.5}$$

Anderzijds is er in de syll. Analyse A met de functie $x \mapsto e^x$ gewerkt, zonder dat een precieze definitie gegeven werd. Door o.a. gebruik te maken van het nog onbewezen feit dat deze functie gelijk is aan haar afgeleide, werd er in syll. Analyse A, p.79 aangetoond dat

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{5.6}$$

De notatie e^x suggereert dat e^x gelijk is aan e verheven tot de macht x. Dit zal inderdaad waar blijken te zijn, maar het moet uiteraard worden bewezen. We zullen nu bewijzen dat formule (5.6) "klopt" voor $x = 1$, d.w.z., dat het rechterlid van (5.6) voor $x = 1$ gelijk is aan het rechterlid van (5.5).

5.23 Propositie Er geldt dat

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{5.7}$$

Bewijs De reeks in het rechterlid van (5.7) is convergent (cf. Voorbeeld 5.19(b)). Noem de som van deze reeks $\widetilde{e}$. We zullen eerst bewijzen dat $e \le \widetilde{e}$ en vervolgens dat $e \ge \widetilde{e}$. In syll. Analyse A, p.25 was al met behulp van de binomiaalstelling bewezen dat

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \tag{5.8}$$

en dus

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \widetilde{e}.$$

Er volgt dus met behulp van Propositie 2.5(i) dat $e \le \widetilde{e}$.

We zullen nu bewijzen dat $e \ge \widetilde{e}$. Neem $n, m \in \mathbb{N}$ en $n \ge m$. Er volgt uit (5.8) dat

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ge 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

In beide leden kunnen we bij vaste m de limiet nemen voor $n \to \infty$. Met behulp van Gevolg 2.7 volgt er dan dat $e \ge \sum_{k=0}^{m} 1/k!$. Laat nu in deze ongelijkheid $m \to \infty$ en pas wederom Propositie 2.5(i) toe. We verkrijgen dat $e \ge \widetilde{e}$. □

5.24 Opmerking Het is zowel van praktisch als van theoretisch belang om te weten hoe snel de partiële sommen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \tag{5.9}$$

van de reeks in het rechterlid van (5.7) naar e convergeren. Er geldt dat

$$\begin{aligned} e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right\} = \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1-(n+1)^{-1}} = \frac{1}{n!\,n}. \end{aligned}$$

Dus, als s_n gegeven is door (5.9), dan

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!\,n} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{5.10}$$

Zie bijvoorbeeld de volgende benaderingen van $e \approx 2.718281828$:

$$\frac{1}{9 \times 9!} \approx 3.1 \times 10^{-7}, \quad s_9 \approx 2.718281526;$$
$$\frac{1}{10 \times 10!} \approx 2.8 \times 10^{-8}, \quad s_{10} \approx 2.718281801.$$

5.25 **Opgave** Experimenteer in Maple met verschillende benaderingen van e. Hierbij kun je gebruik maken van commando's als

`evalf(E)`, `evalf(E,20)`, `evalf(sum(1/k!,k=0..9))`, `evalf(1/9/9!)`, etc.

Bereken ook met behup van `evalf` de uitdrukking $(1+n^{-1})^n$ voor verschillende waarden van n en zie hoe langzaam dit e benadert.

5.26 Propositie Het getal e is irrationaal.

Bewijs Stel dat $e \in \mathbb{Q}$, dus $e = p/q$ voor zekere $p, q \in \mathbb{N}$. Dan volgt er uit (5.10) met $n := q$ dat

$$0 < q!\,(p/q - s_q) < 1/q \le 1.$$

Maar zowel $q!\,(p/q)$ als $q!\,s_q$ zijn geheel (ga na), dus $q!\,(p/q - s_q)$ is enerzijds geheel en ligt anderzijds in $(0,1)$. Dit is een tegenspraak. □

Opmerking Er kan bewezen worden dat e een transcendent getal is, d.w.z. dat er geen polynoom $p \ne 0$ met coëfficiënten in $\mathbb{Z}$ bestaat zo dat $p(e) = 0$. Zie bijv. de referenties in Rudin [4, §3.32].

5.4 Machtreeksen

In syll. Analyse A, Vraagstuk V7.3 werd reeds de definitie van een machtreeks gegeven. We herhalen deze definitie, nu ook voor het geval van een complexe variabele.

5.27 Definitie Een *machtreeks* is een nog van een complexe variabele afhangende reeks van de vorm

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{5.11}$$

waarbij de c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ gegeven complexe getallen zijn. De c_n heten de *coëfficiënten* van de machtreeks.

Een machtreeks is dus een afbeelding van speciale vorm $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n$ van $\mathbb{C}$ naar de verzameling van reeksen in $\mathbb{C}$. Voor gegeven coëfficiënten c_n zal het nog van $z \in \mathbb{C}$ afhangen of de reeks voor die waarde van z convergeert of divergeert. Als we met E de verzameling aanduiden van alle $z \in \mathbb{C}$ waarvoor de reeks convergeert, dan definieert de som van de machtreeks een functie op E. Omgekeerd kunnen we ons voor een gegeven functie, gedefinieerd op een deelverzameling V van $\mathbb{C}$, afvragen of deze voor te stellen is als de som van een machtreeks waarvan het convergentiegebied V omvat.

Het convergentiegebied van een machtreeks blijkt een betrekkelijk eenvoudige vorm te hebben:

5.28 Stelling Beschouw de machtreeks (5.11) en zij $\lambda := \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}$, $R := \lambda^{-1}$ (neem $R := 0$ als $\lambda = \infty$ en $R := \infty$ als $\lambda = 0$). Zij $z \in \mathbb{C}$. Dan geldt voor de reeks in (5.11) het volgende:
(a) De reeks convergeert absoluut als $|z| < R$.
(b) De reeks divergeert als $|z| > R$.
(c) Als $|z| = R \neq 0$ dan is zowel (absolute of relatieve) convergentie als divergentie voor de reeks mogelijk.

Bewijs Voor $z = 0$ convergeert de reeks altijd. Voor $z \neq 0$ passen we de worteltoets (Stelling 5.16) toe op de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ met $a_n := c_n\, z^n$. Er geldt dat

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}\, |z| = |z| \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = |z|\,\lambda = \begin{cases} 0 & \text{als } \lambda = 0, \\ \infty & \text{als } \lambda = \infty, \\ |z|/R & \text{als } \lambda \in (0,\infty). \end{cases}$$

[Ga na dat de tweede identiteit hierboven inderdaad geldt.] Het te bewijzen resultaat volgt nu uit de worteltoets. □

Het in Stelling 5.28 gedefinieerde getal $R \geq 0$ heet de *convergentiestraal* van de machtreeks (5.11). Voor z in het binnengebied van de cirkel in het complexe vlak met straal R en middelpunt 0 treedt absolute convergentie op, en voor z in het buitengebied is de reeks divergent. Voor z op de cirkel zelf geeft de stelling geen uitspraak.

Gevolg De convergentiestraal R van de machtreeks (5.11) is het eenduidig bepaalde element van $[0,\infty]$ met de eigenschap dat de machtreeks convergeert voor $|z| < R$ en divergeert voor $|z| > R$.

5.29 Opgave Beschouw de machtreeks (5.11), stel dat $c_n \neq 0$ voor n voldoende groot, en neem aan dat de limiet $\lambda := \lim_{n\to\infty} |c_{n+1}|/|c_n|$ bestaat in $\overline{\mathbb{R}}$. Zij R gedefinieerd in termen van deze λ zoals in Stelling 5.28. Bewijs dat uitspraken (a), (b), (c) van Stelling 5.28 ook hier gelden.

5.30 Voorbeeld
(a) Zij $c_0 := 0$, $c_n := n^n$ als $n \in \mathbb{N}$. Dan geeft Stelling 5.28 dat $\lambda = \infty$, dus $R = 0$. Dus de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} n^n\, z^n$ heeft convergentiestraal 0.
(b) Zij $c_n := 1/n!$. Dan is $\lim_{n\to\infty} |c_{n+1}|/|c_n| = 0$, dus Opgave 5.29 levert convergentiestraal ∞ voor de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$. [Dit was eerder behandeld in Voorbeeld 5.19(b).] Dus de som van de machtreeks definieert een op $\mathbb{C}$ gedefinieerde functie

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{5.12}$$

We weten dat $\exp(1) = e$ (cf. Propositie 5.23) en dat $\exp(0) = 1$. In syll. Analyse A, p.79 werd $\exp(z)$ voor $z \in \mathbb{R}$ geschreven als e^z. We zullen inderdaad later zien dat we voor reële x aan $\exp(x)$ een interpretatie kunnen geven als e verheven tot de macht x. Zodra we dit opgehelderd hebben zullen we de notaties $\exp(z)$ en e^z door elkaar gaan gebruiken.
(c) De machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ heeft op grond van Stelling 5.28 convergentiestraal 1. Voor alle z met $|z| = 1$ divergeert de reeks omdat de rij (z^n) niet naar 0 convergeert voor $n \to \infty$ (cf. Stelling 5.4(b)).

(d) De machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} z^n$ heeft op grond van Stelling 5.28 convergentiestraal 1. De reeks divergeert voor $z = 1$ en convergeert relatief voor $z = -1$. We zullen later zien dat de reeks relatief convergeert voor alle $z \neq 1$ met $|z| = 1$.

(e) De machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} z^n$ heeft op grond van Stelling 5.28 convergentiestraal 1. De reeks convergeert absoluut voor alle z met $|z| = 1$.

(f) Zij N een niet-negatief geheel getal. Neem een machtreeks (5.11) zodanig dat $c_n = 0$ voor $n > N$. Dan zeggen we dat de machtreeks *afbreekt* en het is triviaal om in te zien dat de convergentiestraal gelijk ∞ is. De machtreeks definieert dan de polynomiale functie $z \mapsto \sum_{n=0}^{N} c_n z^n$.

5.31 Stel dat de machtreeks (5.11) convergentiestraal $R > 0$ heeft. We beperken ons nu tot reële $z \in (-R, R)$. Bekijk de somfunctie f gegeven door

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (x \in (-R, R)). \tag{5.13}$$

We willen bewijzen dat f differentieerbaar is. Laten we als probeersel eens aannemen dat we de afgeleide g van f kunnen verkrijgen door termsgewijs te differentiëren in (5.13), dus dat $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ (differentiatie van de nulde term $c_0 x^0 = c_0$ levert de functie identiek 0 op). Na verschuiving van de sommatie-variabele verkrijgen we dat

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n. \tag{5.14}$$

We merken nu eerst op dat de functie g ook goed gedefinieerd is op het interval $(-R, R)$ door het rechterlid van (5.14):

Lemma De machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} z^n$ hebben dezelfde convergentiestraal.

Bewijs De machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} z^n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^n$ hebben dezelfde convergentiestraal (waarom?). Omdat $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$, geldt er wegens Opgave 2.20 dat $\limsup_{n\to\infty} n^{1/n} |c_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}$. Dus wegens Stelling 5.28 hebben de machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^n$ dezelfde convergentiestraal. $\square$

5.32 Stelling Zij $R > 0$ de convergentiestraal van de machtreeks (5.11). Zij $f\colon (-R, R) \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door (5.13) en $g\colon (-R, R) \to \mathbb{C}$ door (5.14). Dan is f differentieerbaar met afgeleide g. In het bijzonder is f continu.

Bewijs Neem een vaste $x \in (-R, R)$ en kies ρ zo dat $|x| < \rho < R$, We moeten bewijzen dat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor $0 < |h| < \delta$ geldt dat $x + h \in (-R, R)$ en

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| < \varepsilon. \tag{5.15}$$

Zij $\varepsilon > 0$. We zoeken bovenstaande $\delta > 0$ zo dat $\delta \leq \rho - |x|$. Dan zal $x + h \in (-\rho, \rho)$ voor $|h| < \delta$. Zij $N \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Dan geldt d.m.v. substitutie van (5.13) en (5.14) dat

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) = &\sum_{n=1}^{N} c_n \left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1} \right) \\ &+ \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \frac{(x+h)^n - x^n}{h} - \sum_{n=N+1}^{\infty} n c_n x^{n-1}. \end{aligned}$$

Dus

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right| \tag{5.16}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N}|c_n|\left|\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-n\,x^{n-1}\right| + \sum_{n=N+1}^{\infty}|c_n|\left|\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} n\,|c_n|\,|x|^{n-1}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N}|c_n|\left|\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-n\,x^{n-1}\right| + 2\sum_{n=N+1}^{\infty} n\,|c_n|\,\rho^{n-1}. \tag{5.17}$$

Voor de eerste ongelijkheid gebruikten we de driehoeksongelijkheid en Opgave 5.10. Voor de tweede ongelijkheid gebruikten we dat $|(x+h)^n - x^n| \leq n\,\rho^{n-1}\,|h|$ volgens de middelwaardestelling 3.38. Omdat de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,c_{n+1}\,z^n$ convergentiestraal R heeft (cf. Lemma 5.31) en gezien het feit dat $\rho < R$, kunnen we N zo kiezen dat $\sum_{n=N+1}^{\infty} n\,|c_n|\,\rho^{n-1} < \varepsilon/3$. Omdat ieder van de eerste N termen in (5.17) naar 0 convergeert voor $h \to 0$, kunnen we $\delta \in (0, \rho - |x|)$ zo kiezen dat de som van de eerste N termen in (5.17) kleiner dan $\varepsilon/3$ is als $0 < |h| < \delta$. Dus de uitdrukking in (5.16) is kleiner dan ε als $0 < |h| < \delta$. $\square$

Bij de tweedejaars-Analyse zal deze stelling bewezen worden met behulp van een algemene stelling over functiereeksen waarvan de termsgewijze afgeleide uniform convergeert. Bij het vak Functietheorie zal Stelling 5.32 worden uitgebreid met een uitspraak over complexe differentieerbaarheid.

5.33 Gevolg Zij $R > 0$ de convergentiestraal van de machtreeks (5.11) en zij $f\colon (-R, R) \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door (5.13). Dan is f een C^∞-functie op $(-R, R)$ met p-de afgeleide gelijk aan

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\ldots(n+p)\,c_{n+p}\,x^n. \tag{5.18}$$

In het bijzonder geldt er dat

$$f^{(p)}(0) = p!\,c_p. \tag{5.19}$$

Opgave Leid Gevolg 5.33 af uit Stelling 5.32. Bewijs bovendien, met de gegevens van Gevolg 5.33 en met de verdere aanname dat alle machtreekscoëfficiënten c_k reëel zijn, het volgende: Voor iedere $n = 0, 1, 2, \ldots$ geldt de Taylorformule

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\,x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta_x\,x)}{(n+1)!}\,x^{n+1} \quad (-R < x < R), \tag{5.20}$$

waarbij $\theta_x \in (0,1)$ en θ_x nog afhangt van x (cf. syll. Analyse A, p.78).

5.34 Opmerking Er volgt uit (5.19) dat een functie f die gedefinieerd is op $(-R, R)$ door (5.13) in termen van een machtreeks (5.11) met convergentiestraal $R > 0$, geheel bepaald wordt door al zijn afgeleiden in het punt 0. Ook geldt dan dat f op het interval $(-R, R)$ reeds volledig bepaald wordt door de beperking van f tot een interval $(-\delta, \delta)$, waarbij $\delta > 0$ willekeurig klein mag worden genomen. Immers, de afgeleiden $f^{(p)}(0)$ worden reeds bepaald door f beperkt tot $(-\delta, \delta)$.

In syll. Analyse A, p.80 werd reeds aan de hand van een voorbeeld opgemerkt dat er C^∞-functies f op een omgeving van 0 bestaan die niet identiek gelijk aan 0 zijn, maar toch $f^{(p)}(0) = 0$ hebben voor alle $p = 0, 1, 2, \ldots$. Zulke f kunnen dus niet van de vorm (5.13) zijn. Functies f die wel van de vorm (5.13) zijn worden *analytisch* genoemd.

5.35 Opgave Bewijs met behulp van Gevolg 5.33 en door herhaalde differentiatie van de somformule

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1),$$

voor de meetkundige reeks dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!}\, x^n = \frac{1}{(1-x)^p} \quad (-1 < x < 1,\ p \in \mathbb{N}). \tag{5.21}$$

[Dit bewijst formule 8 van syll. Analyse A, p.79 voor speciale waarden van de exponent.]

5.36 Opgave Zij $\lambda \in \mathbb{C}$ en zij de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(x) := \exp(\lambda x)$ $(x \in \mathbb{R})$, waarbij exp gegeven is door (5.12). Bewijs dat $f^{(p)}(x) = \lambda^p \exp(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$.

5.5 Partiële sommatie

We zullen nu eerst een formule afleiden in verband met eindige sommatie die dezelfde structuur heeft als de formule voor partiële integratie (cf. syll. Analyse A, Stelling 11.3). Deze formule passen we vervolgens toe om een generalisatie van het Criterium van Leibniz (Stelling 5.8) af te leiden. Met behulp van dat resultaat kunnen we dan bijv. inzien dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ convergeert als $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $z \neq 1$.

5.37 **Lemma** Laat $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \le q$ en laten $A_{p-1}, A_p, \dots, A_q$ en $b_p, b_{p+1}, \dots, b_{q+1}$ complexe getallen zijn. Dan geldt:

$$\sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1})\, b_n = A_q\, b_{q+1} - A_{p-1}\, b_p - \sum_{n=p}^{q} A_n\, (b_{n+1} - b_n). \tag{5.22}$$

Bewijs Beide zijden van (5.22) kunnen herschreven worden als

$$\sum_{n=p}^{q} A_n\, b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n\, b_{n+1}. \qquad \square$$

Vergelijk (5.22) met de formule voor partiële integratie (syll. Analyse A, Stelling 11.3):

$$\int_p^q F'(x)\, g(x)\, dx = F(q)\, g(q) - F(p)\, g(p) - \int_p^q F(x)\, g'(x)\, dx. \tag{5.23}$$

Integratie in (5.23) correspondeert met sommatie in (5.22) en differentiatie correspondeert met differentie. Er zijn echter in (5.22) verschillende subtiliteiten: zowel voorwaartse als terugwaartse differenties komen voor en in beide “stock-termen” is de index van een van de twee factoren verschoven. Daardoor is formule (5.22) veel minder gemakkelijk te onthouden dan formule (5.23). Het is daarom beter om formule (5.22) elke keer als je hem nodig hebt, weer even opnieuw af te leiden.

Als $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ een gegeven rij in $\mathbb{C}$ is en als we schrijven

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad A_{-1} := 0, \tag{5.24}$$

dan zal $a_n = A_n - A_{n-1}$, dus (5.22) kan dan voor $0 \le p \le q$ herschreven worden als

$$\sum_{n=p}^{q} a_n\, b_n = A_q\, b_{q+1} - A_{p-1}\, b_p + \sum_{n=p}^{q} A_n\,(b_n - b_{n+1}). \tag{5.25}$$

5.38 **Stelling** Laat $b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge 0$ zo dat $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Laat a_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) complex zo dat de partiële sommen A_n gegeven door (5.24) een begrensde rij vormen, i.e., er is een $M > 0$ zo dat $|A_n| \le M$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dan convergeert de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, b_n$.

Bewijs Neem gehele getallen p en q zo dat $0 \le p \le q$. Dan volgt er uit (5.25) en de aannamen in de Stelling dat:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=p}^{q} a_n\, b_n\right| &\le M\left(b_{q+1} + b_p + \sum_{n=p}^{q}(b_n - b_{n+1})\right) \\ &= M(b_{q+1} + b_p + (b_p - b_{q+1})) = 2M\, b_p.\end{aligned} \tag{5.26}$$

Zij $\varepsilon > 0$. Omdat $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ is er een N zo dat $b_N < \varepsilon/(2M)$. Dus als $N \le p \le q$ dan is $2M\, b_p \le 2M\, b_N < \varepsilon$ en is dus ook het linkerlid van (5.26) kleiner dan ε. De convergentie van de reeks volgt nu uit het Criterium van Cauchy (Stelling 5.3). □

Opmerking Het Criterium van Leibniz (Stelling 5.8) is een direct gevolg van bovenstaande Stelling. Immers, als $a_n := (-1)^n$ dan is $A_n = 1$ voor n even en $A_n = 0$ voor n oneven, dus de A_n vormen een begrensde rij.

Gevolg Zij $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n$ een machtreeks met convergentiestraal 1, en veronderstel dat $b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge 0$ en $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Dan convergeert $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n$ voor iedere complexe z met $|z| = 1$, behalve mogelijk voor $z = 1$.

Bewijs We passen bovenstaande Stelling toe met $a_n := z^n$. Dan geldt er voor $|z| = 1$, $z \ne 1$ dat

$$|A_n| = \left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \le \frac{2}{|1 - z|}\,,$$

dus de A_n vormen een begrensde rij. □

Voorbeeld De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ convergeert als $|z| \le 1$ en $z \ne 1$.
[Merk op dat het niet uitmaakt voor toepassing van de bovenstaande resultaten dat de machtreeks pas bij $n = 1$ begint.]

5.6 Het Cauchy-product van twee reeksen

Als we twee machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n$ termsgewijs formeel met elkaar vermenigvuldigen en de termen met gelijke machten van z bij elkaar nemen dan verkrijgen we:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\, z^l\right) =&(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)\,(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots) \\ =&a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \cdots \\ =&c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots\end{aligned}$$

met

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.27}$$

Merk op dat de nieuwe machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ algebraïsch gezien rigoureus gedefinieerd is in termen van de twee oude machtreeksen, maar dat dit formele procédé nog niets zegt over de convergentiestraal van de nieuwe machtreeks of over de vraag of de functie gedefinieerd door de nieuwe machtreeks nu ook het puntsgewijze product is van de functies gedefinieerd door de twee oude machtreeksen. Het geval $z = 1$ van bovenstaand procédé motiveert de volgende definitie.

5.39 Definitie Het *Cauchy-product* van twee reeksen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ in $\mathbb{C}$ is de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, waarbij de termen c_n gedefinieerd zijn door (5.27).

5.40 Stelling Laten $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ twee absoluut convergente reeksen in $\mathbb{C}$ zijn met sommen A resp. B. Dan convergeert hun Cauchy-product $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absoluut met som $C := AB$.

Bewijs Uit (5.27) en de driehoeksongelijkheid volgt dat voor $m = 0, 1, 2, \ldots$ geldt:

$$\sum_{n=0}^{m} |c_n| \leq \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|b_{n-k}| \leq \left(\sum_{k=0}^{m} |a_k|\right)\left(\sum_{l=0}^{m} |b_l|\right) \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} |b_l|\right).$$

Dus de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ convergeert absoluut wegens Stelling 5.1(a). Om in te zien dat $C = AB$ merken we wederom met behulp van (5.27) en de driehoeksongelijkheid op dat

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{m} c_n - \left(\sum_{k=0}^{m} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{m} b_l\right)\right| &\leq \sum_{\substack{k,l=0,1,\ldots,m\\ k+l>m}} |a_k|\,|b_l| \\ &\leq \sum_{n=m+1}^{2m} \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|b_{n-k}| \quad (m = 1, 2, \ldots).\end{aligned} \tag{5.28}$$

Nu wordt het Cauchy-product van $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ en $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ gegeven door de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{c}_n$, waarbij

$$\widetilde{c}_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|b_{n-k}|,$$

en toepassing van het eerste deel van de Stelling op dit Cauchy-product leert dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{c}_n$ convergeert. Er volgt nu uit Stelling 5.3 (criterium van Cauchy voor reeksen) dat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ gevonden kan worden zo dat $\sum_{n=m+1}^{2m} \widetilde{c}_n < \varepsilon$ voor $m \geq N$. We concluderen door combinatie met de ongelijkheden (5.28) dat

$$C - AB = \lim_{m\to\infty} \left[\sum_{n=0}^{m} c_n - \left(\sum_{k=0}^{m} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{m} b_l\right)\right] = 0,$$

dus $C = AB$. □

5.41 **Opmerking** Als in Stelling 5.40 de voorwaarden versoepeld worden door van de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ slechts aan te nemen dat hij convergeert, dan kan geconcludeerd worden dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ convergeert met som $C := AB$. Deze stelling gaat terug op Mertens, zie Rudin, [4, Theorem 3.50] voor het bewijs.

5.42 **Opgave** Zij $a_n := (-1)^n (n+1)^{-1/2}$. Bewijs dat het Cauchy-product van de (relatief convergente) reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ met zichzelf niet convergeert.

5.43 **Voorbeeld** Laat $z, w \in \mathbb{C}$. Dan wordt het Cauchy-product van de absoluut convergente reeksen $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ en $\sum_{n=0}^{\infty} w^n/n!$ gegeven door $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ met

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \, \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(z+w)^n}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

waarbij de laatste gelijkheid precies de binomiaalformule is. Combinatie met (5.12) en Stelling 5.40 levert de functionaalvergelijking

$$\exp(z+w) = \exp(z)\,\exp(w) \quad (z, w \in \mathbb{C}). \tag{5.29}$$

Er volgt dat $\exp(z)\,\exp(-z) = \exp(0) = 1$, dus $\exp(z) \neq 0$ voor alle $z \in \mathbb{C}$ en

$$\exp(-z) = (\exp(z))^{-1} \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{5.30}$$

Iteratie van (5.29) en combinatie met (5.30) levert dat

$$\exp(nz) = (\exp(z))^n \quad (z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}). \tag{5.31}$$

Voor $z := 1$ levert dit, in combinatie met Propositie 5.23, dat

$$\exp(n) = e^n \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{5.32}$$

Formule (5.30) levert, samen met Opgave 5.2(b), dat

$$\overline{\exp(i\theta)} = \exp(-i\theta) = (\exp(i\theta))^{-1} \quad (\theta \in \mathbb{R}),$$

dus

$$|\exp(i\theta)| = 1 \quad (\theta \in \mathbb{R}). \tag{5.33}$$

5.44 **Opgave** Bewijs het volgende

(a) $\exp(x) > 0$ als $x \in \mathbb{R}$.
(b) De functie $x \mapsto \exp(x) \colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ is monotoon stijgend
(c) $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ en $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.
(d) De functie exp beeldt $\mathbb{R}$ bijectief af op $(0, \infty)$.
[Gebruik (a), (b), (c), de continuïteit van exp en een kleine variatie van de redenering in syll. Analyse A, onderaan p.49.]

5.45 Een direct gevolg van Stelling 5.40 is de volgende stelling over het product van twee machtreeksen.

Stelling Laten $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ en $\sum_{n=0}^\infty b_n z^n$ machtreeksen zijn met convergentiestralen R_1 resp. R_2, beide > 0. Definieer

$$f(z) := \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \quad (z \in \mathbb{C},\ |z| < R_1),$$
$$g(z) := \sum_{n=0}^\infty b_n z^n \quad (z \in \mathbb{C},\ |z| < R_2).$$

Laat c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ gedefinieerd zijn door (5.27). Dan heeft de machtreeks $\sum_{n=0}^\infty c_n z^n$ convergentiestraal $\geq R := \min\{R_1, R_2\}$ en

$$f(z)\, g(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n z^n \quad (z \in \mathbb{C},\ |z| < R).$$

Bewijs Als $|z| < R$ dan is de reeks $\sum_{n=0}^\infty c_n z^n$ het Cauchy-product van de twee absoluut convergente reeksen $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ en $\sum_{n=0}^\infty b_n z^n$ (ga na), dus de reeks $\sum_{n=0}^\infty c_n z^n$ convergeert dan absoluut volgens Stelling 5.40. □

5.46 Voorbeeld We bekijken het product van de machtreeks $\sum_{n=0}^\infty z^n = (1-z)^{-1}$ $(|z| < 1)$ met zichzelf. Stelling 5.45 levert dat $\sum_{n=0}^\infty (n+1)\, z^n = (1-z)^{-2}$ $(|z| < 1)$, wat in overeenstemming is met formule (5.21).

Door herhaalde toepassing van Stelling 5.45 zouden we nu de machtreeks van $(1-z)^{-p}$ $(|z| < 1)$ ook voor $p = 3, 4, \ldots$ kunnen uitrekenen. Dit was echter al op een andere manier gedaan in (5.21) voor $-1 < z < 1$. We kunnen nu concluderen dat de daar gegeven machtreeks voor $(1-z)^{-p}$ ook geldt voor complexe z met $|z| < 1$. Immers, herhaalde toepassing van Stelling 5.45 levert dat $(1-z)^{-p}$ als een machtreeks is te schrijven voor complexe z met $|z| < 1$. We vinden dan de machtreekscoëfficiënten door de functie te beperken tot $(-1, 1)$ en vervolgens (5.19) toe te passen. Maar het resultaat daarvan is al in (5.21) gegeven.

5.7 *Herordeningen van reeksen*

In een eindige reeks $\sum_{k=1}^n a_k$ doet de volgorde van de termen niet ter zake voor de som. Zoals zo vaak, wanneer we van eindige naar oneindige processen overgaan, mogen we dit resultaat niet zondermeer generaliseren tot het geval van een convergente oneindige reeks $\sum_{k=1}^\infty a_k$. Zij $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een bijectieve afbeelding (we noemen σ een *permutatie van* $\mathbb{N}$). We vragen ons nu af hoe de reeks $\sum_{k=1}^\infty a_{\sigma(k)}$ zich tot de oorspronkelijke reeks verhoudt. Convergeert de nieuwe reeks wederom? Zoja, heeft hij dezelfde som?

5.47 Voorbeeld Bekijk de relatief convergente, alternerende reeks

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

dus de reeks $\sum_{k=1}^\infty a_k$ met $a_k := (-1)^{k-1}\, k^{-1}$. We zullen aantonen dat door geschikte herordening van termen we ieder gewenst reëel getal als som van de nieuwe reeks kunnen verkrijgen. Het idee achter de constructie is dat alle termen met oneven k positief zijn en dat hun som gelijk ∞ is, terwijl alle termen met even k negatief zijn en hun som gelijk

$-\infty$ is, en dat zowel de termen met even k als de termen met oneven k naar 0 convergeren voor $k \to \infty$. We beschrijven de constructie enigszins schetsmatig.

Zij $s \in \mathbb{R}$. Voor het gemak veronderstellen we dat $s \geq 0$. We zoeken een permutatie σ van $\mathbb{N}$ zo dat de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ convergeert met som s. We beginnen met (positieve) termen $a_1, a_3, \ldots, a_{2n_1-1}$ zo dat

$$s < \sum_{k=1}^{n_1} a_{2k-1} \leq s + 1.$$

(Waarom kan dit?) Noem de resulterende som s_1. Nu voegen we hier (negatieve) termen $a_2, a_4, \ldots, a_{2m_1}$ aan toe zo dat de resulterende som s_2 voldoet aan

$$s - \tfrac{1}{2} \leq s_2 < s.$$

(Waarom kan dit?) Nu voegen we weer (positieve) termen $a_{2n_1+1}, a_{2n_1+3}, \ldots, a_{2n_2-1}$ aan s_2 toe zo dat de resulterende som s_3 voldoet aan

$$s < s_3 \leq s_3 + \tfrac{1}{3}.$$

Zo doorgaande komen we aan $s < s_r \leq s + \frac{1}{r}$ (r oneven) en $s - \frac{1}{r} \leq s_r < s$ (r even). Uiteindelijk verkrijgen we een convergente reeks met som s waarin iedere oude term a_k één en slechts één keer voorkomt en geen andere termen voorkomen.

5.48 **Opgave** Geef de schets van een constructie om de termen van de oude reeks in Voorbeeld 5.47 zo te herordenen dat de nieuwe reeks divergeert met $\lim_{n\to\infty}\big(\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}\big) = \infty$.

5.49 Voorbeeld 5.47 illustreert de volgende veel algemenere stelling, die teruggaat tot Riemann. Zie Rudin [4, Theorem 3.54] voor het bewijs.

Stelling Zij $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ een relatief convergente reeks in $\mathbb{R}$. Zij $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$. Dan bestaat er een herordening van de reeks zo dat de partiële sommen $\widetilde{s}_n := \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$ van de herordende reeks voldoen aan

$$\liminf_{n\to\infty} \widetilde{s}_n = \alpha, \quad \limsup_{n\to\infty} \widetilde{s}_n = \beta.$$

5.50 We zullen nu zien dat we bij absoluut convergente reeksen de termen ongestraft mogen herordenen: convergentie en som blijven hierdoor ongemoeid.

Stelling Zij $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ een absoluut convergente reeks in $\mathbb{C}$ met som s. Zij σ een permutatie van $\mathbb{N}$. Dan is de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ eveneens absoluut convergent met som s.

Bewijs Voor iedere n geldt dat $\sum_{k=1}^{n} |a_{\sigma(k)}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ (waarom?), dus de absolute convergentie van de herordende reeks volgt uit Stelling 5.1(a). Zij nu $\varepsilon > 0$. We willen $N \in \mathbb{N}$ vinden zo dat $|s - \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}| < \varepsilon$ voor $n \geq N$. Er is zeker een $M \in \mathbb{N}$ zo dat $|s - \sum_{k=1}^{n} a_k| < \varepsilon/2$ voor $n \geq M$. Omdat $\lim_{n\to\infty}\big(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\big) = 0$ (waarom?), kunnen we M zelfs zo kiezen dat bovendien $\sum_{k=M+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon/2$. Kies nu $N \in \mathbb{N}$ zo dat $\{1, 2, \ldots, M\} \subset \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N)\}$ (waarom kan dat?). Dan volgt voor $n \geq N$ met behulp van de driehoeksongelijkheid dat

$$|s - \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}| \leq |s - \sum_{k=1}^{M} a_k| + \sum_{k>M;\, \sigma^{-1}(k)\leq n} |a_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \qquad \square$$

Verdere vraagstukken

V5.1 Onderzoek de convergentie van de volgende reeksen:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \log n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(n+5)}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,\sqrt[n]{n}}$

V5.2 Onderzoek ook de convergentie van de volgende reeksen:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+n^2}-n\right)$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}$

V5.3 Onderzoek nu de convergentie van de hieronder gegeven reeksen:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\log\log n)^{\log n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\,\sqrt[n]{n-1}}{\sqrt{n}}$

V5.4 Bewijs dat de reeks in a) convergeert en dat de reeks in b) divergeert:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \bigl(1-n\ \mathrm{tg}(n^{-1})\bigr)$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\bigl(1-n\ \mathrm{tg}(n^{-1})\bigr)$

V5.5 Voor welke reële p en q convergeren de volgende reeksen?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n-q^n}$ $(p \neq \pm q)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{np^n}{n^2+|p|^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n}}{1+p^{2n+1}}$ $(p \neq -1)$

V5.6 Voor welke p en q $(p, q \in \mathbb{R},\ p \neq q)$ convergeert de reeks $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p-n^q}$?

V5.7 Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeksen ($z \in \mathbb{C}$):

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3 z^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-n^{-1}}\,(3z)^n}{n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/4)\, z^n}{n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} z^n$

V5.8 Bepaal ook de convergentiestraal van de machtreeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3} e^{-n^2} z^n$.

V5.9 Zij (a_n) een rij in $\mathbb{C}$ zo dat $a_n - a_{n+1} = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$ als $n \to \infty$. Bewijs dat de rij (a_n) convergeert.

V5.10 Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n\, e^{-n}\, \sqrt{n}}$$

bestaat en positief is.
Aanwijzing Pas Vraagstuk 5.9 toe op de rij van logaritmen.
Opmerking Er kan bewezen worden dat deze limiet gelijk is aan $\sqrt{2\pi}$, zie Rudin [4, §8.22]. Het resultaat staat bekend als de *formule van Stirling*.

V5.11 Toon aan: als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent is en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, dan is $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ divergent.

V5.12 (gebruik V5.11)
Stel dat voor de rij (b_n) geldt dat $b_n > 0$ voor alle n, alsmede $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Is dan $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} b_n$ convergent? Zo ja, bewijs dit; zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

V5.13 Gegeven zijn twee rijen (a_n) en (b_n) van reële getallen. Gegeven is verder dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent is en dat $|b_n| \le 1996$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
a) Als nog extra gegeven is dat $a_n \ge 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, toon aan dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ook convergent is.
b) Mag ook geconcludeerd worden dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ convergent is zonder het extra gegeven dat $a_n \ge 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$? Zo ja, bewijs dat. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

V5.14 Gegeven is een convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ van reële getallen.
a) Als nog extra gegeven is dat $a_n \ge 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, toon aan dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ook convergent is.
b) Mag ook geconcludeerd worden dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ convergent is zonder het extra gegeven dat $a_n \ge 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$? Zo ja, bewijs dat. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

V5.15 Gegeven is een rij (a_n) die voldoet aan $\dfrac{1}{n+1} < a_n < \dfrac{1}{n}$ voor elke n.
a) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$.
b) Is de machtreeks convergent voor $z = 1$?
c) Is de machtreeks convergent voor $z = -1$?

6 Invoering van de elementaire functies

Lees allereerst syll. Analyse A, hst. 16 tot/met Stelling 16.5. Daar wordt a^x gedefinieerd voor reële $a > 0$ en reële x en er worden een aantal eigenschappen bewezen van a^x als functie van a en x.

We herinneren aan de definities van e (syll. Analyse A, p.25) en van $\exp(z)$ voor $z \in \mathbb{C}$, cf. (5.12).

6.1 De exponentiële en de logaritmische functie

6.1 Lemma Voor $x \in \mathbb{Q}$ geldt dat

$$e^x = \exp(x). \tag{6.1}$$

Bewijs Voor $x \in \mathbb{Z}$ werd (6.1) bewezen in (5.32). Laat nu $x := p/q$ met $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Dan geldt $(\exp(p/q))^q = \exp(p) = e^p$ wegens (5.31). Omdat $\exp(p/q) > 0$ (cf. Opgave 5.44), volgt er dat $\exp(p/q) = (e^p)^{1/q} = e^x$. □

6.2 Propositie Zij $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continu. Als $f = g$ op $\mathbb{Q}$ dan $f = g$ op $\mathbb{R}$.

Bewijs Zij $x \in \mathbb{R}$. Neem een rij (x_n) in $\mathbb{Q}$ die naar x convergeert (zo'n rij bestaat). Dan volgt er met behulp van Propositie 3.14 dat

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x).$$ □

6.3 Stelling Formule (6.1) geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Bewijs De functies $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $x \mapsto e^x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn beide continu. Voor exp volgt dit uit Stelling 5.32 en voor $x \mapsto e^x$ werd het bewezen in syll. Analyse A, Stelling 16.5. Bovendien zijn beide functies, beperkt tot $\mathbb{Q}$, aan elkaar gelijk, cf. Lemma 6.1. De Stelling volgt nu met behulp van Propositie 6.2. □

6.4 Gevolg De functie $x \mapsto e^x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is differentieerbaar met afgeleide

$$\frac{d}{dx}\, e^x = e^x \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{6.2}$$

Meer algemeen geldt voor $\lambda \in \mathbb{C}$ dat

$$\frac{d}{dx}\, e^{\lambda x} = \lambda\, e^{\lambda x} \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{6.3}$$

In het bijzonder verkrijgen we de reeds in syll. Analyse A, Voorbeeld 10.7 vermelde standaardlimiet

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{6.4}$$

Bewijs Formules (6.2) en (6.3) volgen uit Opgave 5.36 samen met Stelling 6.2. Formule (6.4) is het geval $x = 0$ van (6.2). □

Opmerking In syll. Analyse A wordt een andere weg gevolgd om formule (6.1) te bewijzen. Eerst wordt bewezen dat de functie $x \mapsto e^x$ differentieerbaar is met als afgeleide zichzelf (zie syll. Analyse A, Stellingen 16.6 en 16.7). Daaruit volgt dan de machtreeksontwikkeling van deze functie, zie syll. Analyse A, p.79, bewijs van formule 1.

6.5 Definitie De functie $\log\colon (0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ is gedefinieerd als de inverse functie van de functie $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$.
[Deze laatste afbeelding is bijectief, zie Opgave 5.44.]

6.6 Stelling De functie $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ is (i) bijectief, (ii) monotoon stijgend, (iii) continu, (iv) differentieerbaar met afgeleide

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x} \quad (x \in (0,\infty)), \tag{6.5}$$

(v) willekeurig vaak differentieerbaar. In het bijzonder verkrijgen we de reeds in syll. Analyse A, Voorbeeld 10.7 vermelde standaardlimiet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1. \tag{6.6}$$

Bewijs Eigenschappen (i) en (ii) volgen omdat $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ bijectief en monotoon stijgend is (cf. Opgave 5.44). Eigenschap (iii) volgt omdat exp bovendien continu is op $\mathbb{R}$, in combinatie met een kleine variatie van syll. Analyse A, p.49 onderaan.

Voor het bewijs van eigenschap (iv) passen we syll. Analyse A, Stelling 10.7 toe met $I := \mathbb{R}$, $J := (0,\infty)$, $f := \exp$, $g := \log$, $a \in \mathbb{R}$ en $b := \exp a$. Dan is aan de voorwaarden van die stelling voldaan (ga na), dus log is differentieerbaar in b en

$$\log'(b) = \frac{1}{\exp'(a)} = \frac{1}{\exp(a)} = \frac{1}{b}\,.$$

Eigenschap (v) is evident uit (6.5). Formule (6.6) is het geval $x = 1$ van (6.5). □

6.7 Gevolg Zij $a > 0$. Dan geldt:

$$a = e^{\log a}, \qquad a^x = e^{x\,\log a} \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{6.7}$$

Voorts is de functie $x \mapsto a^x$ differentieerbaar met afgeleide

$$\frac{d}{dx}\, a^x = (\log a)\, a^x. \tag{6.8}$$

Zij bovendien $a \neq 1$. Dan is de functie $x \mapsto a^x\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ bijectief en hetzij monotoon stijgend (als $a > 1$), hetzij monotoon dalend (als $0 < a < 1$).

6.8 Opgave Bewijs het volgende:

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad (a, b > 0),$$
$$\log(a^x) = x\,\log a \quad (a > 0,\ x \in \mathbb{R}).$$

6.9 Opgave Zij $\alpha \in \mathbb{R}$. Bewijs met behulp van de kettingregel dat de functie $x \mapsto x^\alpha \colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is met afgeleide

$$\frac{d}{dx}\, x^\alpha = \alpha\, x^{\alpha-1} \quad (x > 0). \tag{6.9}$$

6.10 Gevolg Zij $a > 0$ en $a \neq 1$. Definieer de functie $x \mapsto {}^a\log x \colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ als de inverse functie van de functie $x \mapsto a^x \colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$. Dan geldt dat

$${}^a\log x = \frac{\log x}{\log a}. \tag{6.10}$$

Bewijs Het is duidelijk uit Gevolg 6.7 dat de inverse functie goed gedefinieerd is. Voor $x > 0$ is ${}^a\log x$ gedefinieerd als het unieke reële getal y zo dat $a^y = x$. Nu volgt (6.10) omdat wegens (6.7) geldt dat

$$a^{(\log x)/(\log a)} = e^{\log x} = x.$$

Dus $y = (\log x)/(\log a)$. □

6.11 Opgave Bewijs met behulp van de middelwaardestelling 3.38 dat

$$\log x < x - 1 \quad \text{als} \quad x > 1. \qquad (6.11).$$

Bewijs vervolgens via de achtereenvolgende stappen in syll. Analyse A, Vraagstukken V9.4–V9.6, dat de volgende standaardlimieten gelden.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \quad \text{als} \quad \alpha > 0, \tag{6.12}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha\, e^{-x} = 0 \quad \text{als} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{6.13}$$

$$\lim_{x\downarrow 0} x^\alpha\, \log x = 0 \quad \text{als} \quad \alpha > 0. \tag{6.14}$$

6.12 We geven nu een rigoureus bewijs van de machtreeksontwikkeling voor $\log(1+x)$, die reeds gegeven werd in syll. Analyse A, p.79, formule 6.

Stelling Er geldt:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \quad (-1 < x < 1), \tag{6.15}$$

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\, x^n = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right) \quad (-1 < x < 1), \tag{6.16}$$

waarbij de machtreeksen convergentiestraal 1 hebben.

Bewijs Formule (6.15) volgt uit formule (6.16). Er werd reeds in Voorbeeld 5.30(d) opgemerkt dat de machtreeks in het rechter lid van (6.16) convergentiestraal 1 heeft. Beide leden van (6.16) zijn goed gedefinieerd voor $-1 < x < 1$ en differentieerbaar voor deze waarden van x. Met behulp van (6.5) volgt er dat de afgeleide van het linker lid van (6.16) gelijk is aan $-(1-x)^{-1}$, terwijl Stelling 5.32 leert dat het rechterlid van (6.16) afgeleide $-\sum_{n=0}^\infty x^{-n}$ heeft, wat eveneens gelijk is aan $-(1-x)^{-1}$. Omdat linker en rechter lid van (6.16) dezelfde afgeleide hebben, volgt er uit syll. Analyse A, §11.1 dat beide leden als functie van x op $(-1,1)$ een constante verschillen. Omdat beide leden van (6.16) voor $x = 0$ gelijk aan 0 zijn, zal deze constante gelijk aan 0 zijn. □

6.13 Propositie Formule (6.15) blijft geldig voor $x = 1$, i.e., er geldt

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \cdots\ , \tag{6.17}$$

waarbij de reeks relatief convergeert.
Bewijs Zij

$$f_n(x) := \log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\, x^k}{k} \qquad (x > -1).$$

We moeten laten zien dat $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 0$. Er geldt dat $f_n(0) = 0$ en dat

$$f_n'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, x^k = \frac{1}{1+x} - \frac{1-(-1)^n\, x^n}{1+x} = \frac{(-1)^n\, x^n}{1+x}\,.$$

Dus $(-1)^n\, f_n(x) > 0$ $(x > 0)$. Omdat $f_n(x) = f_{n-1}(x) - (-1)^{n-1}\, x^n/n$, volgt er dat

$$0 < (-1)^{n-1}\, f_{n-1}(x) < \frac{x^n}{n} \qquad (x > 0).$$

Toepassing van deze laatste ongelijkheden voor $x := 1$ levert de gewenste limiet. □

Formule (6.17) is ook een gevolg van de volgende stelling van Abel, waarvan je het bewijs kunt nakijken in Rudin [4, Theorem 8.2].

6.14 **Stelling** (*Abel*) Zij $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ een convergente reeks in $\mathbb{C}$. Dan convergeert de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ zeker voor $-1 < x \le 1$ en

$$\lim_{x\uparrow 1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \tag{6.18}$$

6.15 Opmerking Formule (6.17) heeft geen enkel praktisch nut voor het numeriek benaderen van $\log 2$. Allereerst is de convergentie uiterst traag. Voor een benadering van orde 10^{-6} moeten we bijv. de eerste miljoen termen van de reeks sommeren! Bovendien zijn alternerende reeksen numeriek van weinig nut door het z.g. tekenverlies: het van elkaar aftrekken van twee positieve getallen die tot op een bepaald aantal decimalen nauwkeurig gegeven zijn en die relatief groot zijn t.o.v. hun verschil, geeft een relatief grote afrondingsfout. Bevredigender is het benaderen van $\log 2$ d.m.v.

$$\log 2 = -\log \tfrac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 2^n}.$$

Nog snellere convergentie wordt verkregen met de machtreeks

$$\tfrac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \qquad (-1 < x < 1) \tag{6.19}$$

(bewijs deze formule). Merk op dat zodoende de log van elk positief getal gegeven wordt door een reeks waarvan alle termen hetzelfde teken hebben. Voor $x := 1/3$ wordt het linker lid gelijk aan $\frac{1}{2}\log 2$. [Formule (6.19) gaat terug op Gregory (1668).]

6.2 De binomiaalreeks

De machtreeks van $(1+x)^a$ met a reëel werd reeds in syll. Analyse A, p.79, formule 8 gegeven, echter zonder bewijs:

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \quad (-1 < x < 1). \tag{6.20}$$

De hierin voorkomende *gegeneraliseerde binomiaalcoëfficiënt* wordt gedefinieerd door

$$\binom{a}{n} := \frac{a\,(a-1)\,(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}\,. \tag{6.21}$$

De reeks (6.20) wordt de (oneindige) *binomiaalreeks* genoemd. Voor $-a \in \mathbb{N}$ werd formule (6.20) bewezen in Opgave 5.35.

6.16 Vervang nu in (6.20) x door $-x$ en a door $-a$. Dan verkrijgen we voor reële a de formule

$$(1-x)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a\,(a+1)\,(a+2)\ldots(a+n-1)}{n!}\,x^n \quad (-1 < x < 1) \tag{6.22}$$

(ga na). Het product van n factoren dat in de teller van de machtreekscoëfficiënt in (6.22) voorkomt, schrijven we korter als het z.g. *Pochhammer-symbool*:

$$(a)_0 := 1, \qquad (a)_n := a\,(a+1)\,(a+2)\ldots(a+n-1) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{6.23}$$

Dan kunnen we (6.22) schrijven als:

$$(1-x)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!}\,x^n \quad (-1 < x < 1). \tag{6.24}$$

Nu zullen we eindelijk het verschuldigde bewijs van (6.24) geven.

Stelling Formule (6.24) is geldig als $a \in \mathbb{R}$.

Bewijs De machtreeks in het rechterlid van (6.24) heeft convergentiestraal 1. Ga dit na met behulp van het criterium van Opgave 5.29. Duid het linkerlid van (6.24) aan met $f(x)$ en het rechterlid met $g(x)$ $(-1 < x < 1)$. We moeten bewijzen dat $f = g$. Merk op dat

$$(1-x)\,f'(x) = a\,f(x), \quad (1-x)\,g'(x) = a\,g(x), \quad f(0) = 1, \quad g(0) = 1. \tag{6.25}$$

De eerste identiteit volgt direct uit Opgave 6.9. Het bewijs van de tweede identiteit gaat als volgt:

$$\begin{aligned}
(1-x)\,g'(x) &= (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n}{(n-1)!}\,x^{n-1}, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+1}}{n!}\,x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n}{(n-1)!}\,x^n \\
&= a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_{n+1} - n\,(a)_n}{n!}\,x^n \\
&= a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\,(a)_n}{n!}\,x^n = a\,g(x),
\end{aligned}$$

waarbij we in de eerste gelijkheid Stelling 5.32 hebben toegepast en in de voorlaatste gelijkheid hebben gebruikt dat $(a)_{n+1} = (a+n)\,(a)_n$.

Gezien (6.25) voldoen de functies f en g beide aan een zelfde lineaire differentiaalvergelijking van eerste orde en nemen ze beide in 0 dezelfde waarde aan. Uit de theorie van zulke differentiaalvergelijkingen (cf. syll. Analyse A, §14.2) volgt dan reeds dat $f = g$. We geven echter liever een onafhankelijk bewijs.

Merk op dat $f(x) = \exp(-a\,\log(1-x)) \neq 0$ voor $x \in (-1,1)$. Door de eerste vergelijking in (6.25) met $g(x)$ en de tweede met $f(x)$ te vermenigvuldigen, beide vergelijkingen vervolgens van elkaar af te trekken en de resulterende vergelijking door $1-x$ te delen, verkrijgen we dat

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) = \frac{f(x)\,g'(x) - g(x)\,f'(x)}{(f(x))^2} = 0 \quad (-1 < x < 1).$$

Dus $g(x)/f(x)$ is constant voor $-1 < x < 1$ (cf. syll. Analyse A, Gevolg 10.10(i)) en deze constante is 1 omdat $f(0) = g(0) = 1$. □

6.17 Omdat $e^x = \exp x$ voor reële x en omdat $\exp z$ voor alle complexe z door zijn machtreeks (5.12) is gedefinieerd, ligt het voor de hand om e verheven tot een complexe macht z te definiëren door $\exp(z)$:

$$e^z := \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{6.26}$$

Formules (5.29), (5.31) laten dan zien dat e^z ook voor complexe z een aantal eigenschappen heeft die we graag zouden wensen.

$$e^{z+w} = e^z\,e^w \quad (z,w \in \mathbb{C}), \qquad e^{nz} = (e^z)^n \quad (z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}). \tag{6.27}$$

6.18 Het ligt nu voor de hand om formule (6.7) uit te breiden tot het geval van een complexe exponent, dus we definiëren voor $a > 0$:

$$a^z := e^{z\,\log a} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{6.28}$$

Opgave Zij $a, b > 0$. Bewijs:

$$(ab)^z = a^z\,b^z \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{6.29}$$

$$a^{z+w} = a^z\,a^w \quad (z,w \in \mathbb{C}), \tag{6.30}$$

$$(a^x)^z = a^{xz} \quad (x \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}), \tag{6.31}$$

$$|a^z| = a^{\operatorname{Re} z}. \tag{6.32}$$

Opmerking Door gebruik te maken van de definiërende formule (6.28) en van de kettingregel kan worden nagegaan dat de uitspraken van Opgave 6.9 van kracht blijven als we de aanname $\alpha \in \mathbb{R}$ versoepelen tot $\alpha \in \mathbb{C}$.

6.19 **Opmerking** De definitie van a^z met a complex en $\neq 0$ geeft al snel problemen. Voor $z \in \mathbb{Z}$ is de definitie natuurlijk evident. Bekijk nu $z := \frac{1}{2}$. We zouden $a^{\frac{1}{2}}$ willen definiëren als het complexe getal b zo dat $b^2 = a$, maar als b voldoet dan voldoet $-b$ ook. Bijv. geldt er dat $(-1)^{\frac{1}{2}} = \pm i$. Als $a > 0$ dan kiezen we per definitie de positieve wortel, maar het lijkt moeilijk om te kiezen tussen i en $-i$. Bij het vak Functietheorie zal het begrip *hoofdwaarde* worden ingevoerd: een bepaalde afspraak waardoor we toch een van de twee wortels van een complex getal kunnen kiezen.

Voor willekeurige complexe $a \neq 0$ en complexe z zal de definitie van a^z moeten gaan met behulp van (6.28). Dus moet er een betekenis worden gegeven aan $\log a$ met $a \neq 0$ complex, bijv. d.m.v. de machtreeks (6.15) als $|a-1| < 1$. In het algemeen kunnen we een keuze doen voor $\log a$ zo dat $\exp(\log a) = a$. Ook hier is $\log a$ niet eenduidig bepaald en is er weer een begrip *hoofdwaarde* van de logaritme. Zie het vak Functietheorie.

6.20 **Opmerking** Formule (6.24) blijft geldig voor $a \in \mathbb{C}$. Er kan worden nagaan dat het bewijs van Stelling 6.16 nagenoeg ongewijzigd doorgaat voor complexe a.

6.21 **Opmerking** Gezien (6.32) kunnen we Propositie 5.5 nu uitbreiden tot complexe waarden van α:
De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ convergeert absoluut als $\operatorname{Re}\alpha > 1$.

6.3 De trigonometrische functies en het getal π

We zullen nu de trigonometrische functies op een rigoureuze manier invoeren in termen van de functie

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right). \end{aligned} \tag{6.33}$$

6.22 We definiëren:

$$\cos z := \frac{1}{2}\,(e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{6.34}$$

$$\sin z := \frac{1}{2i}\,(e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{6.35}$$

Merk op dat de machtreeksen in (6.34) en (6.35) convergentiestraal ∞ hebben. Dit volgt bijv. (ga na) omdat de reeks in (6.33) absoluut convergeert voor alle z.

Er volgt onmiddellijk uit (6.33), (6.34) en (6.35) dat

$$e^{iz} = \cos z + i\,\sin z. \tag{6.36}$$

Wanneer we z reëel nemen in (6.34), (6.35) volgt er dat

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}), \quad \sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{6.37}$$

Ook is het evident dat

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z \qquad (z \in \mathbb{C}),$$
$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0.$$

Merk op dat we, vergeleken met de behandeling van de cosinus en sinus in de syll. Analyse A, een totaal omgekeerde weg volgen. In syll. Analyse A, p.4 werd herinnerd aan de meetkundige definitie van de cosinus en sinus en werd vervolgens in Definitie 4.8 de exponentiële functie in termen van cos en sin ingevoerd. Ook werd voor de afgeleiden van $\cos x$ en $\sin x$ gerefereerd aan de meetkundige behandeling in het VWO (syll. Analyse A, Voorbeeld 10.7), waarna de Taylorreeks en de machtreeks van deze functies konden worden verkregen (syll. Analyse A, p.79, formules 4 en 5).

Nu hebben we echter eerst de exponentiële functie rigoureus ingevoerd en vervolgens de cosinus en sinus in termen van de exponentiële functie gedefinieerd. Het is vervolgens onze taak om de reeds van het VWO vertrouwde trigonometrische formules te bewijzen uitgaande van deze nieuwe definitie, en ook te laten zien dat de meetkundige interpretatie van cosinus en sinus volgt uit onze definitie. Het eerste programmapunt, dat ook een discussie van het getal π omvat, zullen we hier behandelen, maar het laatste onderdeel zullen we uitstellen tot we het lengtebegrip voor een kromme in het vlak hebben behandeld.

6.23 Opgave Bewijs, uitgaande van de definities (6.34), (6.35), en gebruik makend van de eerder bewezen formules voor de exponentiële functie, de volgende formules voor de cosinus- en sinus-functies:

$$\cos(z+w) = \cos z \, \cos w - \sin z \, \sin w \quad (z, w \in \mathbb{C}), \tag{6.38}$$
$$\sin(z+w) = \sin z \, \cos w + \cos z \, \sin w \quad (z, w \in \mathbb{C}), \tag{6.39}$$
$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{6.40}$$
$$-1 \le \sin x \le 1, \quad -1 \le \cos x \le 1 \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{6.41}$$
$$\frac{d}{dx}(e^{ix}) = i\, e^{ix} \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{6.42}$$
$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{6.43}$$
$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{6.44}$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{6.45}$$

6.24 Vreemd als het lijkt, zal nu bewezen moeten worden dat $\cos x$ de waarde 0 aanneemt voor zekere reële waarden van x. Dit resultaat zal vervolgens leiden tot de rigoureuze definitie van het getal π (tot nu toe slechts meetkundig gedefinieerd) en tot een bewijs dat de sinus- en cosinusfuncties periodiek zijn.

Propositie Er bestaat een $x > 0$ zo dat $\cos x = 0$.

Bewijs Stel dat $\cos x \neq 0$ voor alle $x > 0$. Omdat $\cos 0 = 1$, volgt er met behulp van de continuïteit van cos en de tussenwaardestelling dat $\cos x > 0$ voor alle $x > 0$. Dit resultaat, samen met (6.43), laat zien dat de functie $x \mapsto \sin x$ monotoon stijgend is op $[0, \infty)$. Aangezien $\sin 0 = 0$, is $\sin x > 0$ als $x > 0$. Laat nu $0 < x < y$. Dan volgt er uit de middelwaardestelling 3.38 samen met (6.44) dat er een $z \in (x, y)$ bestaat zo dat $\cos x - \cos y = (y-x)\sin z$, dus wegens genoemde eigenschappen van de sinus-functie en wegens (6.41) volgt er dat

$$0 < (y-x)\sin x < (y-x)\sin z = \cos x - \cos y \leq 2.$$

Neem $x > 0$ vast. Dan geldt er voor alle $y > x$ dat $0 < \sin x < 2/(y-x)$. Dit is onmogelijk (cf. Opgave 1.17(a)). $\square$

6.25 Definitie Laat x_0 het infimum zijn van de (niet-lege en naar beneden begrensde) verzameling van positieve nulpunten van cos. Dan is $\cos x_0 = 0$ (waarom?), dus $x_0 > 0$. Definieer $\pi := 2x_0$. [Zie Ebbinghaus [5, Ch. 5] voor veel informatie over π.]

Wegens (6.40) geldt nu dat $\sin(\pi/2) = \pm 1$. Echter, omdat $\sin 0 = 0$ en sin monotoon stijgend is op $[0, \pi/2]$ (zie het bewijs van Propositie 6.24), zal $\sin(\pi/2) > 0$, dus $= 1$. Dus er volgt met behulp van (6.36) dat

$$e^{\frac{1}{2}\pi i} = i. \tag{6.46}$$

6.26 Opgave Bewijs, door gebruik te maken van (6.46), (5.29), (6.34) en (6.35), het volgende:

$$e^{\pi i} = -1, \quad e^{2\pi i} = 1, \tag{6.47}$$

$$e^{z+2\pi i} = e^z \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{6.48}$$

$$\sin(z+\pi) = -\sin z, \quad \cos(z+\pi) = -\cos z \qquad (z \in \mathbb{C}), \tag{6.49}$$

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi - z) = \cos z, \quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi - z) = \sin z \qquad (z \in \mathbb{C}). \tag{6.50}$$

6.27 Opgave

a) Zij $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $\cos x = 0$ desda $x = (k + \frac{1}{2})\pi$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$ en dat $\sin x = 0$ desda $x = k\pi$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$.

b) Zij $a \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $\cos(x+a) = \cos x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ desda $a = 2k\pi$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$. Bewijs dat evenzo $\sin(x+a) = \sin x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ desda $a = 2k\pi$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$.

6.28 **Opgave** Bewijs dat de afbeelding $\theta \mapsto e^{i\theta} \colon [0, 2\pi) \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ bijectief is.

6.29 De hyperbolische functies cosh en sinh kunnen gedefinieerd worden in termen van de exponentiële functie zoals reeds gedaan werd in syll. Analyse A, Definitie 5.5. We doen dit nu ook voor complex argument:

$$\cosh z := \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{6.51}$$

$$\sinh z := \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{6.52}$$

Opgave
a) Zij $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $\cosh x \neq 0$ en dat $\sinh x = 0$ desda $x = 0$.
b) Bewijs de volgende formules (zie ook syll. Analyse A, §5.4):

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{6.53}$$
$$\cos(iz) = \cosh z, \quad \sin(iz) = i\,\sinh z \qquad (z \in \mathbb{C}), \tag{6.54}$$
$$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1 \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{6.55}$$
$$\cos(x + iy) = \cos x\,\cosh y - i\,\sin x\,\sinh y \quad (x, y \in \mathbb{C}), \tag{6.56}$$
$$\sin(x + iy) = \sin x\,\cosh y + i\,\cos x\,\sinh y \quad (x, y \in \mathbb{C}). \tag{6.57}$$

c) Zij $z \in \mathbb{C}$. Bewijs dat $\cos z = 0$ desda $z = (k + \frac{1}{2})\pi$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$ en dat $\sin z = 0$ desda $z = k\pi$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$.

6.30 We kunnen nu de functies tan (ook als tg geschreven) en cot rigoureus definiëren, ook voor complex argument:

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z} \quad (z \in \mathbb{C}\backslash\{(k + \tfrac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}), \tag{6.58}$$
$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z} \quad (z \in \mathbb{C}\backslash\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}). \tag{6.59}$$

Opgave Bewijs dat

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \in \mathbb{R}\backslash\{(k + \tfrac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}), \tag{6.60}$$
$$\frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}). \tag{6.61}$$

6.4 De cyclometrische functies

De invoering van de cyclometrische functies (cf. syll. Analyse A, Voorbeeld 5.3, zie ook de grafieken aldaar) kan nu ook rigoureus geschieden. We beperken ons tot arcsin en arctan.

6.31 Opgave Bewijs dat de volgende afbeeldingen monotoon stijgend en bijectief zijn:

$$\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1], \tag{6.62}$$
$$\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}. \tag{6.63}$$

De functies arcsin en arctan zijn de inverse afbeeldingen van de afbeeldingen (6.62) resp. (6.63):

$$\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2],$$
$$\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2).$$

Ga na dat dat deze functies goed gedefinieerd zijn en dat ze buiten de eventuele randpunten van hun definitie-interval C^∞ zijn met eerste afgeleide als volgt (cf. syll. Analyse A, §5.3):

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (x \in (-1, 1)), \tag{6.64}$$
$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{6.65}$$

6.32 Propositie (cf. syll. Analyse A, p.79, formule 7) Er geldt dat

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \quad (-1 < x < 1). \tag{6.66}$$

Bewijs Het bewijs is analoog aan dat van Stelling 6.12. De machtreeks in het rechterlid van (6.66) heeft convergentiestraal 1 (ga na). Beide leden van (6.66) zijn gelijk 0 voor $x = 0$. Nu volgt (6.66) omdat

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^{2n} \quad (-1 < x < 1) \tag{6.67}$$

en omdat differentiatie van het linker resp. rechter lid van (6.66) het linker resp. rechter lid van (6.67) oplevert (ga na). □

6.33 Propositie Formule (6.66) blijft geldig voor $x := 1$, i.e.,

$$\pi/4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \cdots . \tag{6.68}$$

Bewijs Dit is analoog aan het bewijs van Propositie 6.13. Zij

$$f_n(x) := \arctan x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{2k+1} .$$

We moeten bewijzen dat $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 0$. Er geldt dat $f_n(0) = 0$ en

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}\, x^{2n+2}}{1+x^2}$$

(ga na). Dus $(-1)^{n+1} f_n(x) > 0$ $(x > 0)$. Dus $0 < (-1)^n f_{n-1}(x) < x^{2n+1}/(2n+1)$ als $x > 0$ (ga na). Dit levert de gevraagde limiet. □

6.34 **Opmerking** Formule (6.68) werd voor het eerst gegeven door Leibniz in 1674. Het zal duidelijk zijn dat computerbenaderingen van π tot op een miljard decimalen niet van deze reeks gebruik maken.
[Zie het boek J. M. Borwein & P. B. Borwein, *Pi and the AGM*, Wiley, 1987 voor een beschrijving van zeer efficiënte approximatiemethoden voor π.]
William Jones was in 1706 de eerste die de Griekse letter π gebruikte om de verhouding tussen omtrek en diameter van een cirkel aan te duiden. Euler nam dit symbool in 1737 over en het was door zijn geschriften dat deze schrijfwijze ingeburgerd raakte. Euler heeft ook de symbolen e en i ingevoerd.

6.35 **Opgave**

a) Bewijs dat

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k\, x^{2k+1}}{k!\,(2k+1)} \quad (-1 < x < 1). \tag{6.69}$$

b) Concludeer uit het geval $x := \frac{1}{2}$ van (6.69) dat

$$\pi/6 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!\,k!\,(2k+1)\,2^{4k+1}} . \tag{6.70}$$

c) Experimenteer in Maple hoe snel partiële sommen van (6.70) het getal $\pi \approx 3.141592654$ benaderen. Bijvoorbeeld, afbreken na de term met $k := 10$ geeft $\pi \approx 3.141592647$.

7 De Riemann-integraal

In syll. Analyse A, hst. 11 werd de Riemann-integraal reeds ingevoerd, een aantal bewijzen werden daar echter achterwege gelaten. We zullen dit materiaal hier recapituleren, nu met volledige bewijzen, en we zullen de stof vervolgens uitdiepen en generaliseren.

7.1 Definitie van de Riemann-integraal

Het meetkundige idee achter de Riemann-integraal werd reeds in de syll. Analyse A behandeld. Als f een begrensde niet-negatieve functie is gedefinieerd op een gesloten begrensd interval $[a, b]$, dan stelt $\int_a^b f(x)\,dx$ het oppervlak voor van de deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de twee verticale lijnen $x = a$ en $x = b$. Deze verzameling wordt zowel van onderen als van boven benaderd door eindige disjuncte verenigingen van rechthoekige verzamelingen. De oppervlaktebepaling van deze onder- en bovenverzamelingen is evident. Als de oppervlakken van de onderverzamelingen en van de bovenverzamelingen naar dezelfde limiet convergeren wanneer de breedte van de samenstellende rechthoeken naar 0 gaat, dan is de limiet per definitie het gevraagde oppervlak en dus ook de gevraagde integraal.

7.1 Definitie Zij $[a, b]$ een gesloten begrensd interval met $a < b$. Onder een *partitie* (of *verdeling*) van het interval $[a, b]$ verstaan we een eindige rij reële getallen $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ zo dat

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Vaak gebruiken we de hoofdletter P om een partitie aan te duiden. Als we ook willen specificeren om welke rij getallen het gaat dan kunnen we spreken over de partitie $P(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Zij $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ een begrensde reëelwaardige functie op $[a, b]$. Zij

$$m = m(f) := \inf_{a\le x\le b} f(x) \quad \text{en} \quad M = M(f) := \sup_{a\le x\le b} f(x).$$

Zij $P = P(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ een partitie van $[a, b]$. Dan bepalen f en P de getallen

$$m_i = m_i(f) := \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) \quad \text{en} \quad M_i = M_i(f) := \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{7.1}$$

We definiëren vervolgens

$$s(P) = s(P, f) := \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1}) \quad \text{en} \quad S(P) = S(P, f) := \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1}),$$

waarbij $s(P, f)$ de *ondersom* en $S(P, f)$ de *bovensom* heet van f t.o.v. de partitie P. Als de functie f vast gekozen is dan onderdrukken we de f-afhankelijkheid in onze notatie.

Als $f \ge 0$ dan kan men $s(P)$ meetkundig interpreteren als het oppervlak van een verzameling die de vereniging is van n disjuncte rechthoeken. Voor elke rechthoek geldt dat de onderzijde op de x-as ligt en de bovenzijde net onder de grafiek van f blijft. De bovensom $S(P)$ heeft een soortgelijke interpretatie, maar nu blijft de bovenzijde van elke samenstellende rechthoek net boven de grafiek van f. Zie het plaatje in syll. Analyse A. hst. 11 ter illustratie. Als f ook negatieve waarden aanneemt dan worden de oppervlakken van rechthoeken negatief gerekend als ze onder de x-as liggen.

Opgave Laat m_i en M_i gegeven zijn door (7.1). Bewijs dat

$$M_i - m_i = \sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]} (f(x) - f(y)) = \sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]} |f(x) - f(y)|. \tag{7.2}$$

7.2 Definitie Laten P_1 en P_2 partities zijn van een interval $[a, b]$. We noemen P_2 een *verfijning* van P_1 (notatie $P_1 \subset P_2$) als de eindige rij gegeven door P_1 een deelrij is van de eindige rij gegeven door P_2. De *gemeenschappelijke verfijning* van partities P_1 en P_2 van $[a, b]$ (notatie $P_1 \cup P_2$) is de partitie P_3 van $[a, b]$ die verkregen wordt door de verzameling van alle elementen uit P_1 en P_2 te ordenen in stijgende volgorde.

Lemma Zij $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ begrensd. Laten P_1 en P_2 partities zijn van $[a, b]$ zo dat P_2 een verfijning is van P_1. Dan geldt dat

$$s(P_1) \le s(P_2) \quad \text{en} \quad S(P_2) \le S(P_1). \tag{7.3}$$

Bewijs We zullen de eerste van de twee ongelijkheden bewijzen. De andere gaat analoog. Het is voldoende om de ongelijkheid te bewijzen voor het geval dat P_2 één punt meer bevat dan $P_1 = P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Laat dus $P_2 := P(x_0, \ldots, x_{i-1}, y, x_i, \ldots, x_n)$ voor zekere $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zij

$$m_i := \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x), \quad k_1 := \inf_{x_{i-1}\le x\le y} f(x), \quad k_2 := \inf_{y\le x\le x_i} f(x).$$

Dan geldt $k_1 \ge m_i$ en $k_2 \ge m_i$. Dus

$$\begin{aligned} s(P_2) - s(P_1) &= k_1(y - x_{i-1}) + k_2(x_i - y) - m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= (k_1 - m_i)(y - x_{i-1}) + (k_2 - m_i)(x_i - y) \ge 0. \end{aligned}$$ □

7.3 We behouden de notatie van Definitie 7.1 en nemen de functie f vast. Zij $P = P(x_0, \ldots, x_n)$ een willekeurige partitie van $[a, b]$. Omdat $m \le m_i \le M_i \le M$ $(i = 1, \ldots, n)$, geldt er dat

$$m\,(b - a) \le s(P) \le S(P) \le M\,(b - a) \tag{7.4}$$

(ga na). Daar de beide uiterste leden van (7.4) onafhankelijk zijn van P, zijn de verzamelingen $\{s(P) \mid P \text{ partitie van } [a, b]\}$ en $\{S(P) \mid P \text{ partitie van } [a, b]\}$ begrensd, zodat $\sup_P s(P)$ en $\inf_P S(P)$ bestaan en eindig zijn. De middelste ongelijkheid in (7.4) kan gegeneraliseerd worden tot de (meetkundig evidente) ongelijkheid in onderstaand lemma.

Lemma Zij $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ begrensd. Als P_1 en P_2 twee partities zijn van $[a, b]$ dan geldt dat $s(P_1) \le S(P_2)$.

Bewijs Laat de partitie P_3 de gemeenschappelijke verfijning zijn van P_1 en P_2. Gezien (7.4) en (7.3) geldt er dat

$$s(P_1) \le s(P_3) \le S(P_3) \le S(P_2). \tag{7.5}$$

Dit bewijst het lemma. □

Gevolg Zij $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ begrensd. Dan geldt dat

$$m\,(b - a) \le \sup_P s(P) \le \inf_P S(P) \le M\,(b - a), \tag{7.6}$$

waarbij P alle partities van $[a, b]$ doorloopt.

7.4 Voor ons meetkundige gevoel zou de middelste ongelijkheid in (7.6) altijd een gelijkheid moeten zijn. Er zijn echter pathologische (of juist interessante?) voorbeelden, waarbij er strikte ongelijkheid is. Het geval van gelijkheid noemen we Riemann-integreerbaarheid:

Definitie Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. Dan heet f *(Riemann)-integreerbaar* over $[a,b]$ als $\sup_P s(P) = \inf_P S(P)$. In dat geval noteren en definiëren we de *(Riemann)-integraal* van f over $[a,b]$ door

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sup_P s(P) = \inf_P S(P).$$

Gevolg Als f integreerbaar is over $[a,b]$ dan geldt dat

$$m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a). \tag{7.7}$$

7.5 De *wijdte* $\Delta(P)$ van een partitie $P = P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ is gedefinieerd door

$$\Delta(P) := \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} (x_i - x_{i-1}).$$

Zij de functie f Riemann-integreerbaar over $[a,b]$. Dan kunnen we een rij partities $P_1, P_2, \ldots$ vinden zo dat $P_k \subset P_{k+1}$ voor alle k en

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} s(P_k, f). \tag{7.8}$$

Als $P_k \subset P_{k+1}$ dan $\Delta(P_k) \ge \Delta(P_{k+1})$, maar niet omgekeerd. Toch zullen we zien dat de limiet (7.8) algemener geldt onder de aanname $\lim_{k\to\infty} \Delta(P_k) = 0$ zonder dat de partitities P_k verfijningen hoeven te zijn van hun voorgangers.

Lemma Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ begrensd. Zij $\omega := \sup_{x,y\in[a,b]} |f(x) - f(y)|$. Zij P_1 een partitie van $[a,b]$ met wijdte Δ_1. Zij P_2 een verfijning van P_1 verkregen door toevoeging van r punten aan P_1. Dan

$$s(P_1) \ge s(P_2) - r\omega\Delta_1, \quad S(P_1) \le S(P_2) + r\omega\Delta_1.$$

Bewijs We zullen de eerste van de twee ongelijkheden bewijzen. De andere gaat analoog. Het is voldoende om de ongelijkheid te bewijzen voor het geval dat P_2 één punt meer bevat dan $P_1 = P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Laat dus $P_2 := P(x_0, \ldots, x_{i-1}, y, x_i, \ldots, x_n)$ voor zekere $i \in \{1, \ldots, n\}$. Het bewijs van Lemma 7.2 (met de daar gebruikte notatie) geeft dan dat

$$\begin{aligned} s(P_2) - s(P_1) &= (k_1 - m_i)(y - x_{i-1}) + (k_2 - m_i)(x_i - y) \\ &\le \omega((y - x_{i-1}) + \omega(x_i - y) = \omega(x_i - x_{i-1}) \le \omega\Delta_1. \end{aligned}$$ □

Stelling Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar over $[a,b]$ met Riemann-integraal I. Dan is er bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zo dat $s(P) > I - \varepsilon$ en $S(P) < I + \varepsilon$ voor alle partities P van $[a,b]$ met wijdte $< \delta$.

Bewijs We zullen bewijzen: $\forall\varepsilon\ \exists\delta\ \big(\ \Delta(P) < \delta \ \Rightarrow\ s(P) > I - \varepsilon\ \big)$. De uitspraak voor de bovensommen gaat analoog. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een partitie P_0 van $[a,b]$ zo dat $s(P_0) > I - \frac{1}{2}\varepsilon$. Laat P_0 r elementen hebben. Zij P_1 een partitie van $[a,b]$ met wijdte Δ_1 en zij $P_2 := P_1 \cup P_0$. Dan volgt er met behulp van bovenstaand Lemma dat

$$s(P_1) \ge s(P_2) - r\omega\Delta_1 \ge s(P_0) - r\omega\Delta_1 > I - \tfrac{1}{2}\varepsilon - r\omega\Delta_1.$$

Als $\Delta_1 < \varepsilon/(2r\omega)$ dan zal dus $s(P_1) > I - \varepsilon$. □

7.6 We zullen nu bewijzen dat een paar grote klassen van functies op een interval $[a, b]$, nl. de continue functies en de monotone functies, integreerbaar zijn over $[a, b]$. Een handig gereedschap bij het bewijs hiervan is het volgende criterium.

Propositie (*Criterium van Riemann*) Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ begrensd. Dan is f Riemann-integreerbaar desda aan de volgende voorwaarde is voldaan:

$$\text{voor elke } \varepsilon > 0 \text{ bestaat er een verdeling } P \text{ van } [a, b] \text{ zo dat } S(P) - s(P) < \varepsilon. \tag{7.9}$$

Bewijs Neem eerst aan dat voorwaarde (7.9) geldt. Neem $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan is er een partitie P zo dat $S(P) - s(P) < \varepsilon$. Er volgt uit (7.6) dat dan $0 \le \inf_P S(P) - \sup_P s(P) < \varepsilon$. Omdat ε willekeurig gekozen was, volgt er dat $\inf_P S(P) - \sup_P s(P) = 0$. Dus f is integreerbaar.

Neem voor het bewijs van de omgekeerde richting aan dat f integreerbaar is met $I := \int_a^b f(x)\, dx$. Zij $\varepsilon > 0$. Gezien Definitie 7.4 en Lemma 7.3 bestaan er partities P_1 en P_2 zo dat

$$I - \tfrac{1}{2}\varepsilon < s(P_1) \le S(P_2) < I + \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{7.10}$$

Zij P_3 de gemeenschappelijke verfijning van P_1 en P_2. Combinatie van (7.10) en (7.5) levert dat $S(P_3) - s(P_3) < \varepsilon$. □

7.7 Stelling Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu. Dan is f integreerbaar over $[a, b]$.

Bewijs Wegens Stelling 3.26 is f begrensd en wegens Stelling 3.41 is f uniform continu. We zullen laten zien dat aan het criterium van Riemann voor integreerbaarheid (cf. (7.9)) voldaan is. Zij $\varepsilon > 0$. We moeten dus een partitie $P = P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ van $[a, b]$ vinden zo dat

$$S(P) - s(P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,(x_i - x_{i-1}) \le \varepsilon. \tag{7.11}$$

[Propositie 7.6 blijft geldig wanneer het laatste $<$ teken in (7.9) vervangen wordt door een $\le$ teken. Dat komt ons hieronder beter uit.]
Omdat $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = b - a$, zal aan de ongelijkheid in (7.11) voldaan zijn als $M_i - m_i \le \varepsilon/(b - a)$ voor alle i. Dit suggereert sterk om de uniforme continuïteit van f te gebruiken. Welaan, er bestaat $\delta > 0$ zo dat voor alle $x, y \in [a, b]$ geldt:

$$|x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}\,.$$

Kies nu $n \in \mathbb{N}$ zo dat $(b - a)/n < \delta$ en neem de partitie P zo dat $x_i - x_{i-1} = (b - a)/n$ voor alle $i = 1, \ldots, n$. Dan volgt er dus, met gebruik van (7.2), dat

$$M_i - m_i = \sup_{x,y \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{b - a}.$$ □

7.8 Propositie Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotoon zwak stijgend (of monotoon zwak dalend). Dan is f integreerbaar over $[a, b]$.

Bewijs Zij f monotoon zwak stijgend. Zij $P = P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ een partitie van $[a, b]$ zo dat $x_i - x_{i-1} = (b - a)/n$ voor alle i. Wegens de monotonie zal gelden dat $M_i = f(x_i)$ en $m_i = f(x_{i-1})$. Dus

$$S(P) - s(P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\,\frac{b - a}{n} = \frac{(b - a)\,(f(b) - f(a))}{n}\,.$$

Zij $\varepsilon > 0$. Dan zal $S(P) - s(P) < \varepsilon$ voor n voldoende groot. Er is dus aan het criterium van Riemann (7.9) voldaan. □

7.9 Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zo dat $f(x) = 0$ behalve als x in een zekere deelverzameling X ligt. Als X eindig is dan is f integreerbaar, als X aftelbaar oneindig is dan hoeft f niet nodzakelijk integreerbaar te zijn. Zie onderstaande opgaven.

Opgave

(a) Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zo dat $f(x) \neq 0$ voor slechts eindig veel waarden van x. Bewijs dat f integreerbaar is over $[a,b]$ en dat $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

(b) (cf. syll. Analyse A, Voorbeeld halverwege p.63) Bewijs dat de volgende begrensde functie $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ niet Riemann-integreerbaar is over $[a,b]$:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{als } x \text{ rationaal,} \\ 0 & \text{als } x \text{ irrationaal.} \end{cases}$$

7.10 **Opgave** Zij $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

(a) Laat $f(1/n) := 1$ $(n \in \mathbb{N})$ en $f(x) := 0$ voor overige waarden van x. Bewijs dat f integreerbaar is over $[0,1]$ en dat $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

(b) Laat $f(x) = 0$ buiten een zekere aftelbare deelverzameling van $[0,1]$ en neem aan dat f integreerbaar is over $[0,1]$. Bewijs dat $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

7.11 **Opmerking** Een generalisatie van de Riemann-integraal wordt gevormd door de z.g. Riemann-Stieltjes integraal

$$\int_a^b f(x)\,dg(x), \tag{7.12}$$

waarbij $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een monotoon zwak stijgende functie is. In het geval van de gewone Riemann-integraal nemen we $g(x) := x$. De definitie gaat als volgt. Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. Voor elke partitie $P = P(x_0, \ldots, x_n)$ definiëren we

$$s_g(P) := \sum_{i=1}^n m_i\,(g(x_i) - g(x_{i-1})),$$
$$S_g(P) := \sum_{i=1}^n M_i\,(g(x_i) - g(x_{i-1})),$$

waarbij $m_i = m_i(f)$ en $M_i = M_i(f)$ gedefinieerd zijn als in (7.1). Men kan weer bewijzen dat

$$\sup_P s_g(P) \leq \inf_P S_g(P).$$

Als in deze ongelijkheid het gelijkteken geldt dan noemen we f *Riemann-Stieltjes integreerbaar* over $[a,b]$ met betrekking tot g en we definiëren deze gemeenschappelijke waarde als de *Riemann-Stieltjes integraal*, genoteerd door (7.12).

Een belangrijk speciaal geval van de Riemann-Stieltjes integraal treedt op als g bovendien een C^1-functie is. Dan geldt dat

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx,$$

mits de functie $x \mapsto f(x)\,g'(x)$ Riemann-integreerbaar is. Zie Rudin, Ch. 6 voor een nadere behandeling van de Riemann-Stieltjes integraal.

7.2 *Enige eigenschappen van de Riemann-integraal*

Teneinde de volgende stelling iets beter in perspectief te plaatsen, memoreren we eerst een paar zaken betreffende lineaire ruimtes van functies. Zie het college Lineaire algebra voor algemeenheden over lineaire ruimtes. Enkele genormeerde lineaire ruimtes van functies zullen als voorbeelden behandeld worden bij het vak Topologie. Een veel gedetailleerder behandeling van zulke ruimtes zal plaats hebben bij de vakken Integratietheorie en Functionaalanalyse.

7.12 **Opgave** Zij X een willekeurige verzameling. Bewijs het volgende.

(a) De verzameling $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ van alle reëelwaardige functies $f\colon X \to \mathbb{R}$ wordt een reële vectorruimte t.o.v. de optelling en scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd door

$$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x), \quad (cf)(x) := c\,f(x) \qquad (x \in X), \tag{7.13}$$

waarbij c een reële constante is.

(b) De verzameling $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ van alle begrensde reëelwaardige functies op X is een lineaire deelruimte van $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.

(c) Zij $X \subset \mathbb{R}$. Dan vormt de verzameling van continue reëelwaardige functies op X een lineaire deelruimte van $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$. Als $X = [a,b]$ (gesloten begrensd interval) dan vormen de continue reëelwaardige functies op X ook een lineaire deelruimte van $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$. Deze ruimte van continue functies wordt dan genoteerd als $C(X;\mathbb{R})$.

[We kunnen ook soortgelijke ruimtes bekijken van complexwaardige functies. Deze noteren we als $\mathcal{F}(X)$, $\mathcal{B}(X)$, $C(X)$, resp. Dit zijn complexe vectorruimtes.]

7.13 Stelling Zij $\mathcal{R} = \mathcal{R}([a,b];\mathbb{R})$ de verzameling van alle Riemann-integreerbare functies op een gegeven interval $[a,b]$. Gebruik de definities in (7.13) ($X := [a,b]$).

(a) Als $f_1, f_2 \in \mathcal{R}$ dan $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}$ en

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

(b) Als $f \in \mathcal{R}$ en $c \in \mathbb{R}$ dan $cf \in \mathcal{R}$ en

$$\int_a^b (cf)(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Bewijs We bewijzen (a). Laat dus $f_1, f_2 \in \mathcal{R}$. Voor elke partitie $P = P(x_0, \ldots, x_n)$ geldt dat

$$m_i(f_1 + f_2) \geq m_i(f_1) + m_i(f_2) \quad \text{en} \quad M_i(f_1 + f_2) \leq M_i(f_1) + M_i(f_2)$$

(ga na). Hieruit volgt dat

$$s(P, f_1) + s(P, f_2) \leq s(P, f_1 + f_2) \leq S(P, f_1 + f_2) \leq S(P, f_1) + S(P, f_2). \tag{7.14}$$

Zij nu $\varepsilon > 0$ willekeurig. Volgens het criterium van Riemann zijn er verdelingen P_1 en P_2 zo dat

$$S(P_1, f_1) - s(P_1, f_1) < \varepsilon \quad \text{en} \quad S(P_2, f_2) - s(P_2, f_2) < \varepsilon.$$

Combinatie met Lemma 7.2 levert dat soortgelijke ongelijkheden gelden voor de gemeenschappelijke verfijning P_3 van P_1 en P_2:

$$S(P_3, f_1) - s(P_3, f_1) < \varepsilon \quad \text{en} \quad S(P_3, f_2) - s(P_3, f_2) < \varepsilon. \tag{7.15}$$

UIt (7.14) en (7.15) volgt nu dat

$$S(P_3, f_1 + f_2) - s(P_3, f_1 + f_2) < 2\varepsilon.$$

Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig is, impliceert het criterium van Riemann dus dat $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}$. Ook volgt er uit (7.15) samen met Definitie 7.4 dat

$$S(P_3, f_1) < \int_a^b f_1(x)\, dx + \varepsilon \quad \text{en} \quad S(P_3, f_2) < \int_a^b f_2(x)\, dx + \varepsilon.$$

Combinatie met (7.14) (voor $P := P_3$) en Definitie 7.4 levert:

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))\, dx \leq S(P_3, f_1+f_2) \leq S(P_3, f_1)+S(P_3, f_2) < \int_a^b f_1(x)\, dx+\int_a^b f_2(x)\, dx+2\varepsilon.$$

Dit geldt voor elke $\varepsilon > 0$, zodat

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\, dx \leq \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

De ongelijkheid in andere richting wordt op soortgelijke manier bewezen. □

7.14 **Opgave** Bewijs onderdeel (b) van bovenstaande Stelling

Opmerking Samenvattend kunnen we bovenstaande stelling als volgt formuleren. De verzameling $\mathcal{R}([a, b]; \mathbb{R})$ is een reële vectorruimte en de afbeelding $f \mapsto \int_a^b f(x)\, dx : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ is lineair. Er geldt dus ook dat $\mathcal{R}([a, b]; \mathbb{R})$ een lineaire deelruimte is van $\mathcal{B}([a, b]; \mathbb{R})$.

7.15 We hebben al vaker gezien dat definities en eigenschappen betreffende reëelwaardige functies op betrekkelijk triviale wijze naar complexwaardige functies kunnen worden overgebracht. Dit geldt ook voor integreerbaarheid.

Definitie Een functie $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ heet *(Riemann)-integreerbaar* over $[a, b]$ als de beide functies $\operatorname{Re} f$ en $\operatorname{Im} f$ integreerbaar zijn over $[a, b]$ in de zin van Definitie 7.4. Voor f integreerbaar definiëren we de *integraal* van f over $[a, b]$ door

$$\int_a^b f(x)\, dx := \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\, dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\, dx,$$

waarbij de twee integralen in het rechter lid gedefinieerd zijn in de zin van Definitie 7.4.

Opgave Bewijs dat de uitspraken van Stelling 7.13 doorgaan voor complexwaardige integreerbare functies f_1, f_2, f en complexe c.
[We noteren de ruimte van complexwaardige integreerbare functies over $[a, b]$ met $\mathcal{R}([a, b])$. Dit is een complexe vectorruimte.]

7.16 Propositie Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ begrensd en zij $c \in (a,b)$. Dan is f integreerbaar over $[a,b]$ desda f integreerbaar is over $[a,c]$ èn $[c,b]$. Als aan deze twee equivalente voorwaarden voldaan is dan geldt bovendien dat

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{7.16}$$

Opgave Bewijs deze propositie.

7.17 Propositie Zij $f \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{R})$.

(a) Als $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a,b]$ dan geldt dat $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

(b) Als $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a,b]$ en bovendien f continu is en niet identiek gelijk 0 dan geldt dat $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

Bewijs Onderdeel (a) volgt uit (7.7). Stel, voor onderdeel (b), dat $f(x_0) > 0$. Vanwege de continuïteit van f is er dan een interval $[c,d]$ zo dat $x_0 \in [c,d] \subset [a,b]$ en $\inf_{x\in[c,d]} f(x) > 0$, dus $\int_c^d f(x)\,dx > 0$ wegens (7.7). Schrijf nu met behulp van Propositie 7.16 de integraal over $[a,b]$ als een som van integralen over $[a,c]$, $[c,d]$ en $[d,b]$. $\square$

Gevolg Als $f_1, f_2 \in \mathcal{R}([a,b];\mathbb{R})$ en $f_1 \leq f_2$ dan

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leq \int_a^b f_2(x)\,dx. \tag{7.17}$$

Als bovendien f_1 en f_2 continu zijn en f_1 niet identiek gelijk is aan f_2 dan is de ongelijkheid in (7.17) strikt.

7.18 Stelling Laten de begrensde functies $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integreerbaar zijn over $[a,b]$. Dan is de productfunctie $fg\colon x \mapsto f(x)\,g(x)$ integreerbaar over $[a,b]$.

7.19 **Opgave** Bewijs Stelling 7.18 door nadere uitwerking van het volgende. Zij $P = P(x_0,\dots,x_n)$ een partitie van $[a,b]$. Bewijs eerst, met gebruik van (7.2), dat

$$\begin{aligned} M_i(fg) - m_i(fg) &= \sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)\,g(x) - f(y)\,g(y)| \\ &\leq M(|f|)\,(M_i(g) - m_i(g)) + M(|g|)\,(M_i(f) - m_i(f)). \end{aligned}$$

Bewijs hieruit dat

$$S(P,fg) - s(P,fg) \leq M(|f|)\,(S(P,g) - s(P,g)) + M(|g|)\,(S(P,f) - s(P,f)).$$

Pas tenslotte het criterium van Riemann toe.

7.20 Stelling Laat de begrensde functie $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integreerbaar zijn over $[a,b]$. Dan is de functie $|f|\colon x \mapsto |f(x)|$ integreerbaar over $[a,b]$ en

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{7.18}$$

Bewijs Zij $P = P(x_0, \dots, x_n)$ een partitie van $[a,b]$. Dan geldt dat

$$M_i(|f|) - m_i(|f|) = \sup_{x,y \in [x_{i-1},x_i]} (|f(x)| - |f(y)|) \leq \sup_{x,y \in [x_{i-1},x_i]} |f(x) - f(y)| = M_i(f) - m_i(f).$$

Dus

$$S(P, |f|) - s(P, |f|) \leq S(P, f) - s(P, f).$$

De integreerbaarheid van f, samen met het criterium van Riemann, geeft nu de integreerbaarheid van $|f|$.

Formule (7.18) volgt nu uit Gevolg 7.17 samen met het feit dat $f \leq |f|$ en $-f \leq |f|$. □

7.21 Propositie Laten $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zo dat $f(x) - g(x) \neq 0$ voor slechts eindig veel $x \in [a,b]$. Dan geldt: f is integreerbaar over $[a,b]$ desda g integreerbaar is over $[a,b]$. Als aan deze twee equivalente uitspraken voldaan is dan geldt dat $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx$.

Bewijs De functie $f - g$ is integreerbaar en heeft integraal 0 wegens Opgave 7.9(a). Dus, als g integreerbaar is, dan is $f = (f - g) + g$ integreerbaar en zijn de integralen van f en g gelijk wegens Stelling 7.13(a). □

Propositie 7.21 zegt dus dat het voor de integreerbaarheid en de waarde van de integraal van een functie op een interval $[a,b]$ niet uitmaakt als we de waarde van die functie in eindig veel punten veranderen.

7.22 **Definitie** Een functie $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heet *stuksgewijs continu* als er een partitie $P = P(x_0, \dots, x_n)$ van $[a,b]$ en continue functies $f_k\colon [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{R}$ $(k = 1, \dots, n)$ bestaan zo dat $f(x) = f_k(x)$ als $x \in (x_{k-1}, x_k)$ $(k = 1, \dots, n)$.

Een functie f als in de definitie is dus continu in alle $x \in [a,b]$ buiten de punten $x_0, x_1, \dots, x_n$, terwijl f in de punten $x_0, x_1, \dots, x_n$ door wijziging van de functiewaarde naar believen links of rechts continu in elk van deze punten gemaakt kan worden. We noemen de punten van $[a,b]$ waar f niet continu is de *discontinuïteitspunten* van f.

Een voorbeeld van een stuksgewijs continue, maar niet continue functie f op $[-1,1]$ is de functie

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{als } -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{als } x = 0, \\ 1 & \text{als } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Opgave Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een stuksgewijs continue functie. Bewijs dat f integreerbaar is over $[a,b]$ en dat de integraal van f ongewijzigd blijft als de functiewaarden in de discontinuïteitspunten van f veranderd worden.
Aanwijzing: Pas Proposities 7.16 en 7.21 en Stelling 7.7 toe.

7.3 Het verband tussen integratie en differentiatie

In syll. Analyse A, §11.1–11.2 werd het begrip *primitieve van een functie* gedefinieerd en werd de Hoofdstelling van de integraalrekening zonder bewijs gegeven. Hier komen we op deze zaken terug, met nadruk op de integraal van een continue functie. Eerst maken we de volgende afspraken.

7.23 Definitie Zij $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{als } b < a \text{ en } f \in \mathcal{R}([b,a];\mathbb{R}), \tag{7.19}$$

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0 \quad \text{als } f\colon \{a\} \to \mathbb{R}. \tag{7.20}$$

Opgave Bewijs het volgende:
(a) Formule (7.16) geldt voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ ongeacht hun onderlinge positie, zolang de drie integralen bestaan.
(b) Merk op dat formule (7.18) niet geldt als $b < a$ (het rechterlid is dan ≤ 0). Wel is voor alle a en b het volgende juist:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|. \tag{7.21}$$

(c) Zij I een gesloten begrensd interval met eindpunten a, b (niet noodzakelijk geordend), zij $f\colon I \to \mathbb{R}$ een integreerbare functie en laat $C \geq 0$ zo dat $|f(x)| \leq C$ voor alle $x \in I$. Dan geldt:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq C\,|b-a|.$$

7.24 Definitie Zij I een interval en $f\colon I \to \mathbb{R}$. Zoals in syll. Analyse A, Definitie 11.1 reeds voor het geval van een gesloten begrensd interval was gedefinieerd, noemen we een functie $F\colon I \to \mathbb{R}$ een *primitieve van* f als F differentieerbaar is met afgeleide f.

Opgave Bewijs, zoals in syll. Analyse A, §11.1 reeds gedaan is voor het geval van een gesloten begrensd interval, het volgende.

Zij I een interval en $f\colon I \to \mathbb{R}$. Neem aan dat f een primitieve F heeft. Dan geldt:

$$G \text{ is een primitieve van } f \quad \Longleftrightarrow \quad G - F \text{ is constant op } I.$$

In syll. Analyse A, Voorbeeld 11.1 werd een voorbeeld gegeven van een functie op een gesloten begrensd interval, niet continu maar wel Riemann-integreerbaar, die geen primitieve heeft. We zullen nu zien dat iedere continue functie wel een primitieve heeft.

7.25 Stelling Zij I een interval en zij $f\colon I \to \mathbb{R}$ continu.
(a) Zij $a \in I$ en definieer de functie $F\colon I \to \mathbb{R}$ door

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad (x \in I). \tag{7.22}$$

Dan is F een primitieve van f en $F(a) = 0$.

(b) Zij $a, b \in I$ en zij F een willekeurige primitieve van f. Dan

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a). \tag{7.23}$$

Bewijs We bewijzen eerst (a). Voor iedere $x \in I$ is $F(x)$ goed gedefinieerd als de integraal van een continue functie op het gesloten begrensde interval met randpunten a en x. Het is duidelijk dat $F(a) = 0$. Neem $x_0 \in I$. We zullen bewijzen dat F differentieerbaar is in x_0 en dat $F'(x_0) = f(x_0)$. Neem daartoe $\varepsilon > 0$ willekeurig. Gezien de continuïteit van f in x_0 is er een $\delta > 0$ zo dat $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ als $|x - x_0| < \delta$ en $x \in I$. Wegens (7.22) en (7.16) (uitgebreid in de zin van Opgave 7.23(a)) kunnen we schrijven:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,dt - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,dt$$

(ga de tweede gelijkheid na). Dus, gezien Opgave 7.23(c), geldt nu voor elke $x \in I$ met $0 < |x - x_0| < \delta$ dat

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|}\, \varepsilon\, |x - x_0| = \varepsilon.$$

Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig is volgt er dat

$$F'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

(linker of rechter limiet als x_0 een randpunt van I is). Hiermee is (a) bewezen.

Nu bewijzen we (b). Zij F gegeven door (7.22) en zij G een andere primitieve van f. Gezien Opgave 7.24 geldt er dat $G(x) = F(x) + C$ voor zekere constante C. Voor $x := a$ verkrijgen we $G(a) = C$, dus $G(x) - G(a) = F(x)$, dus $G(b) - G(a) = F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$. $\square$

Onderdeel (b) van bovenstaande Stelling staat bekend als de *Hoofdstelling van de integraalrekening*, echter hier slechts voor continue functies geformuleerd.

7.26 **Opmerking** Er bestaan varianten van Stelling 7.25 voor het geval dat I een gesloten begrensd interval $[a, b]$ is en f integreerbaar is over $[a, b]$, niet noodzakelijk continu. Dan kan bewezen worden dat de functie F gedefinieerd door (7.22) continu is. Wat betreft onderdeel (b), als f integreerbaar is over $[a, b]$ en als f een primitieve heeft, zeg een functie F, dan kan (7.23) wederom bewezen worden. Deze laatste uitspraak is de Hoofdstelling van de integraalrekening in volledige algemeenheid. De bewijzen zijn niet moeilijk, zie Rudin, 6.20 en 6.21.

7.27 Twee belangrijke gevolgen van Stelling 7.25(b), nl. de stelling over partiële integratie en de stelling over transformatie van de integratievariabele, zijn reeds geformuleerd en bewezen in syll. Analyse A, Stellingen 11.3 en 11.4. We recapituleren deze stellingen hieronder.

Stelling (*partiële integratie*) Laten $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ C^1-functies zijn. Dan geldt dat

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx. \tag{7.24}$$

7.28 Stelling (*transformatie van integratievariabele*) Zij gegeven:
(i) een C^1-functie $\phi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$;
(ii) een continue functie $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.
Dan geldt dat

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(y))\, \phi'(y)\, dy. \tag{7.25}$$

Kijk de bewijzen van deze twee stellingen nog eens na in syll. Analyse A, Stellingen 11.3 en 11.4. Merk op dat (7.24) direct volgt uit de formule voor differentiatie van een product ($(fg)' = f'g + fg'$), terwijl (7.25) volgt uit de kettingregel ($(F \circ \phi)'(x) = F'(\phi(x))\, \phi'(x)$). In beide bewijzen wordt vervolgens (7.23) toegepast.

7.29 Opmerking Formule (7.25) wordt het meeste toegepast als ϕ een monotone C^1-afbeelding is van $[\alpha,\beta]$ op $[a,b]$. Dan wordt (7.25) meestal gebruikt in de vorm

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(y))\, \phi'(y)\, dy \tag{7.26}$$

$$= -\int_{\phi^{-1}(b)}^{\phi^{-1}(a)} f(\phi(y))\, \phi'(y)\, dy. \tag{7.27}$$

Doorgaans gebruikt men (7.26) als ϕ monotoon stijgend is, en (7.27) als ϕ monotoon dalend is.

7.30 **Opmerking** Een interessant geval van (7.25) doet zich voor als $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$. Dan zal

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(y))\, \phi'(y)\, dy = 0 \tag{7.28}$$

voor alle functies f die continu zijn op een interval dat $\phi([\alpha,\beta])$ omvat. Dus dan is

$$\int_\alpha^\beta g(y)\, \phi'(y)\, dy = 0$$

voor alle functies g van de vorm $f \circ \phi$, maar zeker niet voor willekeurige continue functies g: neem bijv. $g(y) := \phi'(y)$.

Een voorbeeld van (7.28) wordt gegeven door $\phi(y) := y(y-1)(y-2)$, $\alpha := 0$, $\beta := 1$. Dan geldt voor alle continue functies $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ dat

$$\int_0^1 f\big(y(y-1)(y-2)\big)\, (3y^2 - 6y + 2)\, dy = 0.$$

7.31 Opmerking Gezien de differentiatieformules (6.5), (6.64) en (6.65) kunnen we Stelling 7.25(b) nu toepassen om integraalrepresentaties van de functies log, arcsin en arctan te verkrijgen:

$$\begin{aligned}\log x &= \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad (x>0),\\ \arcsin x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \quad (-1<x<1),\\ \arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \quad (x\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

7.32 Stelling (*Middelwaardestelling van de integraalrekening*) Zij $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ continu. Dan geldt

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a) \quad \text{voor zekere } \xi\in(a,b).$$

Bewijs Wegens Stelling 7.25(a) heeft f een primitieve F. Wegens de middelwaardestelling van de differentiaalrekening (Stelling 3.38) bestaat er een $\xi\in(a,b)$ zo dat $F(b)-F(a)=F'(\xi)\,(b-a)$. Gebruik nu dat $F'=f$ samen met (7.23). □

De stelling kan als volgt geïnterpreteerd worden: Een op $[a,b]$ continue reëelwaardige functie neemt haar gemiddelde waarde over dat interval aan in zeker punt van (a,b).

7.33 Stelling 7.32 is een speciaal geval van de volgende algemenere middelwaardestelling.

Stelling Laten $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ en $g\colon [a,b]\to[0,\infty)$ continu zijn. Dan geldt:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx \quad \text{voor zekere } \xi\in[a,b].$$

Bewijs Er volgt uit Gevolg 7.17 en Stelling 7.13(b) dat

$$m(f)\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \le M(f)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Dus $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = c\int_a^b g(x)\,dx$ voor zekere $c\in[m(f),M(f)]$. Voor deze c geldt: $c=f(\xi)$ voor zekere $\xi\in[a,b]$ (waarom?). □

Met wat meer werk kan worden aangetoond dat ξ zelfs binnen (a,b) gevonden kan worden. Voor $g\neq 0$ kan deze Stelling als volgt worden geïnterpreteerd: De functie f neemt haar gemiddelde over $[a,b]$ t.o.v. de waarschijnlijkheidsverdeling $\dfrac{g(x)\,dx}{\int_a^b g(t)\,dt}$ aan in een zeker punt van (a,b).

7.4 Orthogonale stelsels van functies

Met behulp van de Riemann-integraal kunnen we een inproduct definiëren op de lineaire ruimte van alle continue functies $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Zo zullen we ook kunnen zeggen wanneer twee functies onderling orthogonaal zijn en we zullen stelsels van onderling orthogonale functies kunnen bekijken.

7.34 Laat $C([a,b];\mathbb{R})$ de reële vectorruimte zijn van alle continue functies $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Definieer voor $f, g \in C([a,b];\mathbb{R})$ het reële getal

$$(f,g) := \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx. \tag{7.29}$$

Propositie Formule (7.29) definieert een inproduct op de vectorruimte $C([a,b];\mathbb{R})$.

Bewijs We lopen de eigenschappen van een inproduct na (zie Lineaire Algebra).
(i) $(f,g) = (g,f)$, is triviaal vervuld.
(ii) $(c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1\,(f_1,g) + c_2\,(f_2,g)$, volgt uit Stelling 7.13.
(iii) $f \neq 0 \;\Rightarrow\; (f,f) > 0$, volgt uit Propositie 7.17(b). □

7.35 Opgave Bewijs het volgende.
(a) $\displaystyle\int_0^\pi \cos(nx)\, dx = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$.
(b) $\cos(nx)\,\cos(mx) = \frac{1}{2}\,\cos((n+m)x) + \frac{1}{2}\,\cos(|n-m|x) \quad (n, m = 0, 1, 2, \ldots)$.
(c) Voor $n, m = 0, 1, 2, \ldots$ gelden de volgende orthogonaliteitsrelaties:

$$\int_0^\pi \cos(nx)\,\cos(mx)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{als } n \neq m, \\ \frac{1}{2}\pi & \text{als } n = m \neq 0, \\ \pi & \text{als } n = m = 0. \end{cases} \tag{7.30}$$

7.36 Opgave Bewijs het volgende.
(a) $\sin(nx)\,\sin(mx) = -\frac{1}{2}\,\cos((n+m)x) + \frac{1}{2}\,\cos(|n-m|x) \quad (n, m = 1, 2, \ldots)$.
(c) Voor $n, m = 1, 2, \ldots$ gelden de volgende orthogonaliteitsrelaties:

$$\int_0^\pi \sin(nx)\,\sin(mx)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{als } n \neq m, \\ \frac{1}{2}\pi & \text{als } n = m. \end{cases} \tag{7.31}$$

7.37 **Opmerking** Formules (7.30) en (7.31) leveren twee orthonormale stelsels in de inproductruimte $C([0,\pi];\mathbb{R})$, nl. het stelsel $\{f_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ met

$$f_n(x) := \begin{cases} (2/\pi)^{\frac{1}{2}}\,\cos(nx) & \text{als } n = 1, 2, \ldots, \\ (1/\pi)^{\frac{1}{2}} & \text{als } n = 0, \end{cases}$$

en het stelsel $\{g_n\}_{n=1,2,\ldots}$ met $g_n(x) := (2/\pi)^{\frac{1}{2}}\,\sin(nx)$. Er geldt: $(f_n, f_m) = \delta_{nm}$ en $(g_n, g_m) = \delta_{nm}$. Er kan aangetoond worden dat deze orthonormale stelsels *volledig* zijn, d.w.z., als $f \in C([0,\pi];\mathbb{R})$ dan geldt:

$$\begin{aligned} (\,\forall n \in \{0,1,2,\ldots\} \quad (f, f_n) = 0\,) \quad &\Longrightarrow \quad f = 0, \\ (\,\forall n \in \{1,2,\ldots\} \quad (f, g_n) = 0\,) \quad &\Longrightarrow \quad f = 0. \end{aligned}$$

De inproductruimte $C([0,\pi];\mathbb{R})$ is echter geen Hilbertruimte (cf. het vak Topologie). Wel kunnen we, zoals bij iedere inproductruimte, de completering van $C([0,\pi];\mathbb{R})$ bekijken. De resulterende Hilbertruimte wordt genoteerd als $L^2([0,\pi];\mathbb{R})$. Deze ruimte bevat alle functies f zo dat de functie $x \mapsto (f(x))^2$ Lebesgue-integreerbaar is over $[0,\pi]$. In een volgend hoofdstuk zullen we kort iets zeggen over Lebesgue-integreerbaarheid. Dit belangrijke begrip komt uitgebreid aan de orde bij het vak Integratietheorie.

Als $f \in C([0,\pi]),\mathbb{R})$ ontwikkeld kan worden in een reeks $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n \cos(nx)$ of $f(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin(nx)$ met convergentie in enigerlei zin, dan spreken we van een *Fourier-cosinusreeks* of *Fourier-sinusreeks*. De theorie van deze reeksen is van zeer groot belang in de zuivere en toegepaste wiskunde. Het komt aan de orde in het vak Fourier-analyse.

7.38 **Opgave** Laat $C([a,b])$ de complexe vectorruimte zijn van alle continue functies $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Definieer voor $f,g \in C([a,b])$ het complexe getal getal

$$(f,g) := \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx. \tag{7.32}$$

(a) Bewijs dat (7.32) een hermitisch inproduct definieert op de complexe vectorruimte $C([a,b])$.
(b) Bewijs dat

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}\,\overline{e^{imx}}\,dx = 2\pi\,\delta_{nm} \quad (n,m \in \mathbb{Z}), \tag{7.33}$$

m.a.w., dat de functies f_n gedefinieerd door $f_n(x) := (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\,e^{inx}$ $(n \in \mathbb{Z})$ een orthonormaal stelsel $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ vormen in $C([0,2\pi])$.

Verdere vraagstukken

V7.1 Bewijs met behulp van syll. Analyse A, p.69, Voorbeeld (c) en gebruik makend van de notatie (6.23) dat

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!}\,\frac{\pi}{2} \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{7.34}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{n!}{(\frac{3}{2})_n} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{7.35}$$

V7.2 Combineer (7.34)–(7.35) met de ongelijkheden

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+2} x\,dx \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx$$

om te bewijzen dat

$$\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}\,\pi \le \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{n!}{(\frac{1}{2})_n}\right)^2 \le \pi.$$

Leid hieruit de volgende formule van Wallis af:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{n!}{(\frac{1}{2})_n}\right)^2 = \pi. \tag{7.36}$$

8 Oneigenlijke integralen

In dit hoofdstuk bekijken we integralen die niet onder de definitie van Riemann-integraal vallen omdat ofwel de integrand geen begrensde functie is ofwel het integratie-interval niet begrensd is. In beide gevallen proberen we toch een betekenis te geven aan zo'n "oneigenlijke" integraal door hem te beschouwen als limiet van een "eigenlijke" integraal. Dit is reeds kort behandeld in syll. Analyse A, §11.6. Veel van de integralen die een wiskundige in de praktijk tegenkomt zijn oneigenlijk. Juist oneigenlijke integralen blijken vaak mooie expliciete evaluaties te hebben. Als belangrijke toepassing van oneigenlijke integralen behandelen we het z.g. integraalcriterium om convergentie van reeksen na te gaan.

8.1 Definities van oneigenlijke integralen

"Integreerbaar" hoeft niet langer meer "Riemann-integreerbaar" te betekenen. Als we Riemann-integreerbaar bedoelen dan zullen we dit aanduiden met *R-integreerbaar*. Om de volgende definities in goed perspectief te zien, geven we eerst nog een resultaat betreffende Riemann-integralen.

8.1 Propositie Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ begrensd. Als f R-integreerbaar is over $[a,c]$ voor elke $c \in (a,b)$, dan is f R-integreerbaar over $[a,b]$ en er geldt dat

$$\lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{8.1}$$

Bewijs We gebruiken de notatie van Definitie 7.1. Als $f(x)$ identiek gelijk 0 is dan is het resultaat evident. Neem dus aan dat $M(|f|) > 0$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $c \in (a,b)$ zo dat

$$b - c < \frac{\varepsilon}{4M(|f|)}\,. \tag{8.2}$$

Omdat f R-integreerbaar is over $[a,c]$, is er volgens het criterium van Riemann een partitie $P = P(x_0,\ldots,x_n)$ van $[a,c]$ zo dat

$$S(P) - s(P) < \varepsilon/2. \tag{8.3}$$

Bekijk nu de partitie $P_1 := P(x_0,\ldots,x_n,x_{n+1})$ van $[a,b]$ die ontstaat uit P door het punt $x_{n+1} := b$ toe te voegen. Hiervoor geldt

$$S(P_1) - s(P_1) = S(P) - s(P) + (M_{n+1} - m_{n+1})\,(b-c). \tag{8.4}$$

Daar $|M_{n+1} - m_{n+1}| \le 2M(|f|)$, volgt uit (8.2), (8.3) en (8.4) dat

$$S(P_1) - s(P_1) < \tfrac{1}{2}\varepsilon + 2M(|f|)\,\frac{\varepsilon}{4M(|f|)} = \varepsilon.$$

Wegens het criterium van Riemann is f dus R-integreerbaar over $[a,b]$.

Voor het bewijs van (8.1) nemen we weer $\varepsilon > 0$ willekeurig. Voor elke $c \in (a,b)$ met $b - c < \varepsilon/M(|f|)$ volgt er dan met behulp van Propositie 7.16 en formule (7.7) dat

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx \right| = \left| \int_c^b f(x)\,dx \right| \le M(|f|)\,(b-c) < \varepsilon. \qquad \square$$

Opmerking In het geval van een functie $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ die R-integreerbaar is over $[a,c]$ voor elke $c \in (a,b)$ en die begrensd is op $[a,b)$, kunnen we f tot een begrensde functie op $[a,b]$ maken door een willekeurige waarde voor $f(b)$ te kiezen, en we kunnen dan met behulp van Propositie 8.1 concluderen dat f R-integreerbaar is over $[a,b]$ en dat de integraal van f over $[a,b]$ voldoet aan (8.1) en dus onafhankelijk is van de keuze van $f(b)$ (zie ook Propositie 7.21).

8.2 Zij $-\infty < a < b < \infty$ en zij $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ een functie die R-integreerbaar (en dus ook begrensd) is over $[a,c]$ voor elke $c \in (a,b)$, maar onbegrensd is op $[a,b)$. Na uitbreiding van f tot een functie op $[a,b]$ door een willekeurige waarde $f(b)$ te kiezen, zal f ook op $[a,b]$ onbegrensd zijn, dus niet R-integreerbaar kunnen zijn over $[a,b]$. Toch zouden we een betekenis willen toekennen aan de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$. Het ligt voor de hand om hiervoor formule (8.1) te gebruiken, waarbij $\int_a^c f(x)\,dx$ voor $a < c < b$ als Riemann-integraal kan worden opgevat.

Definitie Zij $-\infty < a < b < \infty$ en zij $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ een functie die R-integreerbaar (en dus ook begrensd) is over $[a,c]$ voor elke $c \in (a,b)$, maar onbegrensd is op $[a,b)$. Dan noemen we het punt b een *kritiek punt (van de eerste soort)* voor de integratie van f over $[a,b]$.
We noemen de functie f *(oneigenlijk) integreerbaar* over $[a,b)$ en schrijven

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x)\,dx \tag{8.5}$$

als de limiet in het rechter lid bestaat (en dus eindig is). (We mogen dan ook zeggen: oneigenlijk integreerbaar over $[a,b]$.)
Verder zeggen we dat de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ *convergeert* als de limiet in (8.5) bestaat en dat die integraal *divergeert* als de limiet niet bestaat.

Een soortgelijke definitie geldt als $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ onbegrensd is op $(a,b]$, maar R-integreerbaar is over elke $[c,b]$ met $c \in (a,b)$. Dan is

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c \downarrow a} \int_c^b f(x)\,dx, \tag{8.6}$$

mits de limiet in het rechter lid bestaat.

8.3 Voorbeeld Zij $\alpha \in \mathbb{R}$ en $f(x) := x^\alpha$ $(x > 0)$. Op ieder interval $[c,b]$ met $c > 0$ is f dan R-integreerbaar met integraal

$$\int_c^b x^\alpha\,dx = \begin{cases} (\alpha+1)^{-1}\,(b^{\alpha+1} - c^{\alpha+1}) & \text{als } \alpha \neq -1, \\ \log b - \log c & \text{als } \alpha = -1. \end{cases} \tag{8.7}$$

Op $(0, b]$ is f begrensd als $\alpha \geq 0$ en onbegrensd als $\alpha < 0$. De limiet voor $c \downarrow 0$ van het rechterlid van (8.7) bestaat desda $\alpha > -1$ en in het geval van convergentie is de limiet gelijk aan $(\alpha+1)^{-1} b^{\alpha+1}$. Dus

$$\int_0^b x^\alpha \, dx = \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha > -1), \tag{8.8}$$

waarbij sprake is van een Riemann-integraal als $\alpha \geq 0$ en van een oneigenlijke integraal als $-1 < \alpha < 0$. Voor $\alpha \leq -1$ divergeert $\int_0^b x^\alpha \, dx$.

8.4 Opmerking We herinneren nog eens aan onze conventie (cf. §3.15) dat bij het bestaan van een limiet van een functie altijd stilzwijgend verondersteld wordt dat de limiet eindig is. Ook bij de definitie van oneigenlijke convergente integraal sluiten we dus het geval uit dat de limiet in (8.5) gelijk aan ∞ of $-\infty$ is. Het is echter wel geoorloofd om te schrijven dat $\int_a^b f(x) \, dx = \infty$ of $-\infty$ als het rechterlid van (8.5) (of (8.6)) die uitkomst heeft. Zo zal de integraal in (8.8) gelijk zijn aan ∞ als $\alpha \leq -1$ (ga na).

8.5 Bekijk nu een functie $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$. Deze functie kan nooit R-integreerbaar zijn omdat de definitie van Riemann-integraal begrensde intervallen veronderstelt. Als echter f R-integreerbaar is over $[a, c]$ voor elke $c \in (a, \infty)$ dan lijkt een kleine variant op formule (8.5) zinvol om mogelijk de integraal van f over $[a, \infty)$ te definiëren:

Definitie Zij $a \in \mathbb{R}$ en $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ een functie die R-integreerbaar is over $[a, c]$ voor elke $c \in (a, \infty)$. Dan noemen we het punt ∞ een *kritiek punt (van de tweede soort)* voor de integratie van f over $[a, \infty)$.
We noemen de functie f *(oneigenlijk) integreerbaar* over $[a, \infty)$ en schrijven

$$\int_a^\infty f(x) \, dx := \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x) \, dx \tag{8.9}$$

als de limiet in het rechter lid bestaat (en dus eindig is).
Ook zeggen we dat de integraal $\int_a^\infty f(x) \, dx$ *convergeert* als de limiet in (8.9) bestaat en dat die integraal *divergeert* als de limiet niet bestaat.

Een soortgelijke definitie geldt voor een functie $f\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ die R-integreerbaar is over elke $[c, b]$ met $c \in (-\infty, b)$. Dan is

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx := \lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x) \, dx, \tag{8.10}$$

mits de limiet in het rechter lid bestaat.

Het in §8.4 opgemerkte is, mutatis mutandis, ook voor bovenstaande Definitie van toepassing.

8.6 Voorbeeld Zij $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ en $f(x) := x^\alpha$ $(x \in [a, \infty))$. Op ieder interval $[a, c]$ met $c \in (a, \infty)$ is f dan R-integreerbaar met integraal

$$\int_a^c x^\alpha \, dx = \begin{cases} (\alpha+1)^{-1} \left(c^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}\right) & \text{als } \alpha \neq -1, \\ \log c - \log a & \text{als } \alpha = -1. \end{cases} \tag{8.11}$$

De limiet voor $c \to \infty$ van het rechterlid van (8.11) bestaat desda $\alpha < -1$ en in het geval van convergentie is de limiet gelijk aan $(-\alpha - 1)^{-1}\, a^{\alpha+1}$. Dus

$$\int_a^\infty x^\alpha\, dx = \frac{a^{\alpha+1}}{-\alpha - 1} \quad (\alpha < -1,\ a > 0). \tag{8.12}$$

8.7 Voorbeeld Er geldt dat

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{c\to\infty} \int_0^c e^{-x}\, dx = \lim_{c\to\infty} (1 - e^{-c}) = 1.$$

Propositie Algemener geldt:

$$\int_0^\infty e^{-x}\, x^n\, dx = n! \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8.13}$$

Bewijs We bewijzen met volledige inductie naar n dat de oneigenlijke integraal in (8.13) convergeert en geëvalueerd kan worden zoals daar gegeven. Het is bewezen voor $n = 0$. Stel, het is bewezen voor zekere n. Er geldt:

$$\int_0^c e^{-x}\, x^{n+1}\, dx = -e^{-x} x^{n+1} \Big|_0^c + (n+1) \int_0^c e^{-x}\, x^n\, dx = -e^{-c}\, c^{n+1} + (n+1) \int_0^c e^{-x}\, x^n\, dx. \tag{8.14}$$

Vanwege de inductiehypothese bestaat de limiet voor $c \to \infty$ van het meest rechtse lid. Dus de limiet kan ook in het meest linkse lid genomen worden en we verkrijgen

$$\int_0^\infty e^{-x}\, x^{n+1}\, dx = (n+1) \int_0^\infty e^{-x}\, x^n\, dx = (n+1)\, n! = (n+1)!\,. \qquad \square$$

8.8 Zij $-\infty \le a < b \le \infty$ en $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ zo dat f R-integreerbaar is over elk interval $[\alpha, \beta]$ met $a < \alpha < \beta < b$. Veronderstel dat de randpunten a en b allebei kritieke punten zijn voor de integratie van f over (a,b), d.w.z.,
(i) $b = \infty$ of f is onbegrensd op een interval $(b - \delta, b)$;
(ii) $a = -\infty$ of f is onbegrensd op een interval $(a, a + \delta)$.
Neem een willekeurig tussenpunt $c \in (a,b)$. Dan kunnen we met behulp van onze eerdere definities nagaan of de integralen van f over $(a,c]$ en over $[c,b)$ convergeren. Indien dit zo is, dan kunnen we definiëren: $\int_a^b := \int_a^c + \int_c^b$.

Definitie Zij $-\infty \le a < b \le \infty$ en $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ zo dat f R-integreerbaar is over elk interval $[\alpha, \beta]$ met $a < \alpha < \beta < b$. Kies een $c \in (a,b)$. Dan definiëren we

$$\int_a^b f(x)\, dx := \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^a f(x)\, dx \tag{8.15}$$

$$= \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^c f(x)\, dx + \lim_{\beta \uparrow b} \int_c^\beta f(x)\, dx, \tag{8.16}$$

mits beide integralen in het rechter lid van (8.15) convergeren of, equivalent, mits beide limieten van de Riemann-integralen in (8.16) bestaan. In dat geval zeggen we dat f *(oneigenlijk) integreerbaar* is over (a,b).

Opgave Ga na dat bovenstaande definitie onafhankelijk is van de keuze van c.

8.9 Opmerking Definities 8.2, 8.5 en 8.8 kunnen ook gebruikt worden voor complex-waardige functies op (a,b). In de aannames werken we dan met Riemann-integreerbaarheid van complex-waardige functies (cf. Definitie 7.15). Er kan eenvoudig worden ingezien dat een complexwaardige functie f (mogelijk oneigenlijk) integreerbaar is over (a,b) desda $\operatorname{Re} f$ en $\operatorname{Im} f$ (mogelijk oneigenlijk) integreerbaar zijn over (a,b).

8.10 Propositie Zij $-\infty \leq a < b \leq \infty$ en laten $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ integreerbaar zijn over (a,b). Dan is $\lambda f + \mu g$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ ook integreerbaar over (a,b).

Opgave Bewijs deze Propositie.

8.11 Voorbeeld Eerst volgen twee voorbeelden waarin sprake is van convergente integralen:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{\beta\to\infty} \int_{0}^{\beta} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{\alpha\to-\infty} (-\arctan\alpha) + \lim_{\beta\to\infty} \arctan\beta = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi = \pi. \end{aligned} \tag{8.17}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\alpha\downarrow-1} \int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\beta\uparrow1} \int_{0}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{\alpha\downarrow-1} (-\arcsin\alpha) + \lim_{\beta\uparrow1} \arcsin\beta = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi = \pi. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Vervolgens bekijken we als voorbeeld de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$. Deze blijkt te divergeren, omdat de beide limieten

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{x\,dx}{1+x^2} &= \lim_{\alpha\to-\infty} (-\log\sqrt{1+\alpha^2}), \\ \lim_{\beta\to\infty} \int_{0}^{\beta} \frac{x\,dx}{1+x^2} &= \lim_{\beta\to\infty} \log\sqrt{1+\beta^2}\end{aligned}$$

niet als eindig getal bestaan. Het is verleidelijk om te schrijven dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha\to\infty} \left(\log\sqrt{1+\alpha^2}\Big|_{-\alpha}^{\alpha} \right) = \lim_{\alpha\to\infty} 0 = 0,$$

maar de eerste gelijkheid is niet overeenkomstig Definitie 8.8: de limieten naar de ondergrens en naar de bovengrens van de integraal moeten onafhankelijk van elkaar genomen worden.

8.12 **Opmerking** Het is ook mogelijk om oneigenlijke integralen te bekijken met kritieke punten in het inwendige van het integratie-interval. Zij bijv. $-\infty \le a < c < b \le \infty$ en $f\colon (a,c) \cup (c,b) \to \mathbb{R}$ zo dat f R-integreerbaar is op elk gesloten begrensd deelinterval van het definitiegebied, maar f onbegrensd is op een interval $(c-\delta, c)$ of $(c, c+\delta)$ (waarbij $a < c-\delta$ en $c+\delta < b$). Dan noemen we c een kritiek punt voor de integratie van f over (a,b). We definiëren

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{8.19}$$

mits de (mogelijk oneigenlijke) integralen van f over (a,c) en over (c,b) convergeren. We hebben hier in het midden gelaten of de randpunten a en b kritieke punten zijn.

Bij meer kritieke punten $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ in het inwendige van (a,b) definiëren we de integraal op analoge wijze: als de som van integralen over intervallen (a, c_1), (c_1, c_2), $\ldots, (c_{n-1}, c_n)$, (c_n, b).

Bekijk als voorbeeld: $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 2 + 2 = 4.$

(Hier zijn de randpunten 1 en -1 geen kritieke punten.)

8.13 Opmerking De technieken van partiële integratie en van transformatie van de integratievariabele kunnen ook bij oneigenlijke integratie worden toegepast. Wat partiële integratie betreft, het is het veiligst om dit in de benaderende Riemann-integraal uit te voeren en pas daarna de limiet te nemen, zie bijv. het bewijs van Propositie 8.7, i.h.b. formule (8.14) en de daarna genomen limiet. Een schrijfwijze als

$$\int_0^\infty e^{-x}\,x^{n+1}\,dx = -e^x\,x^{n+1}\Big|_0^\infty + (n+1)\int_0^\infty e^{-x}\,x^n\,dx = (n+1)\int_0^\infty e^{-x}\,x^n\,dx,$$

die deze zaken wat kortsluit, is in het beginnersstadium beslist af te raden.

Wat transformatie van integratievariabele betreft, kan het geval van Opmerking 7.29 direct worden gegeneraliseerd voor oneigenlijke integralen, waarbij nu sprake is van een strikt monotone en bijectieve C^1-afbeelding $\phi\colon (\alpha,\beta) \to (a,b)$. Formules (7.26) en (7.27) blijven dan geldig, waarbij $\int_a^b f(x)\,dx$ convergent is desda de integraal in het rechterlid van (7.26) of (7.27) convergent is. Ook hier is het echter het veiligst om zo'n transformatie eerst in het geval van de benaderende Riemann-integraal te nemen en dan pas de limietovergang naar de oneigenlijke integralen te maken.

Met zulke transformaties kan men soms van een oneigenlijke integraal van type Definitie 8.2 naar een van type Definitie 8.5 gaan, of omgekeerd. Als illustratie kunnen de Voorbeelden 8.3 en 8.6 dienen. Met de transformatie $x = y^{-1}$ vinden we dat

$$\int_c^1 x^\alpha\,dx = \int_1^{c^{-1}} y^{-\alpha-2}\,dy.$$

Als $\alpha > -1$ kunnen we in beide zijden de limiet nemen voor $c \downarrow 0$. We vinden dat

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx = \int_1^\infty y^{-\alpha-2}\,dy.$$

8.14 **Opmerking** Een verreikende generalisatie van zowel de Riemann-integraal als de oneigenlijke integralen wordt gegeven door de *Lebesgue-integraal*. Het idee hierachter is dat we voor het bepalen van de integraal van een niet-negatieve functie $f\colon I \to [0,\infty)$ (I een interval) niet beginnen met een partitie van de abscis-verzameling I maar van de ordinaten-verzameling $[0,\infty]$ (inclusief $+\infty$). Laat $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = \infty$. We hebben dus een partitie $P = P(y_0,\ldots,y_n)$ van $[0,\infty]$. Definieer nu $I_k := f^{-1}([y_{k-1},y_k)) = \{x \in I \mid y_{k-1} \le f(x) < y_k\}$ $(k = 1,\ldots,n)$. Dan is I de disjuncte vereniging van de verzamelingen I_k $(k = 1,\ldots,n)$. Als benadering van onderen van een mogelijke *Lebesgue-integraal* $\int_I f(x)\,dx$ nemen we nu

$$s_P := \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\, m(I_k), \tag{8.20}$$

waarbij $m(I_k)$ de "maat" is van de verzameling I_k. Als alle verzamelingen I_k die zo kunnen voorkomen "meetbaar" zijn, dan definiëren we $\int_I f(x)\,dx$ als $\sup_P s_P$, waarbij P alle mogelijke partities doorloopt. In het geval dat $f \ge 0$ Riemann-integreerbaar of oneigenlijk integreerbaar is, kan bewezen worden dat deze nieuwe definitie van integraal hetzelfde oplevert als de oude definitie.

Het is duidelijk dat vele zaken moeten worden ingevuld om bovenstaande definitie rigoureus te maken. Dit zal gebeuren in het vak Integratietheorie. Wie geïnteresseerd is, kan reeds een eerste inleiding vinden in Rudin, Ch. 11.

Tot besluit van dit onderwerp zeggen we nog iets meer over het begrip "Lebesgue-maat" van een deelverzameling van $\mathbb{R}$. Een interval zoals $[a,b]$, $[a,b)$, etc. heeft gewoon maat $b-a$. In het bijzonder heeft een verzameling $\{a\}$ maat 0. Verder zal het zo zijn dat een aftelbare disjuncte vereniging $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ van Lebesgue-meetbare verzamelingen weer Lebesgue-meetbaar is met Lebesgue-maat $m(E) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$. Dit beschrijft nog lang niet alle Lebesgue-meetbare verzamelingen, maar we kunnen reeds concluderen dat elke aftelbare verzameling maat 0 heeft. Hier volgt weer uit dat voor een functie $f \ge 0$ op $\mathbb{R}$ die slechts ongelijk 0 is in aftelbaar veel punten, elke ondersom s_P (cf. (8.20)) gelijk 0 is, dus dat $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0$. De functie bekeken in Opgave 7.9(b) is dus wel Lebesgue-integreerbaar (met integraal 0) maar niet Riemann-integreerbaar. Verzamelingen van maat 0 spelen een belangrijke rol in de Lebesgue-theorie. Zulke verzamelingen hoeven echter niet noodzakelijk aftelbaar te zijn.

8.2 Convergentiecriteria: majoreren en minoreren

In de voorbeelden van oneigenlijke integralen tot nu toe bewezen we de oneigenlijke integreerbaarheid doordat we de benaderende Riemann-integralen expliciet als functie van de integratiegrens konden uitrekenen en vervolgens konden nagaan of deze expliciete uitdrukkingen een limiet hadden. Teneinde over convergentie van een oneigenlijke integraal te kunnen beslissen zonder iets uit te rekenen, gebruiken we convergentiecriteria. Doorgaans wordt convergentie aangetoond door de integrand te majoreren en divergentie door de integrand te minoreren.

8.15 Lemma

(a) Zij $-\infty < a < b \le \infty$ en laat $f,g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ zo dat $0 \le f(x) \le g(x)$ voor alle $x \in [a,b)$ en f,g R-integreerbaar zijn over elk interval $[a,c]$ met $c \in (a,b)$. Dan geldt: Als g integreerbaar is over $[a,b)$ dan is ook f integreerbaar over $[a,b)$.

(b) Zij $-\infty \le a < b < \infty$ en laat $f,g\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ zo dat $0 \le f(x) \le g(x)$ voor alle $x \in (a,b]$ en f,g R-integreerbaar zijn over elk interval $[c,b]$ met $c \in (a,b)$. Dan geldt: Als g integreerbaar is over $(a,b]$ dan is ook f integreerbaar over $(a,b]$.

Bewijs We bewijzen (a), onderdeel (b) gaat analoog (ga na). Laat

$$F(x) := \int_a^x f(y)\,dy, \quad G(x) := \int_a^x g(y)\,dy \qquad (a \le x < b).$$

Omdat $f, g \ge 0$ zijn F en G monotoon zwak stijgend op $[a, b)$ (ga na). Wegens Gevolg 7.17 en wegens de integreerbaarheid van g over $[a, b)$ geldt er dat

$$F(x) \le G(x) \le \lim_{z\uparrow b} G(z) = \int_a^b g(y)\,dy \quad (a \le x < b).$$

Dus F is een monotoon zwak stijgende en naar boven begrensde functie op $[a, b)$. Wegens de monotone convergentiestelling (cf. syll. Analyse A, Stelling 8.15 alsmede een analoge stelling over $\lim_{x\to\infty}$) bestaat $\lim_{x\uparrow b} F(x)$, dus f is integreerbaar over $[a, b)$. $\square$

8.16 Gevolg Zij $-\infty \le a < b \le \infty$ en laat $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ zo dat $0 \le f(x) \le g(x)$ voor alle $x \in (a, b)$ en f, g R-integreerbaar zijn over elk interval $[\alpha, \beta]$ met $a < \alpha < \beta < b$.
(a) Als g integreerbaar is over (a, b) dan is ook f integreerbaar over (a, b).
(b) Als f niet integreerbaar is over (a, b) dan is ook g niet integreerbaar over (a, b).

Opgave Bewijs dit Gevolg. Merk op dat alleen (a) een bewijs vergt omdat (b) de logische omkering van (a) is.

8.17 Propositie Zij $-\infty \le a < b \le \infty$ en laat $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ R-integreerbaar zijn over elk interval $[\alpha, \beta]$ met $a < \alpha < \beta < b$. Dan geldt: Als $|f|$ integreerbaar is over (a, b) dan is ook f integreerbaar over (a, b).

Bewijs Laat

$$g(x) := \tfrac{1}{2}(f(x) + |f(x)|) \quad \text{en} \quad h(x) := \tfrac{1}{2}(-f(x) + |f(x)|).$$

Dan is $f = g - h$. Ook geldt dat

$$0 \le g(x) \le |f(x)|, \quad \text{en} \quad 0 \le h(x) \le |f(x)| \qquad (x \in (\alpha, \beta)).$$

Volgens Stellingen 7.13 en 7.20 zijn g en h R-integreerbaar over elk interval $[\alpha, \beta]$ met $a < \alpha < \beta < b$. Wegens Gevolg 8.16(a) zijn g en h integreerbaar over (a, b). Wegens Propositie 8.10 is f dan integreerbaar over (a, b). $\square$

8.18 Definitie Zij $-\infty \le a < b \le \infty$ en laat $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ R-integreerbaar zijn over elk interval $[\alpha, \beta]$ met $a < \alpha < \beta < b$. We noemen de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ *absoluut convergent* als $|f|$ (en dus ook f) integreerbaar is over (a, b), en we noemen deze integraal *relatief convergent* als f maar niet $|f|$ integreerbaar is over (a, b).

8.19 Opmerking Definitie 8.18 en Propositie 8.17 blijven doorgaan met complexwaardige f, dus $f\colon (a, b) \to \mathbb{C}$. In het geval van Propositie 8.17 kan men nu bij het bewijs opmerken dat de integreerbaarheid van f de integreerbaarheid van $|\mathrm{Re}\, f|$ en $|\mathrm{Im}\, f|$ impliceert, daaruit volgt de integreerbaarheid van $\mathrm{Re}\, f$ en $\mathrm{Im}\, f$, en dit levert tenslotte de integreerbaarheid van f.

Opgave Bewijs dat $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx$ absoluut convergeert als $\lambda \in \mathbb{C}$ met $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Bewijs dat

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda} \quad (\operatorname{Re}\lambda > 0). \tag{8.21}$$

8.20 We kunnen nu Lemma 8.15 en Propositie 8.17 met elkaar combineren. Ook kunnen we opmerken dat het voor het convergentie-onderzoek van een oneigenlijke integraal voldoende is om de integrand met een andere functie te majoreren of minoreren nabij de kritieke punten van het integratie-interval. Zo komen we tot de volgende twee *vergelijkingscriteria* voor oneigenlijke integralen

Stelling (*majorantencriterium*) Zij $-\infty < a < b \le \infty$ en laten $f, g\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ zo dat f en g R-integreerbaar is over elk interval $[a, c]$ met $c \in (a, b)$ en b een kritiek punt is voor de integratie van deze functies over $[a, b]$. Neem aan dat er een deelinterval $[b - \delta, b)$ en een constante $C > 0$ bestaan zo dat

$$|f(x)| \le Cg(x) \quad \text{als } b - \delta \le x < b. \tag{8.22}$$

Dan geldt: $\int_a^b g(x)\,dx$ convergent $\Longrightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ absoluut convergent.

In bovenstaande stelling is dus $g \ge 0$. Eventueel mag g op een kleiner interval $[c, b)$ gegeven zijn. De conditie (8.22) kan ook als volgt geformuleerd worden: $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ als $x \uparrow b$.

De herformulering van bovenstaande Stelling voor het geval a een kritiek punt is van de integratie, wordt aan de lezer overgelaten.

8.21 Stelling (*minorantencriterium*) Zij $-\infty < a < b \le \infty$ en laten $f, g\colon [a, b) \to [0, \infty)$ zo dat f en g R-integreerbaar is over elk interval $[a, c]$ met $c \in (a, b)$ en b een kritiek punt is voor de integratie van deze functies over $[a, b)$. Neem aan dat er een deelinterval $[b - \delta, b)$ en een constante $C > 0$ bestaan zo dat

$$0 \le Cg(x) \le f(x) \quad \text{als } b - \delta \le x < b.$$

Dan geldt: $\int_a^b g(x)\,dx$ divergent $\Longrightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ divergent.

Ook hier mag g eventueel op een kleiner interval $[c, b)$ gegeven zijn. Wederom wordt de herformulering van de stelling voor het geval a een kritiek punt is van de integratie, aan de lezer overgelaten.

8.22 Voorbeeld Bij de toepassingen van Stellingen 8.20 en 8.21 zullen we voor g doorgaans een of andere standaardfunctie nemen waarvan we al weten of die al of niet integreerbaar is over het beschouwde interval. In het bijzonder zullen de functies $x \mapsto x^\alpha$ en $x \mapsto e^{-\lambda x}$ hieroe vaak gekozen worden.

(a) Zij $f(x) := e^{-x^2}$. Dan is f continu, dus R-integreerbaar over elk begrensd interval. Is f integreerbaar over $[0, \infty)$? Het antwoord is ja met behulp van Stelling 8.20, omdat $0 < e^{-x^2} \leq e^{-x}$ als $x \geq 1$ en omdat de integraal $\int_1^\infty e^{-x}\, dx$ convergent is (cf. Voorbeeld 8.7). De functie f is ook integreerbaar over $(-\infty, \infty)$ (ga na) en er geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}. \tag{8.23}$$

De eerste gelijkheid volgt direct, de tweede gelijkheid zal bewezen worden bij de tweedejaars Analyse, door een toepassing met meervoudige integralen. Deze integraal is van groot belang in het vak Statistiek.

(b) Zij $f(x) := (\sin x)^{-1}$ $(0 < x \leq \frac{1}{2}\pi)$. Dan is f continu op $(0, \frac{1}{2}\pi]$, dus R-integreerbaar over elk interval $[\alpha, \frac{1}{2}\pi]$ met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. Is f integreerbaar over $(0, \frac{1}{2}\pi]$? Het antwoord is nee met behulp van Stelling 8.21. Immers, $(\sin x)^{-1} \geq x^{-1}$ voor $0 < x < \pi$ (cf. syll. Analyse A, §10.10, tweede Voorbeeld) en de integraal $\int_0^{\pi/2} x^{-1}\, dx$ is divergent (cf. Voorbeeld 8.3).

8.23 Er is een grote analogie tussen oneindige reeksen en oneigenlijke integralen. Zo corresponderen Stellingen 8.20 en 8.21 met de vergelijkingstoets voor reeksen (Stelling en Gevolg 5.11). We zullen nu een analogon voor oneigenlijke integralen geven van het limietcriterium voor reeksen (Stelling 5.12).

Stelling (*limietcriterium*) Zij $-\infty < a < b \leq \infty$ en laat $f, g\colon [a, b) \to (0, \infty)$ (dus strikt positieve functies) zo dat f en g R-integreerbaar zijn over elk interval $[a, \beta]$ met $\beta \in (a, b)$. Neem aan dat $\lim_{x \uparrow b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ met $0 \leq L \leq \infty$. We onderscheiden de volgende gevallen.

(a) $0 < L < \infty$. Dan: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ is convergent $\iff$ $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ is convergent

(b) $L = 0$. Dan: $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ is convergent $\implies$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ is convergent

(c) $L = \infty$. Dan: $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ is divergent $\implies$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ is divergent

Bewijs We bewijzen (a). Er volgt uit de limietaanname dat er een $\beta \in (a, b)$ bestaat zo dat $\frac{1}{2}L \leq \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 2L$ als $x > \beta$. Pas nu Stellingen 8.20 en 8.21 toe. □

Opgave Bewijs onderdelen (b) en (c) van bovenstaande stelling.

In bovenstaande Stelling kunnen we uiteraard de voorwaarden verzwakken door slechts te eisen dat $f(x)$ en $g(x)$ positief zijn voor x voldoende dicht bij b. Ook hoeven f en g niet op hetzelfde interval te zijn gedefinieerd, ze moeten alleen met elkaar vergeleken kunnen worden op een willekeurig kleine linker omgeving van b. Het zal ook duidelijk zijn dat een analogon van bovenstaande Stelling geformuleerd kan worden voor het geval de integralen oneigenlijk zijn bij het linker eindpunt a.

8.24 Voorbeeld

(a) Zij $P(x) = c_p\,x^p + \cdots$ een reëelwaardig polynoom van graad p en $Q(x) = d_q\,x^q + \cdots$ een reëelwaardig polynoom van graad q ($c_p, d_q \neq 0$). Zij $a \in \mathbb{R}$ en veronderstel dat $P(x), Q(x) > 0$ als $x \geq a$. Is $f(x) := P(x)/Q(x)$ integreerbaar over $[a,\infty)$? We passen Stelling 8.23(a) toe met $g(x) := x^{p-q}$. Er geldt dat $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = c_p/d_q$. Er volgt met behulp van Voorbeeld 8.6 dat f integreerbaar is over $[a,\infty)$ desda $p < q-1$.

(b) Zij $f(x) := (e^{x^2} - 1)^{-1}$ $(x > 0)$. Is f integreerbaar over $(0,1]$? Neem $g(x) := x^{-2}$ $(x > 0)$. Pas Stelling 8.23(a) toe (herformuleerd voor het geval dat de integraal oneigenlijk is bij het linker eindpunt). Er geldt dat $\lim_{x\downarrow 0}\big(f(x)/g(x)\big) = 1$. Er volgt met behulp van Voorbeeld 8.3 dat $\int_0^1 f(x)\,dx$ divergeert.

8.25 Opgave Zij $x \in \mathbb{R}$.

(a) Bewijs dat de integraal $\displaystyle\int_1^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt$ convergeert voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Bewijs dat de integraal $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}\,t^{x-1}\,dt$ convergeert desda $x > 0$.

(c) Definieer

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt \quad (x > 0). \tag{8.24}$$

Merk op dat de integraal in het rechterlid convergeert voor de beschouwde waarden van x. Bewijs met partiële integratie toegepast op de benaderende Riemann-integralen dat de volgende functionaalvergelijking geldt:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad (x > 0). \tag{8.25}$$

Vergelijk dit met het bewijs van (8.13) en merk op dat $\Gamma(n+1) = n!$ $(n = 0,1,2,\ldots)$. Concludeer ook uit (8.25) en (6.23) dat

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} \quad (x > 0,\ n = 0,1,2,\ldots). \tag{8.26}$$

(d) Definieer

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt \quad (x,y > 0). \tag{8.27}$$

Bewijs dat de integraal in het rechterlid convergeert voor de beschouwde waarden van x en y.

(e) Bewijs met behulp van partiële integratie de functionaalvergelijking

$$B(x+1,y) = \frac{x}{y}\,B(x,y+1) \quad (x,y > 0). \tag{8.28}$$

Concludeer hieruit door iteratie dat

$$B(n,y) = \frac{(n-1)!}{(y)_n} = \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(y)}{\Gamma(n+y)} \quad (y > 0,\ n \in \mathbb{N}). \tag{8.29}$$

De zojuist gedefinieerde functie Γ staat bekend als de *gammafunctie van Euler*. De functie is van zeer groot belang. Nadere eigenschappen van deze functie zullen worden behandeld bij de vakken Functietheorie en Speciale Functies. De functie van twee variabelen gedefinieerd door (8.27) staat bekend als de *betafunctie*. Bij de tweedejaars Analyse zal met behulp van meervoudige integralen bewezen worden dat de evaluatie van $B(n,y)$ door het rechterlid van (8.29) geldig blijft voor willekeurige reële $n > 0$.

8.26 Nog een ander convergentiecriterium voor oneigenlijke integralen wordt geleverd door het Cauchy-criterium voor limieten van functies (zie Stelling 3.24):

Propositie Zij $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ en zij f R-integreerbaar over elk eindig interval $[a,b]$. Dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent:
(a) De integraal $\int_a^\infty f(x)\,dx$ convergeert.
(b) Bij elke $\varepsilon > 0$ is er een $M > 0$ zo dat $|\int_b^c f(x)\,dx| < \varepsilon$ als $M < b < c$.

8.3 Interactie tussen reeksen en oneigenlijke integralen

Het verband tussen oneindige reeksen en oneigenlijke integralen over een onbegrensd interval is niet louter een analogie, maar het is soms ook mogelijk om convergentie van een reeks uit convergentie van een integraal, of vice versa, af te leiden. Om te beginnen geven we een integraalcriterium voor reeksen dat eigenlijk al in het hoofdstuk over reeksen had thuisgehoord, maar toen is uitgesteld omdat de oneigenlijke integralen nog niet waren behandeld.

8.27 Stelling (*integraalcriterium voor reeksen*) Zij $f\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$ monotoon zwak dalend. Dan geldt:

de integraal $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ is convergent $\iff$ de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f(n)$ is convergent.

Bewijs De functie f is R-integreerbaar over elk begrensd interval $[1,b]$ vanwege Propositie 7.8. Voor $n \in \mathbb{N}$ geldt wegens (7.7) dat

$$f(n) \ge \int_n^{n+1} f(x)\,dx \ge f(n+1).$$

Als $n \le x < n+1$ dan kunnen we schrijven

$$\int_1^x f(y)\,dy = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(y)\,dy + \int_n^x f(y)\,dy,$$

en we kunnen dit naar beneden en naar boven afschatten door

$$\sum_{k=2}^n f(k) \le \int_1^x f(y)\,dy \le \sum_{k=1}^n f(k) \quad (n \le x \le n+1).$$

Als de reeks $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ convergeert dan zal de functie $x \mapsto \int_1^x f(y)\,dy$ dus naar boven begrensd zijn en daarom, omdat hij bovendien monotoon zwak stijgend is, zelf convergeren als $x \to \infty$ (cf. een variant van de stelling in syll. Analyse A, Stelling 8.15. Anderzijds, als de integraal $\int_1^\infty f(y)\,dy$ convergeert dan zal $\sum_{k=2}^n f(k)$ als functie van n naar boven begrensd zijn en daarom zelf convergeren als $n \to \infty$ (cf. syll. Analyse A, Stelling 7.6). $\square$

Deze Stelling zal het meest worden toegepast door uit de convergentie of divergentie van een oneigenlijke integraal een soortgelijke eigenschap voor de corresponderende oneindige reeks af te leiden. Dit komt omdat de benaderende integralen $\int_1^x f(y)\,dy$ meestal eenvoudiger expliciet zijn uit te rekenen dan de benaderende sommen $\sum_{k=1}^n f(k)$.

8.28 Voorbeeld

(a) Zij $\alpha > 0$. Wegens Stelling 8.27 convergeert de integraal $\int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx$ desda de reeks $\sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha}$ convergeert. We weten echter dat $\int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx$ convergeert desda $\alpha > 1$ (cf. Voorbeeld 8.6). Dit geeft een alternatief bewijs voor Propositie 5.5.

(b) We bekijken de reeks $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\,\log n}$. We kunnen Steling 8.27 toepassen met $f(x) := \dfrac{1}{x\,\log x}$ $(x \geq 2)$. Merk op dat het voor de toepassing van de stelling niet uitmaakt dat we pas bij 2 beginnen te sommeren en te integreren. Nu geldt (met de transformatie $y = e^z$ van de integratievariabele) dat

$$\int_2^x \frac{dy}{y\,\log y} = \int_{\log 2}^{\log x} \frac{dz}{z} = \log z\Big|_{\log 2}^{\log x} = \log\log x - \log\log 2.$$

De limiet voor $x \to \infty$ van het meest rechter lid is ∞, dus de integraal en de reeks divergeren.
Opmerking De divergentie van deze reeks had ook aangetoond kunnen worden met behulp van Opgave 5.6.

8.29 **Opgave** Zij $f\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$ monotoon zwak dalend en zo dat $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Definieer

$$a_n := \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(y)\,dy \quad (n \in \mathbb{N}),$$
$$b_n := \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(y)\,dy \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Bewijs met behulp van de ongelijkheden uit het bewijs van Stelling 8.27 dat $0 \leq b_n \leq a_n \leq f(1)$, dat de rij (b_n) monotoon zwak stijgend is en de rij (a_n) monotoon zwak dalend en dat beide rijen een gemeenschappelijke limiet L hebben:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

8.30 **Definitie** De *constante van Euler (of Euler-Mascheroni)* wordt gedefinieerd door

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n} - \log n\right). \tag{8.30}$$

Opgave Bewijs met behulp van Opgave 8.29 dat de limiet (8.30) bestaat en positief is.

De waarde van γ is bij benadering 0.577215. Het is nog steeds een open probleem of γ al of niet rationaal is.

8.31 We bekijken nu een analogon voor integralen van het convergentiecriterium van Leibniz voor altererende reeksen (cf. syll. Analyse A, Definitie 7.11). We moeten dus een analogon met integralen geven van $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} c_n$ met $0 < c_{n+1} \leq c_n$ $(n \in \mathbb{N})$ en $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Als analogon van de rij (c_n) nemen we een monotoon zwak dalende functie $f\colon [a,\infty) \to (0,\infty)$ die naar 0 convergeert als $x \to \infty$. Als analogon van $(-1)^{n-1}$ nemen we een functie die zich gedraagt als $x \mapsto \sin x$.

Propositie Zij $f\colon [a,\infty) \to (0,\infty)$ monotoon zwak dalend en neem aan dat $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Zij $b \in \mathbb{R}$, $T > 0$ en zij $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu zo dat $\sigma(x+T) = -\sigma(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en zo dat $\sigma(x) > 0$ als $b < x < b+T$. Dan convergeert de integraal $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,\sigma(x)\,dx$.

Bewijs De functie $f\sigma$ is R-integreerbaar over elk interval $[a,\beta]$ ($a < \beta < \infty$) vanwege Stelling 7.7, Propositie 7.8 en Stelling 7.18. Zonder verlies van algemeenheid mogen we veronderstellen dat $b \geq a$ en het is voldoende om de convergentie te onderzoeken van de integraal $\int_b^\infty f(x)\,\sigma(x)\,dx$ (waarom?).

$$c_n := (-1)^{n-1} \int_{b+(n-1)T}^{b+nT} f(x)\,\sigma(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x+(n-1)T)\,\sigma(x)\,dx.$$

Ga na dat de tweede gelijkheid geldt en bewijs hieruit dat

$$f(b+(n-1)T) \int_b^{b+T} \sigma(x)\,dx \geq c_n \geq f(b+nT) \int_b^{b+T} \sigma(x)\,dx > 0 \tag{8.31}$$

en $c_n \geq c_{n+1}$. Uit (8.31) volgt nu dat $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. De reeks $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} c_n$ convergeert dus, omdat aan alle voorwaarden van het criterium van Leibniz voldaan is. Als $x \in [b+(n-1)T, b+nT)$ dan geldt dat

$$\begin{aligned} F(x) := \int_b^x f(y)\,\sigma(y)\,dy &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{b+(k-1)T}^{b+kT} f(y)\,\sigma(y)\,dy + \int_{b+(n-1)T}^x f(y)\,\sigma(y)\,dy \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} c_k + (-1)^{n-1} \int_b^{x-(n-1)T} f(y+(n-1)T)\,\sigma(y)\,dy. \end{aligned}$$

Er volgt (ga na) dat

$$\left| F(x) - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} c_k \right| \leq c_n \quad \text{als } x \in [b+(n-1)T, b+nT).$$

We concluderen dat

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} c_k. \qquad \square$$

8.32 Voorbeeld Zij $\alpha > 0$ en $f_\alpha(x) := x^{-\alpha} \sin x \quad (x > 0)$. Toepassing van Propositie 8.31 geeft dat f_α integreerbaar is over elk interval $[a,\infty)$ met $a > 0$. Dit resultaat kan ook door directe berekening, met behulp van partiële integratie verkregen worden. Immers, als $0 < a < b$ dan

$$\int_a^b x^{-\alpha} \sin x\,dx = -x^{-\alpha} \cos x \Big|_a^b - \alpha \int_a^b x^{-\alpha-1} \cos x\,dx.$$

De limiet voor $b \to \infty$ van het rechter lid bestaat. Immers, $\lim_{b\to\infty} b^{-\alpha} \cos b = 0$ en $|x^{-\alpha-1} \cos x| \leq x^{-\alpha-1}$, dus de integraal $\int_a^\infty x^{-\alpha-1} \cos x\,dx$ is convergent vanwege Stelling 8.20 en Voorbeeld 8.6.

Als $\alpha < 2$ dan is f_α zelfs integreerbaar over $(0,\infty)$. Dit volgt door toepassing van het limietcriterium (Stelling 8.23) in combinatie met de limiet $\lim_{x\downarrow 0}(f_\alpha(x)/x^{1-\alpha}) = 1$ en Voorbeeld 8.3.

Tenslotte gaan we na of de integraal $\int_a^\infty f_\alpha(x)\,dx$ absoluut convergeert ($a > 0$). Voor $\alpha > 1$ is dit inderdaad zo omdat $|f_\alpha(x)| \le x^{-\alpha}$. Pas nu Stelling 8.20 en Voorbeeld 8.6 toe. Voor $\alpha \le 1$ is deze integraal slechts relatief convergent. Immers,

$$\int_\pi^{(n+1)\pi} |x^{-\alpha}\,\sin x|\,dx \ge \sum_{k=1}^n \int_{(k+1/6)\pi}^{(k+5/6)\pi} x^{-\alpha}\,|\sin x|\,dx \ge \sum_{k=1}^n \tfrac{1}{2}\,((k+1)\pi)^{-\alpha}\,(\tfrac{2}{3}\pi).$$

Omdat $\sum_{k=1}^\infty (k+1)^{-\alpha}$ divergeert voor $\alpha \le 1$, volgt er dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_\pi^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx = \infty.$$

Dit laat zien dat de beschouwde integraal niet absoluut convergeert als $\alpha \le 1$.

Het hieronder gegeven speciale geval speelt een belangrijke rol in het vak Fourier-Analyse. De expliciete evaluatie, die we hier vast vermelden, zal bewezen worden bij het vak Functietheorie.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,. \tag{8.32}$$

Verdere vraagstukken

V8.1 Bereken de volgende integralen:

a) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ d) $\displaystyle\int_1^\infty \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{x^2}$

V8.2 Bereken de volgende integralen:

a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x\log^2 x}$ b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+2x}$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$ d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,\sin x\,dx$

V8.3 Onderzoek de volgende integralen op convergentie:

a) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{1-\cos x}$ e) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^{3/2}-1}$ f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/2}+1}$

V8.4 Onderzoek de volgende integralen op convergentie:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{[x]^2}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x\,\cos x}{x^2}\,dx$ d) $\displaystyle\int_1^\infty \arcsin\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$

e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\log x}$ f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos(\pi x/2)}{\log x}\,dx$

V8.5 Onderzoek de volgende integralen op convergentie:

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log x}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{|1-x|}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^\pi \log(\sin x)\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{x}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x}-e^{-x}\right)\frac{dx}{x}$

V8.6 Voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ convergeren de volgende integralen?

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x^\alpha}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^\alpha}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$

V8.7 Onderzoek voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ de volgende reeksen en (oneigenlijke) integralen convergent zijn:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{\log n}{n^\alpha}$, b) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^\alpha \log n}$, c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^\alpha}\,dx$,

d) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^\alpha \log x}\,dx$, e) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \log x\,dx$.

V8.8 Onderzoek de convergentie van de volgende reeksen:

a) $\displaystyle\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n\,\log n\,\log(\log n)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n\,\log n\,(\log(\log n))^2}$

V8.9 Bewijs dat $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ convergeert.

V8.10 Zij $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continu en $\int_0^\infty f(x)\,dx$ convergent.

a) Geldt er dan dat $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$? Zo ja, bewijs dit; zo nee, geef een tegenvoorbeeld.
b) Kan er dan gelden dat $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$ met $\alpha \neq 0$? Zo ja, geef een voorbeeld; zo nee, bewijs dan dat dit onmogelijk is.
c) Kan er dan gelden dat f onbegrensd is op $[0,\infty)$? Zo ja, geef een voorbeeld; zo nee, bewijs dan dat dit onmogelijk is.

V8.11 Onderzoek of de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)n}$ convergent is.

Aanwijzing Denk aan γ.

Index

Abel (stelling van) 62
absolute convergentie
  van integraal 92
  van reeks 41
absoluut maximum of minimum 32
alternerende reeks 41
analytische functie 50
Archimedische eigenschap 9

betafunctie 95
binomiaalreeks 63
Bolzano-Weierstrass (stelling van)
  in $\mathbb{R}$ 11
  in $\overline{\mathbb{R}}$ 14
bovengrens
  binnen geordende verzameling 6
  uiteindelijke 15
bovensom 70

Cantor (stelling van) 9
Cauchy (stelling van) 12,13
Cauchy (worteltoets van) 43
Cauchy-criterium
  voor functies 24
  voor oneigenlijke integralen 95
  voor reeksen 39
Cauchy-product 53
Cauchy-rij 12
concave functie 36
continue functie 19
convergente
  integraal 86,87
  rij in $\overline{\mathbb{R}}$ 14
  reeks 39
convergentiestraal van machtreeks 48
convexe
  functie 36
  verzameling 37
cyclometrische functies 68,69

d'Alembert (quotiëntentoets van) 44
divergente integraal 86,87

e 45,46
Euler (constante van) 97
exponentiële functie 48,54,59,64

extremum
  criteria voor 33–36
  types van 32

functie 19
fundamentaalrij 12

gammafunctie 95
geordende verzameling 5
geordend lichaam 5
Gregory (formule van) 62
grootste ondergrens
  binnen geordende verzameling 6
  stelling van de 9

herordening van reeksen 55,56
hoofdstelling van de integraalrekening 80
hyperbolische functies 67,68

infimum
  binnen geordende verzameling 6
  van functie 24
inproduct 83
integraal
  oneigenlijke 86,87,88,90
  Riemann- 72,76
integraalcriterium (voor reeksen) 96
integreerbaar
  oneigenlijk 86,87,88,90
  Riemann- 72,76
intervalschakeling (stelling van de) 9
inwendig maximum of minimum 32
irrationaliteit van e 47
isomorfisme (van geordende lichamen) 6

kleinste bovengrens
  axioma van de 6
  binnen geordende verzameling 6
kritiek punt (voor integratie) 86,87,90

Lebesgue-integraal 90,91
Lebesgue-maat 91
Leibniz (criterium van)
  voor integralen 98
  voor reeksen 41,52
lichaam 4
limiet
  van functie 21–23

limietcriterium
  voor integralen 94
  voor reeksen 42
limietpunt (van rij)
  in $\mathbb{R}$ 11
  in $\overline{\mathbb{R}}$ 14
lim inf 14
lim sup 14
lineair geordende verzameling 5
Lipschitz-continu 28
logaritme 60–62
lokaal maximum of minimum 32

machtreeks 47
majorantencriterium 93
Maple 47
maximum van functie 24,32
  criteria voor 33–36
Mertens (stelling van) 54
middelwaardestelling 27
  van de integraalrekening 82
minimum van functie 24,32
  criteria voor 33–36
minorantencriterium 93

naar beneden begrensde functie 24
naar boven begrensde functie 24

omgeving 19
ondergrens
  binnen geordende verzameling 6
  uiteindelijke 15
ondersom 70
oneigenlijke integraal 86,87,88,90
orthogonale stelsels van functies 83,84

π 67,69,84,99
partiële integratie 81
partiële sommatie 51
partitie 70
Pochhammer-symbool 63
primitieve van een functie 79

quotiëntentoets (van d'Alembert) 44

randmaximum of -minimum 32
rationale getallen
  als geordend lichaam 4,5

reeks $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ 40,65,97
reële getallen
axiomatische karakterisering 6
d.m.v. sneden in $\mathbb{Q}$ 7
uitbreiding met $\pm\infty$ 13
relatief maximum of minimum 32
relatieve convergentie
van integraal 92
van reeks 41
Riemann (criterium van) 73
Riemann-integraal 72,76
Riemann-integreerbaar 72,76
Riemann-Stieltjes integraal 74
rij 11

snede 7
sterk maximum of minimum 32
Stirling (formule van) 58
stuksgewijs continu 87
sup-eigenschap 6
supremum
binnen geordende verzameling 6
van functie 24

Taylorformule 50
totaal geordende verzameling 5
trigonometrische functies 65–68
tussenwaardestelling 25

uniform continue functie 26

verfijning (van partitie) 71
vergelijkingstoets
voor integralen 93
voor reeksen 41

Wallis (formule van) 84
worteltoets (van Cauchy) 43

zwak maximum of minimum 32